Jerzy Mioduszewski (Katowice)

DWIE WARSZAWY – ZBIORY DWUSPÓJNE: HISTORIA NIEDOKOŃCZONA

W poprzednim odczycie [1] akcentowana była wartość dowodów efektywnych w porównaniu z tymi, w których środkiem dowodowym jest pewnik wyboru. W tym odczycie będzie okazja przypomnieć, że pewnik wyboru pełni w sytuacjach mnogościowych rolę wyjaśniającą w odróżnieniu od konstrukcji efektywnych, które często mają charakter przypadkowości.

[1] Roman Murawski, *Kilka uwag o filozofii matematyki w Polsce przedwojennej* (w tym tomie).

1. Twierdzenie Bernsteina

Pewnik wyboru pozwala na rozważanie zbiorów mającym po jednym elemencie w każdym ze zbiorów danej kolekcji nie wymagając, by dana była reguła określająca tego rodzaju wybór. Na tej zasadzie rozważane były od dawna – może już przez Eulera, a na pewno przez Dirichleta – funkcje dowolne, których brak czyniłby teorię funkcji niepełną. Twierdzenie Bernsteina (1908) [2] pozwala na rozważanie dwu rozłącznych zbiorów o wspomnianej własności, jeśli tylko moc kolekcji nie przekracza mocy zbiorów do niej należących. Każdy z dwu powstałych zbiorów – nazywanych *zbiorami Bernsteina* – ma elementy wspólne z każdym zbiorem kolekcji nie zawierając żadnego z nich w całości. Przykładem kolekcji Bernsteina jest kolekcja wszystkich podzbiorów doskonałych prostej. Zbiory Bernsteina z nią związane są podzbiorami prostej mającymi punkty wspólne z każdym jej podzbiorem doskonałym i nie zawierającym w całości żadnego z nich. Nie są na pewno zbiorami borelowskimi.

[2] Felix Bernstein, *Zur Theorie der trigonometrischen Reihen*, Leipziger Berichte 1908. 329.

2. Zbiory spójne punktokształtne

Innym przykładem kolekcji Bernsteina jest kolekcja wszystkich kontinuów wielopunktowych leżących na płaszczyźnie. Zbiory Bernsteina z nią związane, przecinając każde kontinuum leżące w płaszczyźnie, są gęste w płaszczyźnie (bo każdy jej obszar zawiera kontinua), nie zawierają żadnego kontinuum wielopunktowego w całości – są punktokształtne, jak się mówi. Rozdzielając jakkolwiek pozostałe punkty płaszczyzny między tak powstałe dwa zbiory, dostaje się zauważone przez Stefana Mazurkiewicza (1913) [3] rozbicie płaszczyzny na dwa zbiory punktokształtne. Już samo to jest osobliwością. Wzmacnia tę osobliwość spójność tych zbiorów, którą zauważył Sierpiński

(1920) [4], wykorzystując dla tego celu pewne dawno znane twierdzenie Phragmena (1885) [5] o rozcinaniu płaszczyzny.

Dla dowodu spójności, skorzystajmy z tego, że zbiór Bernsteina jest gęsty w płaszczyźnie. Zatem, jego niespójność implikowałaby istnienie dwu zbiorów otwartych w płaszczyźnie (!), niepustych rozłącznych, których suma pokrywałaby ten zbiór. Wobec spójności płaszczyzny, dopełnienie tej sumy byłoby zbiorem domkniętym rozspajającym płaszczyznę i na mocy twierdzenia Phragmena musiałoby zawierać kontinuum wielopunktowe, w którym – wobec wymagań konstrukcji – musiałyby się znaleźć pewne punkty zbioru Bernsteina. Sprzeczność.

