Title: Note sur un travail de H. Hornich

Author: Jan Chmielowski

Citation style: Chmielowski Jan. (1976). Note sur un travail de H. Hornich. "Demonstratio Mathematica" (Vol. 9, nr 2 (1976) s. 217-219), doi 10.1515/dema-1976-0207

DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. IX No 2 1976

Jan Chmielowski

NOTE SUR UN TRAVAIL DE H. HORNICH

1. Dans cette note nous allons étendre le résultat de H. Hornich [2] à la dimension infinie. Si E est un espace vectoriel topologique (e.v.t.) sur le corps K ($K = C$ ou R), on dénote par $P_H(E)$ l'ensemble des polynomes homogènes continus de E dans K et par $\mathcal{A}(U)$ l'espace des fonctions analytiques dans un ouvert $U \subset E$ à valeurs dans K *). D'abord nous allons rappeler ici deux définitions.

Définition 1. - Un ensemble $A \subset E$ sera dit localement en $0 \in E$ déterminant pour les fonctions analytiques, si pour tout voisinage connexe U de 0 et pour toute $f \in \mathcal{A}(U)$ on a l'implication suivante

$$f|_{A \cap U} = 0 \Longrightarrow f = 0.$$

Définition 2. - Un ensemble $A \subset E$ sera dit déterminant pour $P_H(E)$, si tout polynôme homogène continu, qui s'annule sur A, est identiquement nul.

2. Dans la suite nous allons supposer que E soit un e.v.t. sur K, normé, séparable. Pour une suite $\{x_i\} \subset E - \{0\}$ nous allons désigner par $A(\{x_i\})$ l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble $\left\{\frac{x_i}{\|x_i\|} : i \in N\right\}$.

Théorème. Soit A un sous-ensemble fermé de $\{x \in E : \|x\| = 1\}$. Une condition nécessaire et suffisante pour

*) En vertu de la Proposition 1 de [1] le résultat annoncé ici reste valable pour les fonctions analytiques et pour les polynomes homogènes continus à valeurs dans un quelconque e.v.t. localement convexe.

que A soit déterminant pour $P_H(E)$ est que toute suite $\{x_i\} \subset E-\{0\}$ convergente vers $0 \in E$ et telle que $A(\{x_i\}) = A$ soit localement en 0 déterminant pour les fonctions analytiques.

La necessité. Soit $\{x_i\} \subset E-\{0\}$ une suite convergente vers $0 \in E$ et telle que $A(\{x_i\}) = A$. Soit $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ une série de polynômes homogènes continus, normalement convergente dans la boule fermée $\{\|x\| \leqslant r\}$, r étant une constante positive. Si nous posons $M = \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leqslant r} |f_k(x)|$, alors $|f_k(x)| \leqslant \leqslant Mr^{-k}$ pour $\|x\| = 1$ et pour $k = 0,1,2,\ldots$. Sans diminuer la généralité on peut supposer que $\|x_i\| < r$ pour tout $i \in N$. Si $f(x_i) = 0$ pour $i \in N$, alors on a $f_0 = 0$, en vertu de la continuité de f. Supposons que $f_j = 0$ pour $j=1,\ldots,k-1$. Nous allons montrer que $f_k = 0$. Puisque pour toute sous-suite $\{x_{i_j}\}$ de $\{x_i\}$ on a $f_k(x_{i_j}) = \sum_{s=k+1}^{\infty} f_s(x_{i_j})$, alors en vertu des estimations de f_s on a

$$\left| f_k\left(\frac{x_{i_j}}{\|x_{i_j}\|}\right)\right| = \left| \sum_{s=k+1}^{\infty} f_s\left(\frac{x_{i_j}}{\|x_{i_j}\|}\right)\|x_{i_j}\|^{s-k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=k+1}^{\infty} Mr^{-s}\|x_{i_j}\|^{s-k} = Mr^{-k}\,\frac{\|x_{i_j}\|}{r - \|x_{i_j}\|}$$

pour tout i_j, et ceci implique que $f_k(a) = 0$ pour tout $a \in A$. Donc $f_k = 0$.

La suffisance. Supposons qu'il existe un polynôme homogène continu $g \neq 0$, et tel que $g|_A = 0$. Soit $\{b_i\} \subset A$ un ensemble dénombrable et dense dans A. Soit $\{x_i\}$ la suite suivante

$$b_1,\ \frac{1}{2}\,b_1,\ \frac{1}{2}\,b_2,\ldots,\ \frac{1}{k}\,b_1,\ldots,\ \frac{1}{k}\,b_k,\ \frac{1}{k+1}\,b_1,\ \ldots\ .$$

On a $\lim_{i \to \infty} x_i = 0$ et $A(\{x_i\}) = A$. Il est clair que $g(x_i)=0$ pour tout $i \in N$, quoique $g \neq 0$.

R e m a r q u e. On ne peut pas omettre l'hypothèse que E soit séparable, comme dans des e.v.t. non-séparables n'existe pas d'ensembles dénombrables déterminants pour les fonctions analytiques (v. [1]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. C h m i e l o w s k i: Ensembles déterminants pour les fonctions analytiques, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A.B. 279 (1974) 639-641.

[2] H. H o r n i c h: Der Identitätssatz für analytische Funktionen von mehreren Variablen, Monatsh. Math., 3 (1967) 214-217.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, SILESIAN UNIVERSITY, 40-007 KATOWICE

Received April 1^{st}, 1975.