Title: Mosty królewieckie

Author: Jerzy Mioduszewski

Jerzy Mioduszewski (Katowice)

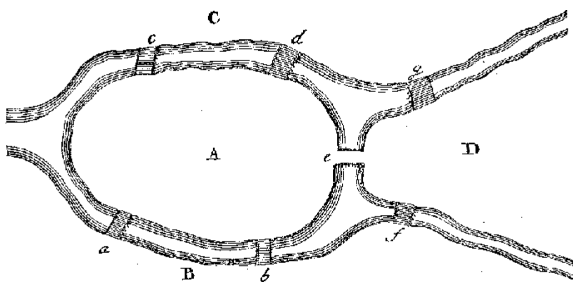
MOSTY KRÓLEWIECKIE[1]

Latem 1734 kapitulował Gdańsk oblegany przez niemal dwa lata przez wojska rosyjskie interweniujące w Polsce przeciwko królowi Stanisławowi Leszczyńskiemu. Jednym z warunków kapitulacji było [9] wysłanie do Petersburga uroczystej deputacji złożonej z najznakomitszych obywateli miasta, co nastąpiło w roku następnym. Wtedy to, według Kopielewicza [8], burmistrz miasta, Carl Leonhard Gottlieb Ehler, spotkał się z Eulerem, przekazując mu zadanie o mostach królewieckich. O burmistrzu Gdańska wspomina również Denes König [7], pisząc, że Ehler, sam miłośnik matematyki, słyszał o tym zadaniu od Heinricha Kühna, profesora gimnazjum akademickiego w Gdańsku. W marcu 1736 Euler pisał do Marinioniego w Wiedniu o rozwiązaniu zadania. Zamieszczony w tym liście szkic mostów jest tym, który wszyscy znamy (rys. 1). Pisał też o swoim rozwiązaniu do Ehlera, dodając, że nie widzi ani w problemie ani w swoim rozwiązaniu niczego, co mogłoby interesować profesjonalnego matematyka.

Ale, jeszcze w tym samym roku, Euler zakomunikował rozwiązanie Akademii, przedstawiając do publikacji artykuł [1], uważając zarówno problem jak i rozwiązanie za dostatecznie interesujące, co wynika już ze zdań obszernego wstępu, w którym nawiązał do idei Leibniza, geometrii opartej o zasady najbardziej ogólne, która nie potrzebuje niczego więcej niż opisu położenia i nie wymaga mierzenia i obliczeń, a która u Leibniza nosiła nazwę *geometria situs*.

Mimo że *zadanie o mostach królewieckich* jest wszystkim dobrze znane, to na ogół nie odpowiadamy właściwie na pytanie, na czym polega w nim rola hipotetycznej, nie istniejącej jeszcze za czasów Eulera matematycznie, owej geometrii situs. Celem tego artykułu jest skrótowe przedstawienie zasadniczej myśli Eulera, idące w kierunku tezy, że geometrią położenia u Eulera było to, co później było nazwane *topologią płaszczyzny*, istniejącą w czasach Eulera w stanie przed matematycznym.

1. Z a d a n i e K ü h n a . „W Królewcu, w Prusach, jest wyspa *A* zwana Kneiphoff …”, wychodzi z niej 5 mostów ku wyspom *B*, *C* i *D*, połączonych dalszymi mostami, których razem jest 7. Czy można przejść tymi mostami tak, by przez każdy przechodzić raz jeden?

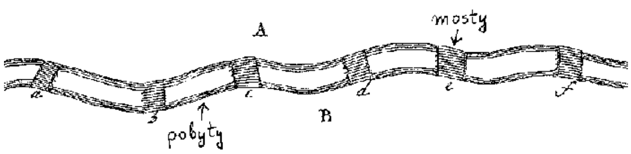


Rys. 1

[1] Na temat mostów królewieckich Autor mówił w czasie XIII Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki w Kołobrzegu, 1999, a treść odczytu była publikowana w czasopiśmie *Matematyka* 2 (2000), 67–79. Obecny artykuł stanowi uzupełnienie wspomnianego o pewne akcenty.