Nie sprawia trudności zwrócenie uwagi na ogólność zjawiska odkrytego przez Mazurkiewicza. Nie musi to być płaszczyzna. Może być to na przykład krzywa o tej własności, że każdy zbiór ją rozcinający zawiera zbiór doskonały (np. dywan Sierpińskiego, ale nie krzywa trójkątowa Sierpińskiego, którą mogą rozspajać zbiory skończone). Stosując poprzednie rozumowanie, dostajemy w tej krzywej podzbiory gęste, spójne i punktokształtne.

[3] S. Mazurkiewicz, *Contribution a la theorie des ensembles*, Bull. Intern. de l'Acad. des Sc. de Cracovie [A] 1913, 46-55.
[4] W. Sierpiński, *Sur un ensemble ponctiforme connexe*, Fund. Math. 1 (1920), 7-10.
[5] E. Phragmen, *Über die Begrenzungen von Kontinua*, Acta Math. 7 (1885), 44-45.

3. Spójność

Spójność określa się negatywnie jako niemożliwość rozbicia przestrzeni na dwa zbiory otwarte. To rozumienie spójności było zaproponowane przez Frederica Riesza (1907) [6] po próbach ujęć pozytywnych, w których za zbiór spójny uznawało się zbiór. w którym każde dwa punkty dają się połączyć łamaną lub łukiem, co wystarczało w sytuacjach geometrycznych. W sytuacji mnogościowych, kiedy trzeba było mieć zapewnioną spójność wspomnianych zbiorów łączących punkty, prowadziło to do circulus vitiosis [7]. Przewrotna elegancja scholastycznego w swoim charakterze określenia Riesza sprawia trudności, jeśli chcemy orzec o spójności zbioru. Wymaga to podwójnego przeczenia, a mianowicie zaprzeczenia przypuszczenia o niespójności.

[6] F. Riesz, Die Genesis der Raumbegriffes, Math. u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn 24 (1907), 309-353.
[7] O tych i innych próbach ujęciach spójności pisze R. L. Wilder w znanym artykule przeglądowym, *Evolution of topological concept of „connectedness"*, Amer. Math. Monthly 85 (1978), 720-726.

4. Zbiór Knastera-Kuratowskiego

Zapewne dlatego Bronisław Knaster i Kazimierz Kuratowski (1921) [8] podjęli problem spójności od samych podstaw. Już w pierwszych zdaniach swojej pracy piszą, że skłania ich do tego *prostota określenia… zastanawiająca z punktu widzenia logiki*. Wydawałoby się na przykład, że zbiory spójne powinny zawierać zawsze podzbiory spójne wielopunktowe dowolnie małe – tak, jak to jest – dzięki znanemu lematowi

Janiszewskiego – w zakresie zbiorów spójnych zwartych, tj. w zakresie kontinuów. Tymczasem twierdzenie jakie uzyskali autorzy stwierdza jedynie tyle, że każdy zbiór spójny wielopunktowy zawiera podzbiory właściwe spójne wielopunktowe, przy czym dowód nie zapewnia niczego poza podzbiorami różniącymi się od całości o zbiór skończony, chyba że rozważany zbiór jest rozspajany przez punkt. a wtedy po dołączeniu tego punktu do każdej z dwu części, na które zbiór się wtedy rozpada, dostajemy rozkład zbioru na dwa podzbiory spójne wielopunktowe stykające się w punkcie. Dodajmy spóźnioną uwagę, że w teorii zbiorów spójnych nie opłaca się mówić o innych zbiorach spójnych niż wielopunktowe.

W latach 30. P. A. Swingle [9], posługując się metodą Bernsteina, budował zbiory spójne nie zawierające innych podzbiorów spójnych niż gęste. Jak trudny był to temat, niech świadczy to, że dopiero w latach 40-ych Paul Erdös [10] pokazał, że zbiory spójne muszą zawierać podzbiory spójne różniące od całości o zbiór nieskończony, ale M. E. Rudin (1958) [11] pokazała, ze więcej uzyskać się nie da, budując (przy pomocy hipotezy continuum) zbiór spójny, którego podzbiory spójne różnią się od całości jedynie o zbiór przeliczalny.

Za najbardziej spektakularny wynik tej, podstawowej dla teorii zbiorów spójnych, pracy Knastera i Kuratowskiego, uważa się konstrukcję zbioru spójnego z punktem eksplodującym jako – efektywnie określonego – podzbioru miotełki Cantora. Przepis na utworzenie tego zbioru jest prosty: zalicza się doń wierzchołek miotełki, punkty na poziomach wymiernych odcinków wychodzących z punktów niewymiernych zbioru Cantora i punkty na poziomach niewymiernych na pozostałych odcinkach miotełki.

Lakoniczny w swej elegancji opis z pracy [6] jest jednak po przyjrzeniu się mu przypadkowy. Jakie znaczenie ma aż tak precyzyjny opis, skoro dla uzyskania oczekiwanych własności nie ma wpływu dodanie do zbioru skończenie wielu punktów, i – podobnie – odjęcie, jeśli nie ma wśród nich wierzchołka miotełki. Użyty w opisie kartezjański układ współrzędnych mógłby być bez szkody zastąpiony innym. Autorzy akcentowali efektywność konstrukcji, mimo że wiedzieli o możliwości zbudowania swojego zbioru w oparciu o pewniku wyboru, bo ten nieefektywny opis przytaczają jako komentarz do głównego ciągu twierdzeń.

[8] B. Knaster i K. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2 (1921). 206-255.
[9] P. M. Swingle, *Two types of connected sets*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), 254-258.
[10] P. Erdös, *Some remarks on connected sets*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 442-446.
[11] M. E. Rudin, *A connected subset of the plane*, Fund. Math. 46 (1958), 15-24.

5. Wykresy pochodnych

Pochodna jest funkcją I-ej klasy Baire'a i ma własność Darboux. Jeszcze w roku 1907 W. H. Young [12] pokazał, że własność Darboux może być w tej sytuacji zastąpiona pewną własnością topologiczną wykresu, na której opierał się dowód spójności wykresów pochodnych, który podali Sierpiński i Kuratowski (1922) [13]. Wśród funkcji owszędzie istniejącej pochodnej są funkcje o osobliwości polegającej na tym, że ich pochodne mają gęste zbiory zer, mimo że same funkcje nie są stałe. Problem ich istnienia był stawiany przez Volterrę, ale konstrukcje tego rodzaju funkcji były trudne, szczególnie jeśli wymagać, by pochodne były ograniczone. Pierwsi podali je Koepcke (1890) [14] i Pompeiu (1907) [15]. Miały znaczenie dla teorii całki: ich istnienie stwierdzało,że całka Riemanna nie zawsze wystarcza dla odtworzenia funkcji z jej pochodnej. Wymuszało to przebudowę pojęć o całce.

Wykresy pochodnych o gęstym zbiorze zer – mimo że nadal pozostają spójne – mają tę osobliwość, że nie zawierają w swojej części poza osią x–ów zadanych zbiorów spójnych wielopunktowych. Istotnie, tego rodzaju zbiór spójny wielopunktowy dawałby po zrzutowaniu na oś x–ów pełny przedział, a więc zawierałby w szczególności zera pochodnej, a więc punkty osi x–ów, co jest niemożliwe. Po zidentyfikowaniu osi x–ów do punktu dostaje się zbiór spójny, który poza tak otrzymanym punktem nie zawiera już żadnych zbiorów spójnych wielopunktowych. Tak otrzymany zbiór spójny z punktem eksplodującym jest wyjątkowo elegancki: położony na miotełce typu Cantora ma na każdym jej odcinku dokładnie jeden punkt i jest poza tym zbiorem typu G_δ, a więc jako przestrzeń jest przestrzenią topologicznie zupełną. Konstrukcja jest efektywna, bo ten charakter mają przykłady Koepckego i Pompeiu. Można powiedzieć, że teoria funkcji wybiera wśród możliwości danych nieefektywnym dowodem istnienia rozwiązanie najlepsze. Rzecz została odkryta przez Knastera i Kuratowskiego w pracy [16] kilka lat później po danej przez tych autorów konstrukcji efektywnej.