2. P i e r w s z e r o z w i ą z a n i e E u l e r a . Z wyspy *A* wychodzi 5 mostów. Zatem, w czasie zamierzonego spaceru będziemy mieli na niej co najmniej 3 pobyty. Pozostałe wyspy, *B*, *C* i *D*, mają po 3 mosty, stąd na każdej z nich mamy co najmniej 2 pobyty. W danym spacerze, tj. przy ustalonej kolejności mostów, pobyt jest zdeterminowany przez bezpośrednio po sobie przechodzone mosty, lub jeden most, jeśli jest to most pierwszy lub ostatni. Przedstawimy marszrutę w postaci ciągu kolejno przechodzonych mostów, co ilustruje rysunek 2.

Przerwom między mostami odpowiadają pobyty na wyspach. Pobytów jest 3 + 2 + 2 + 2 = 9. Mostów jest 7 i mogą one odpowiadać co najwyżej 8 pobytom. Zatem, przewidziany spacer jest niemożliwy.

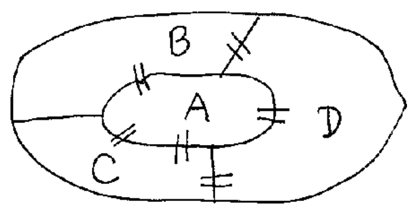


Rys. 2

Z tego oglądu widać, że za nadmiar pobytów odpowiadają wyspy o nieparzystej liczbie mostów, co można by w lapidarnym skrócie ująć tak, że spacer u n i k u r s a l n y się nie uda, jeśli wysp o nieparzystej liczbie mostów jest zbyt wiele.

Przedstawiliśmy „niedoskonałe" rozwiązanie znane z listu Eulera do Marinioniego. Rysunek w nim zamieszczony jest w istocie szkicem topograficznym, służącym Eulerowi do matematyzacji zadania w konwencji, którą nazwijmy (por. rys. 2) konwencją d o m i n o. Podany wyżej skrót dowodu Eulera, pokazuje dostatecznie wyraźnie, że ową geometria situs, która uzasadnia tę matematyzację jest topologia płaszczyzny.

3. M a t e m a t y z a c j a. Można pomyśleć, że wyspy są owalnymi obszarami położonymi na płaszczyźnie w sposób, który nazwijmy o g ó l n y m, przedstawionym na rysunku niżej (rys. 3), którego u Eulera nie było, ale który musiał być zapewne przez niego przemyślany. W naszym współczesnym rozumieniu, brzegi wysp są krzywymi zwykłymi zamkniętymi, takimi jak brzeg wyspy *A*, lub są topologicznie liniami prostymi, takimi jak brzegi pozostałych wysp *B*, *C* i *D*.



Rys. 3

W sytuacji ogólnej mamy N mostów. Dużymi literami łacińskimi X, Y, …, W, Z oznaczamy wyspy. Ustalmy marszrutę, której unikursalności na razie nie zakładamy. Niech XY będzie symbolem mostu jaki przechodzimy w tej marszrucie idąc z wyspy X na wyspę Y. Nie umniejszymy istoty zadania, jeśli przyjmiemy, że nie ma mostów nieistotnych, tj. mostów XX.

Odnotujmy, że

(I) po przejściu mostu XY, jeśli nie kończymy marszruty na wyspie Y, następnym mostem jest most YZ, tj. most wychodzący z tej samej wyspy, na którą weszliśmy.

Istotnie, będąc – po przejściu mostu XY, znajdując się na wyspie Y, nie możemy znaleźć się poza nią, zanim wcześniej nie znajdziemy się na jej brzegu: następnym mostem jest więc most wychodzący z Y.

Przez p o b y t na wyspie Y rozumiemy odcinek marszruty następujący po przekroczeniu mostu XY, jeśli Y jest wyspą końcową marszruty, lub odcinek marszruty przed wejściem na most YZ, jeśli Y jest wyspą początkową marszruty, lub przejściem przez wyspę Y między mostami XY i YZ: każda taka para mostów wykorzystana jest jako pobyt polegający na przejściu przez wyspę Y. Pobyt na wyspie Y jest tożsamy z parą mostów XY i YZ, chyba że jest to wyspa początkowa lub końcowa marszruty. Znaczy to, że

(II) jeden pobyt na wyspie wiąże ze sobą dwa mosty, jeśli nie jest to wyspa początkowa lub końcowa marszruty, kiedy jeden pobyt wiąże jeden most.

Wobec (I), marszruta dla obejścia wysp i mostów ma postać łańcucha domino, w którym następujące bezpośrednio po sobie mosty XY i YZ przedzielone są pobytem na wyspie Y (rys. 2).