Nie jest istotnym, by użyte były wykresy pochodnych. Wystarczy, by to były wykresy funkcji I-ej klasy Baire'a mających własność Darboux i gęsty brzegowy zbiór zer. Isaie Maksimoff (1940) [17], odpowiadając – jak pisze – na pytanie Łuzina, dowiódł, że po przeparametryzowaniu dziedziny odpowiednim homeomorfizmem, funkcje te stają się pochodnymi.

[12] W. H. Young, *A theorem in the theory of functions of a real variable*, Rend. Circolo Math. di Palermo 31 (1907), 187-192.
[13] K. Kuratowski i W. Sierpiński, *Les fonctions de classe I et les ensembles connexes ponctiformes*, Fund Math. 3 (1922), 303-313.
[14] A. Koepcke, *Über eine durchhaus differenzierbare Funktion mit Oszillationen in jedem Intervalle*, Math. Ann. 85 (1900), 104-109.
[15] D. Pompeiu, *Sur les fonctios derivees*, Math. Ann 63 (1907), 325-332.
[16] B. Knaster i K. Kuratowski, *Sur quelques proprietes topologiques des fonctions derivees*, Rend. del Circolo Math. di Palermo 49 (1925), 382-386.
[17] I. Maximoff, *Sur la trasformation continue de quelques foncions en derivees exactes*, Bull. Soc. Phys. Math. Kazan 3:12 (1940), 57-81; *On continuous transformations of some functions into an ordinary derivative*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa 12 (1943), 147-160.

6. Dwie Warszawy

Możliwość konstrukcji zbioru spójnego z punktem eksplodującym via pochodna funkcji Pompeiu musiało być dla autorów pracy [16] niespodzianką. Ma to potwierdzenie w skąpym omówieniu tej konstrukcji w *Topologie* Kuratowskiego [18], oraz w braku jej kontynuacji w pracach obu autorów. Ma się wrażenie, że inspiratorem tego epizodu był

Sierpiński, współautor pracy [13] o spójności wykresów pochodnych, który zauważył (1921) [20] topologiczną zupełność ich wykresów. Zainteresowania Sierpińskiego problemami różniczkowalności funkcji rzeczywistych, w szczególności osobliwościami typu Koepckego, są znane z jego prac jeszcze sprzed I Wojny i z okresu pobytu w Moskwie (1915–18) [20]. W końcu lat dwudziestych pod auspicjami Sierpińskiego na temat funkcji typu Koepckego habilitował się Zygmunt Zalcwasser, którego obszerna praca [21] ukazała się w roczniku 1927–28 Prac Matematyczno-Fizycznych.

D y g r e s j a . O Warszawie Dwudziestolecia mówi się zwykle mając na myśli Fundamenta Mathematicae. Tymczasem, obok istniała *druga Warszawa* niemal rozłączna z kręgiem wokół FM. Sierpiński łączył oba kręgi. Autorzy pracy [8] nie przekraczali niewidzialnej granicy w kierunku drugiej Warszawy. Dopiero tam mogliby spotkać Zygmunta Zalcwassera.

Terminu *dwie Warszawy* użył Profesor Karol Borsuk w roku 1975 na swoim jubileuszu w Pałacu Staszica. Pozostał tego ślad w postaci maszynopisu [22], w którym odnotowane są nazwiska i zdarzenia. Sierpiński, zakładając Fundamenta Mathematicae, nie jednoczył wokół nowych dyscyplin całej Warszawy, która w matematyce nie była wtedy *tabula rasa*. Było wcześniejsze oddziaływanie Uniwersytetu, wówczas rosyjskiego, ale istotniejszym był krąg wokół Koła Matematyczno-Fizycznego i Towarzystwa Kursów Naukowych [23], skupiony wokół Samuela Dicksteina, Gosiewskiego i Natansona, który był w posiadaniu dwóch czasopism, Wiadomości Matematycznych i Prac Matematyczno-Fizycznych, prowadząc regularne wydawnictwo książkowe. Po polsku można było czytać Kleina, Dedekinda i Helmholtza. Razem, obie te instytucje równoważyły brak polskiego Uniwersytetu.

Obcość obu Warszaw była wyraźna, ale duumwirat Dickstein – Sierpiński skutecznie spajał i zapobiegał konfliktom. Rolę łączącą pełniło Towarzystwo Naukowe Warszawskie.

Początki nie były dla Fundamenta łatwe. Pierwsze tomy zapełniali swoimi pracami Sierpiński i Mazurkiewicz i ich najbliżsi uczniowie. Te prace – głównie z teorii kontinuów – przyciągnęły do FM – począwszy od tomu 4 – matematyków ze Szkoły Moore'a z Teksasu. Na przełamanie izolacji [24] miały wpływ również prace nadsyłane z Moskwy przez matematyków kręgu Łuzina, wśród nich Aleksandrowa i Urysohna. W ten sposób również Moskwa zyskiwała ważny kontakt naukowy potrzebny jej w wewnętrznym współzawodnictwem z Leningradem datującym się od dawnych czasów petersburskich. Dopiero w połowie lat 30-ych izolacja została przełamana. Od jubileuszowego tomu 25 z roku 1935 Fundamenta stają się czasopismem prawdziwie międzynarodowym.

Bardziej skromne Prace Matematyczno-Fizyczne Dicksteina, nie były wszakże nigdy pozbawione uznania międzynarodowego. Tu publikowali Szegö, Gjunter, Maximoff i Menchoff. Byłoby ciekawym wiedzieć jakimi drogami szły ich powiązania z Polską. Ale również udział prac polskich był poważny. Nie omijali prac Matematyczno-Fizycznych Sierpiński i Mazurkiewicz. Publikowali tu Walfisz, Lubelski, Wudheiler i Gołąb. Jakby w odpowiedzi na sukces Fundamenta Mathematicae, ukazuje się w roku 1936 jubileuszowy (43) tom Prac poświęcony Leonowi Lichtensteinowi, z pracami Fejera, Szegö, Montela, Lekerkerkera, Schura, Ostrowskiego, Hurewicza, Pompeiu i wielu innych. Wysoka pozycja *drugiej Warszawy* znajduje wyraz w nadaniu w roku 1939 przez Prezydenta RP Orderu Orła Białego Samuelowi Dicksteinowi.

Codzienna obcość obu Warszaw była jednak faktem. Mimo że przyczyn tego podziału można by szukać w ówczesnej sytuacji politycznej i w podziałach światopoglądowych, nie wyłączając narodowościowych, to jednak decydująca była tu przynależność do określonej orientacji matematycznej. O utrzymanie jedności zabiegał Sierpiński utrzymując kontakt z nie zrywającymi z tradycją środowiskami matematycznymi Krajów Słowiańskich, traktując bardzo szeroko tę umowna nazwę. W roku 1934 doktoraty honorowe otrzymali w Warszawie Dmitri Pompeiu z Bukaresztu i Georgiu Tzitzeica z Jass.

Obok wspomnianych *dwu Warszaw* istniała jeszcze Warszawa skupiona wokół Politechniki Warszawskiej i związanych z nią Instytutów. W Instytucie Aerodynamiki pracował Witold Wolibner, który podobnie jak Stanisław Wigura, uzyskał tam doktorat u Czesława Wituszyńskiego. Jego praca o ruchu cieczy idealnej cytowana jest [25] jako chronologicznie druga po Eulerze fundamentalna praca z tego zakresu.