Nawet wtedy, kiedy łańcuch zaczyna się i kończy pobytami początkowym i końcowym, liczba P pobytów pojawiających się w łańcuchu nie może, wobec (I), przekroczyć liczby N przebytych w marszrucie powiększonej o 1. Jest więc

(III) $P \leq N + 1$.

4. P o s z e r z e n i e z a d a n i a. Dalsze rozważania Eulera z [1] są wszakże ogólniejsze. Dotyczą nie marszruty, lecz samej sytuacji topograficznej wysp i mostów. Pojęcia pobytu się nie zmieni, jeśli pomyślimy daną wyspę w oderwaniu od marszruty, interesując się jedynie tym, co orzeka o pobytach na d a n e j wyspie warunek (II).

Niech y będzie liczbą mostów wyspy Y. Oznaczmy przez $P(Y)$ liczbę pobytów na wyspie Y. Z (II) wnioskujemy:

(A) Jeśli liczba z jest parzysta, to liczba pobytów $P(Z)$ na wyspie Z jest połową liczby z. Jest więc wtedy $P(Z) = \frac{z}{2}$.

(B) Jeśli liczba z jest nieparzysta, to liczba $P(Z)$ pobytów na wyspie Z jest powiększoną o 1 połową liczby z pomniejszonej o 1. Jest więc wtedy $P(Z) = \frac{z-1}{2} + 1$.
Istotnie, jeśli wyspa Z ma z mostów, to pobyt polegający na przejściu przez wyspę wiąże dwa mosty, redukując ich liczbę do liczby ich par, którą trzeba powiększyć o 1, jeśli liczba z mostów jest nieparzysta.
Stwierdzenia (A) i (B) pozwalają oszacować od dołu liczbę P, która, na mocy określenia, jest sumą wszystkich liczb $P(Y)$ pobytów na wyspach.

Niech A, B, …, D będą wyspami o parzystych a, b, …, d liczbach mostów. Liczba $P(A) + \ldots + P(D)$ pobytów na tych wyspach jest, wobec (A), nie mniejsza niż $\frac{a}{2} + \ldots + \frac{d}{2}$, tj. niż $(a + \ldots + d) / 2$.

Niech U, V, … , T będą wyspami o nieparzystych liczbach u, v, …, t mostów. Wobec oszacowania (B), liczba $P(U) + \ldots + P(T)$ pobytów na tych wyspach jest równa $(\frac{u-1}{1} + 1) + \ldots + (\frac{t-1}{2} + 1)$, tj. równa $\frac{u+\ldots+t}{2} + \frac{s}{2}$, gdzie s jest liczbą wysp U, V, …, T, tj. liczbą wysp o nieparzystej liczbie mostów.

Mamy zatem $P = P(A) + \ldots + P(T) = \frac{a+\ldots+t}{2} + \frac{s}{2}$. Ale, $a + \ldots + t = 2N$, bo każdy most liczony był dwa razy. Dostaliśmy więc

(IV) $P = N + \frac{s}{2}$.

Wynika stąd bezpośrednio, że liczba s wysp o nieparzystej liczbie mostów jest parzysta.

5. K o n k l u z j e. Równość (IV) i nierówność (III) dają przy s większym niż 2 sprzeczność, co znaczy, że marszruta unikursalna po mostach się nie uda, jeśli będzie więcej niż dwie wyspy o nieparzystej liczbie mostów.

Oba ostatnie wnioski prowadzą w rezultacie do konkluzji: wysp o nieparzystej liczbie mostów może być więc dwie lub wcale.

6. Z a d a n i e o p o w i t a n i a c h. Stwierdzenie o parzystej liczbie wysp o nieparzystej liczbie mostów można uzyskać nie odwołując się do zadania o marszrutach, nie korzystając nawet z pełnej informacji zawartej w (II).

Traktujmy mosty wychodzące z wyspy jako odwzajemnione powitania z innymi wyspami (niekoniecznie ze wszystkimi). Jeśli zsumować liczby powitań – mostów wychodzących z każdej wyspy z osobna, otrzymamy liczbę parzystą, bo każde powitanie jest liczone dwa razy. Liczba powitań między wyspami o parzystej liczbie mostów jest oczywiście parzysta. Powitań przypadających na resztę wysp jest więc znowu liczba parzysta. Ale są to wyspy o nieparzystej liczbie powitań. Musi być ich zatem liczba parzysta.