Inna praca Witolda Wolibnera [26] opisuje odwzorowania peanowskie, które w naturalny sposób towarzyszą osobliwościom funkcji analitycznych, a która uzupełniała się z pracą P. S. Urysohna z tych samych lat. Okazywało się, że odwzorowania ciągłe podwyższające wymiar nie są w matematyce wymuszone, mieszcząc się w samej jej naturze. Jest w tym pewna równoległość ze znaną nam już sytuacją z funkcjami Koepckego – Pompeiu i zbiorami spójnymi z punktem eksplodującym. Jest to jeszcze jeden przykład nie przenikania się w ówczesnej Warszawie metod czystej topologii mnogościowej i metod analitycznych. mimo że kontakt był na wyciągnięcie ręki. Aleksander Rajchman znany był z powiedzeń, że matematyka mnogościowa nie jest matematyką. Odwzajemniał się ripostami Bronisław Knaster.

Zygmunt Zalcwasser był matematykiem znanym z prac z teorii szeregów Fouriera publikowanych we lwowskich Studia Mathematica. W Warszawie wykładał na Wolnej Wszechnicy Polskiej powstałej w roku 1918 w miejsce dawnych Kursów Naukowych. Wykładał tam także Aleksander Rajchman, a przejściowo – przed wyjazdem do Tbilisi – Arnold Walfisz. Nie wiemy, gdzie pracował Samuel Lubelski, którego artykuły można znaleźć w Pracach Matematyczno-Fizycznych. Walfisz i Lubelski założyli w roku 1934 czasopismo Acta Arithmetica o charakterze międzynarodowym, które dopiero po II Wojnie weszło do systemu subwencjonowania państwowego. Układ powiązań – także ich braku – w międzywojennej matematyce warszawskiej wymagałby dokładnych krytycznych opracowań. Ta matematyka okazała się ważnym i uznanym ogniwem matematyki światowej.

[18] K. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1935, *Topologie II*, Warszawa-Wrocław 1950.

[19] W. Sierpiński, *Sur les images des fonctions representables analytiquement*, Fund. Math. 2 (1921), 179-188.

[20] Świadczyć może o tym wzmianka w mało znanej pracy W. Bogomołowej (1924) – prekursorskiej dla słynnego później lematu Urysohna, którego naturalne źródło – jak pokazuje ta praca – leży w teorii funkcji.

[21] Z. Zalcwasser, *O funkcjach Koepckego*, Prace Mat. Fiz. 35 (1927–28), 57-99.

[22] K. Borsuk, *O warszawskim ośrodku matematycznym.*

[23] Krystyna Wuczyńska w swoim odczycie na tej Szkole przedstawiła rozmiar dokonań Koła i Kursów równoważny działalności uniwersyteckiej (w tym tomie).

[24] Inny pogląd wyraża Małgorzata Przeniosło w artykule *„Fundamenta Mathematicae" – pierwsze polskie czasopismo matematyczne o wąskiej specjalizacji* (1920-1939), Nauka 2 (2006), 167-184.

[25] Dorobek matematyczny Witolda Wolibnera przedstawił na XVI Szkole Andrzej Krzywicki (*Algorytmy w dziejach matematyki*, materiały XVI Szkoły Historii Matematyki Turawa, 14-18 maja 2002 r. pod redakcją Katarzyny Hałkowskiej i Piotra Urbańca. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Opolskiego, Matematyka 31. Opole 2003), 109-115.
[26] Twierdzenie Wolibnera. Praca znana jedynie z maszynopisu przedstawionego Towarzystwu Naukowemu Warszawskiemu (1932).

Twierdzenie Wolibnera: Funkcja ciągła zmiennej zespolonej o wartościach zespolonych, analityczna poza zbiorem doskonałym punktokształtnym, nieprzedłużalna analitycznie na ten zbiór, przyjmuje na tym zbiorze wszystkie swoje wartości.