W [1] ta ostatnia uwaga, która logicznie rzecz biorąc, powinna poprzedzić rozważania o marszrutach, pojawia się na ich końcu i służy do wykluczenia liczby 1 jako liczby wysp o nieparzystej ilości mostów.

7. K o m e n t a r z e. Jest u Eulera rysunek przedstawiający wyobrażoną przez Eulera sieć mostów, po których da się przejść unikursalnie, umieszczony jakby dla upewnienia się o istnieniu rozwiązań pozytywnych. Z punktu widzenia logiki formalnej, to upewnienie się nie jest konieczne.

Znana wszystkim dobrze matematyzacja w konwencji teorii grafów jest u Eulera nieobecna. Ta matematyzacja nie jest zainteresowana argumentacją topologiczną opartą o własności (I) - (III), formułując zadanie o mostach od razu w terminach relacji symetrycznych, w anegdotycznej wersji zadania o powitaniach.

Euler ukrył przed czytelnikiem rozumowania motywacyjne, których konkluzje uważał za oczywiste. Ale to właśnie te poza matematyczne rozumowania, wymagające dużego skupienia uwagi, zyskały, jak się zdaje, w oczach Euler wartość samą w sobie. To one dawały powód nawiązania do ważnych w jego wyobrażeniu idei Leibniza.

Wyodrębnienia twierdzenia Jordana o rozcinaniu płaszczyzny jako osobnego twierdzenia, oraz leżącego u jego podstaw aksjomatu Pascha, dokonano dopiero w drugiej połowie XIX wieku, kiedy w kręgu bezpośrednich następców Gaussa zauważono, że te oczywiste własności płaszczyzny nie muszą przenosić się na inne powierzchnie. Gdyby wtedy czytano pracę Eulera w jej nie uproszczonej wersji, pewne twierdzenia topologii płaszczyzny nazwano by imieniem Eulera.

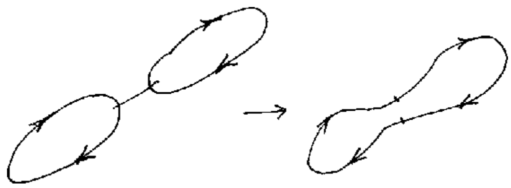
Nie ma zatem u Eulera znanego wszystkim rysunku grafu, który obecnie służy jako symbol mostów królewieckich. Jak twierdzą Brian Hopkins i Robin J. Wilson [6], pojawia się on w literaturze po raz pierwszy w książce Rouse Balla (1892).

8. T w i e r d z e n i e o d w r o t n e. Euler jedynie wypowiedział twierdzenie odwrotne. Wskazówka jaką podał jest niewystarczająca dla odtworzenia dowodu. Twierdzenia odwrotnego dowiódł C. Hierholzer [5], który przeprowadził dowód w konwencji grafów, nazywanymi wtedy za Listingiem s y s t e m a m i l i n i o w y m i. Dla odwrócenia twierdzenia potrzebne jest dodatkowe założenie o s p ó j n o ś c i grafu, tj. o istnieniu dróg łączących w grafie każdą parę wierzchołków, co tłumaczy się na język topologii płaszczyzny jako możliwość przejścia między każdymi dwoma wyspami. Praca była wydana pośmiertnie i zredagowana przez J. Lürotha. W nocie od wydawcy wspomina się Listinga (1847), jako prekursora.

Nie wspomina się Eulera. Nie ma o Eulerze wzmianki również u Listinga. Twierdzenie Hierholzera było twierdzeniem wewnętrznym powstającej wtedy teorii grafów. W szczególnym przypadku grafów, w których każde dwa wierzchołki mają bezpośrednie połączenie, dowód podał już Poinsot (1809).

Dowód wystarczy podać tylko w przypadku, kiedy wszystkie wierzchołki grafu są parzyste. Jeśli bowiem mamy graf z dwoma wierzchołkami nieparzystymi, to przez złączenie tych wierzchołków w jeden, dostajemy graf o samych wierzchołkach parzystych. Znajdując na nim trasę unikursalną, która zamyka się wtedy w cykl, rozłączamy złączone wcześniej wierzchołki, otrzymując drogę unikursalną po danym grafie.

D o w ó d H i e r h o l z e r a. Rozważamy graf o wierzchołkach parzystych. Z dowolnego wierzchołka prowadzimy drogę unikursalną tak długo jak się da, co znaczy (wobec parzystości wierzchołków), że do powrotu do punktu wyjścia. Jeśli obeszliśmy cały graf, zadanie jest zakończone. Jeśli nie, rozważamy graf złożony z odcinków, po których nie przechodziliśmy. Ten graf nie musi być spójny, ale ze spójności całego grafu wynika, że składowe wspomnianej pozostałości mają wierzchołki wspólne z częścią już przebytą. Bierzemy którąkolwiek z tych składowych i którykolwiek wierzchołek wspólny. W obrębie tej składowej (która ma znowu wszystkie wierzchołki parzyste) prowadzimy drogę unikursalną zaczynającą się i kończąca we wspomnianym wspólnym wierzchołku. Nietrudno spostrzec, jak obie drogi unikursalne połączyć w jedną.



Rys. 4

Otrzymaliśmy drogę unikursalną istotnie większą. Iterując opisane postępowanie, dostaniemy po skończonej liczbie kroków, drogę unikursalną po całości grafu.

9. O d o w o d z i e. Oczywista jest nieefektywność dowodu Hierholzera, która jest tego samego rodzaju, co w dowodzie Dedekinda utożsamiającego zbiory skończone w jego sensie z odcinkami początkowymi zbioru liczb naturalnych. Użyty jest pewnik wyboru w zakresie zbiorów skończonych. Miejscem tym jest wybór jednej ze składowych dopełnienia znalezionej już drogi i wspólnego dla niej i wybranej składowej wspólnego wierzchołka.

Spójność grafu pojawia się w dowodzie, kiedy korzystamy z istnienia wspólnego wierzchołka dla przebytej trasy i każdej ze składowych jej dopełnienia. Można w tym widzieć przypadek szczególny lematu Janiszewskiego *o dochodzeniu do brzegu*, znanego dobrze w teorii kontinuów.

10. P o E u l e r z e i H i e r h o l z e r z e. Mimo że dalsze prace związane z problemem mostów królewieckich były prowadzone w konwencji grafów, to Euler nie był zapomniany, na co liczne przykłady, także anegdotyczne można znaleźć w literaturze, por. [2] i [6].

Ograniczmy się do kilku ważniejszych przykładów zastosowań.

(a) Kostki d o m i n o układa się w łańcuch jedne za drugimi tak, by sąsiadujące połówki miały jednakowe symbole. W tradycyjnym domino jest 7 symboli 0, 1, …, 6 i 21 kostek uwzględniających wszystkie pary symboli z wyjątkiem par postaci (*a*, *a*). Można ułożyć łańcuch z pełnego kompletu kostek. Wynika to z twierdzenia Hierholzera (ale także i ze wspomnianego twierdzenia Poinsota), jeśli pomyśleć graf o siedmiu wierzchołkach 0, 1, …, 6, w którym każdy wierzchołek ma połączenie bezpośrednie z każdym, razem 6 połączeń, a kostkę domino jako drogę w grafie.

(b) Przez l a b i r y n t rozumiemy rozwidlający się korytarz, który możemy widzieć jak graf, jeśli a wierzchołki uznamy rozwidlenia korytarza i jego ślepe zakończenia, a za odcinki grafu uznaniu odcinki korytarza łączące bezpośrednio sąsiadujące ze sobą rozwidlenia i wspomniane wyżej ślepe zakończenia. Problem polega na przejściu całości labiryntu. Nie stracimy na ogólności, jeśli będziemy wymagać, by każdy odcinek labiryntu przechodzić dokładnie dwa razy. Ale wtedy jest to problem równoważny istnieniu marszruty eulerowskiej na grafie, który powstaje po zdublowaniu odcinków labiryntu. Tak określony graf ma wszystkie wierzchołki parzyste. Istniejąca na nim marszruta eulerowska (Hierholzer) wyznacza przejście labiryntem.

Dla wędrującego labiryntem samo i s t n i e n i e drogi nie daje odpowiedzi na pytanie: jak iść labiryntem? Potrzebny jest mu algorytm indukcyjny wskazujący mu następny krok wędrówki, nie wykorzystujący innych danych niż te, które aktualnie ma, tj. 1. dotychczasowy przebieg wędrówki i 2. opis sytuacji lokalnej na rozwidleniu, na którym wędrowiec się zatrzymał. Teoria grafów dysponuje odpowiednimi rozwiązaniami.