Przykład tego rodzaju funkcji podał P. S. Urysohn (Fund. Math. 14 (1925)). Do pracy Wolibnera nawiązał w roku 1967 Fritz Rothberger, wiedeńczyk – warszawianin z wyboru – który trudny dla siebie rok 1938 spędził u Sierpińskiego w Warszawie.

7. Osobliwe wiązki Cantora

Pewne inne spojrzenie na wiązkę Cantora, na której położony jest zbiór Knastera-Kuratowskiego, dało Andrzejowi Lelkowi (1961) [27] okazję do nowego ujęcia dawnej konstrukcji. Rozważmy kontinuum płaskie będące sumą odcinków wychodzących z punktów osi x–ów prostopadłych do osi x–ów, których drugie końce stanowią zbiór gęsty w tym kontinuum. Z gęstości zbioru końców wynika, że dla gęstego zbioru x–ów odcinki te redukują się do punktów, co znaczy, że ich długości $l(x)$ są wtedy równe 0. Z tego, ze suma odcinków stanowi kontinuum wynika, że funkcja $l(x)$ jest półciągła górnie. O nie wspomniane rzeczy implikują wspomniany wcześnie warunek Younga. Opis topologiczny daje sytuację znaną nam z wykresów pochodnych funkcji Kopckego-Pompeiu. Po identyfikacji osi x–ów do punktu, dostajemy kontinuum – nazywane miotełką Lelka – a w niej, jako podzbiór jej końców, zbiór spójny z punktem eksplodującym. Na każdym odcinku wiązki Cantora leży dokładnie jeden punkt miotełki Lelka. W ujęciu Lelka, trudnością jest konstrukcja. Ale wspomniane twierdzenie Maximoffa pozwala ją zredukować do konstrukcji znanych już Koepckemu i Pompeiu.

J. W. Charatonik (1989) [28] dowiódł, że miotełki Lelka są wszystkie ze sobą homeomorficzne. Wynika stąd, że zanurzone z nich zbiory końców są homeomorficzne (jest tak, bo końce, które były tu określone geometrycznie, mają opis topologiczny). Nie wynika stąd, że zbiory spójne z punktem eksplodującym były wszystkie homeomorficzne, bo ograniczyliśmy rozważania do zbiorów będących wykresami funkcji rzeczywistych, a więc wymiaru nie wyższego niż 1, przy tym funkcji dość specjalnych. W latach 40. Bronisław Knaster podał przykłady zbiorów spójnych z punktem eksplodującym dowolnych wymiarów [29].

Nie jest również takim zbiorem zbiór zbudowany przez F. B. Jonesa (1942) [30], powstały w podobnie opisany sposób z wykresu osobliwej funkcji addytywnej o wykresie gęstym i spójnym, który ma pochodzenie bernsteinowskie i nie jest borelowski.

Twierdzenie J. W. Charatonika i wspomniane w 5 twierdzenie Maximoffa wyglądają na bliskie sobie. W jednym i drugim pojawiają się funkcje I-ej klasy Baire'a o własności Darboux. Ale u J. W. Charatonika te funkcje są ograniczone, a homeomorfizm miotełki nie musi zachowywać porządku jej odcinków. Z kolei, twierdzenie Maximoffa pozostawia otwartym pytanie o wzajemnej homeomorficzności wykresów.

[27] A. Lelek, *On plane dendroids and their end points in the classical sense,* Fund. Math. 49 (1961), 301-319.
[28] J. W. Charatonik, *The Lelek fan is unique*, Houston. J. Math. 15 (1989), 27-34.
[29] B. Knaster, *O dwuswiaznych množestwach, jawlajuszczichsja kupiurami ewklidowych prostranstw proizwolno wysokoj razmiernosti*, Mat. Sbornik 19 (61) N. 1 (4) (1946), 9-18.
[30] F. B. Jones, *Connected and disconnected plane sets and the functional equation* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 115-120.