11. W jubileuszowym roku 1936 Denes König poświęcił mostom królewieckim obszerną monografię [7], zajmując się w niej między innymi drogami eulerowskimi w grafach nieskończonych. Nie ma trudności w znalezieniu obustronnie otwartej drogi eulerowskiej w grafie nieskończonym reprezentującym połączenia odcinkami jednostkowymi punktów kraty liczb całkowitych. Parzystość wierzchołków jest oczywistym warunkiem istnienia takiej drogi. Problem istnienia dróg eulerowskich w dowolnym grafie nieskończonym postawiony przez Königa został rozwiązany wkrótce (1936) przez Erdösa, Gruenwalda i Weinzfelda [3]. Grafy nieskończone z pełną drogą eulerowską charakteryzują się zgrubsza tym, ze nie rozpadają się na grafy nieskończone łączone ze sobą skończonymi kolekcjami odcinków, a jeśli się w ten sposób rozpadają, to na dwie części, a od połączeń wymagane jest spełnianie odpowiednich warunków parzystości.

12. Współczesna topologia widzi graf jako kontinuum, a drogę eulerowską jako parametryzację tego kontinuum odwzorowaniem $p = f(t)$, gdzie t przebiega odcinek liczb rzeczywistych. Oczywiście, kontinuum mające taką parametryzację musi być lokalnie spójne. Droga eulerowska jest parametryzacją grafu n i e p r z y w i e d l n ą w tym znaczeniu, że usunięcie z odcinka parametryzującego jakiegokolwiek (jakkolwiek nawet małego przedziału) nie daje w obrazie całości. Nie każde kontinuum lokalnie spójne daje się w ten sposób sparametryzować, a przykładami są grafy nie spełniające warunków koniecznych Eulera, a wśród kontinuów ogólniejszych przykładami są dendryty (drzewa), wystarczy by miały więcej niż dwa końce. Kwadrat płaski jest przykładem kontinuum, które jest obrazem nieprzywiedlnym odcinka, a wiele spośród znanych odwzorowań peanowskich ma własność nieprzywiedlności. Pewne warunki dostateczne dla istnienia parametryzacji nieprzywiedlnej podał Harrold [4]. Pełna charakteryzacja obrazów nieprzywiedlnych odcinka pozostaje dotąd problemem otwartym teorii kontinuów.

13. W z m i a n k a h i s t o r y c z n a . Wspomniany na wstępie gdański matematyk Heinrich Kühn, od roku 1735 członek zagraniczny Petersburskiej Akademii Nauk,

jeszcze raz pojawił się w życiu naukowym Eulera w późnych latach jego okresu berlińskiego [8], kiedy Euler sprzeciwiał się (nieskutecznie, z powodu opóźnienia) publikacji pracy Kühna w Commentariach Petersburskich. Pracę tę, na temat logarytmów z liczb ujemnych, Euler widział jako zbiór bezwartościowych spekulacji, mając za sobą już własną teorię wielowartościowej natury logarytmu.

Literatura

[1] Leonhard Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinensis*, *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* 8 (1736), 128–140.
[2] Norman L. Biggs, E. Keith Lloyd, Robin J. Wilson, *Graph Theory 1736–1936*, Clarendon Press – Oxford 1976.
[3] P. Erdös, T. Grunwald, E. Weinzfeld, *On Eulerian lines on infinite Graphs*, Mat. Fiz. Lapok 43 (1936), 129–140.
[4] O. G. Harrold, *A note on strongly irreducible images of an interval*, Duke Math. Journal 6 (1940), 750–752.
[5] C. Hierholzer, *Über die Möglichkeit einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu Umfahren*, Math. Annalen 6 (1873), 30–32.
[6] Brian Hopkins, Robin J. Wilson, *The truth about Königsberg*, Collete Math. Journal 35 (2004), 198–207: przedruk w tomie *The Genius of Euler*, William Dunham, Ed., MAA 2007.
[7] Denes König, *Theorie der endlicher und unendlicher Graphen*, Leipzig 1936.
[8] Ju. Ch. Kopielewicz, *Osnowanije Pietierburgskoj Akademii Nauk*, Izd. Nauka, Leningrad 1977.
[9] S. M. Sołowjew, *Istorija Rossiji s driewniejszich wriemien*, tom 20: tom X wydania z lat 1960.

Jerzy Mioduszewski
Uniwersytet Śląski
Instytut Matematyki
ul. Bankowa 14
40-007 Katowice
e-mail: miodusze@math.us.edu.pl