8. Topologia dynamiczna

Już w latach 70. zauważono, że stany graniczne iteracji nawet dość prostych homeomorfizów płaszczyzny przyjmują formy osobliwe znane wcześniej w teorii kontinuów. Po odkryciu pierwszych kontinuów nierozkładalnych przez Brouwera (1910) [30], najbardziej znanymi i stanowiącym poligon dla poszukiwań stanowiły kontinua nierozkładalne Knastera [32]. One to pojawiły się w pracach z topologii dynamicznej w postaci *podkowy Smale'a* [33], ale bardziej jeszcze niespodziewanym było pojawienie się, w pracach Devaneya i Krycha (1984, 1999) [34, 35], miotełek Knastera-Kuratowskiego jako osobliwości dynamicznych. Dokładniej, pojawiły się one w formie miotełek Lelka jako tzw. *zbiory Julia* związane z iteracjami funkcji wykładniczej e^z. W oderwaniu od tej konkretnej sytuacji poddali je badaniu Aarts i Oversteegen (1993) [36].

[31] L. E. J. Brouwer, *Zur Analysis Situs*, Math. Annalen 68 (1910), 422-434.
[32] B. Knaster – kontinua Knastera są opisane w *Topologie I* Kuratowskiego, wyd. z roku 1950, 143.
[33] Konstrukcję podkowy Smale'a można znaleźć w książce Z. Niteckiego, a także w książce W. Szlenka.
[34] R. L. Devaney, *Cantor bouquets, explosions, and Knaster continua: dynamics of complex exponentials*, Publications Mathematiques 43 (1999), 27-54.
[35] R. L. Devaney, M. Krych, *Dynamics of exp*(z), Ergodic Theory Dynamical Systems 4 (1984), 35-52.
[36] Jan M. Aarts, Lex G. Oversteegen, *The geometry of Julia set*, Trans. Amer. Math. Soc. 338 (1993), 897-918.

9. Zbiory dwuspójne

W zbiorze spójnym z punktem eksplodującym wszystkie podzbiory spójne wielopunktowe przechodzą przez ten osobliwy punkt, co znaczy, że każde dwa podzbiory spójne wielopunktowe przecinają się. Tę własność zbiorów spójnych Knaster i Kuratowski nazwali *dwuspójnością* i postawili pytanie, czy tę własność mają jedynie zbiory spójne z punktem eksplodującym. Problem okazał się niezwykle subtelnym szczególnie w zakresie zbiorów spójnych pochodzenia metrycznego. E. W. Millller (1937) [37] zbudował tego rodzaju zbiór przy pomocy hipotezy continuum. Tego rodzaju zbiorem jest wspomniany wcześniej zbiór M. E. Rudin. Pierwszy z nich jest szeroko spójny, drugi nie. Zarówno zbiory szeroko spójne Swingle'a jak i znane dotąd zbiory dwuspójme bez punktu eksplodującego budowane jako podzbiory kontinuów nierozkładalnych typu Knastera, które mają budowę lokalną taką jak wiązki Cantora. Nie wiadomo, czy jest to ich cecha konieczna.

Zbiory dwuspójne z punktem eksplodującym, mimo paradoksalności, należy uznać za zjawisko naturalne. Odkrywa je pewnik wyboru, który leży w naturze budowy punktowej zbioru liczb rzeczywistych. Czymś innym jest hipoteza continuum, która wiąże wspomniane struktury geometryczne ze skalą liczb porządkowych, w zasadniczy sposób obcą geometrii. Dlatego, trudno się spodziewać, by zbiory dwuspójne bez punktu eksplodującego, których jak się zdaje nie da się uzyskać bez hipotezy continuum, mogłyby się pojawić w naturalnych sytuacjach geometrycznych.

[37] E. W. Miller, *Concerning biconnected sets*, Fund. Math. 29 (1937), 123-133.