Title: Uogólnione schematy i reguły wnioskowania w logice rozmytej

Author: Katarzyna Miś

Citation style: Miś Katarzyna. (2020). Uogólnione schematy i reguły wnioskowania w logice rozmytej. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

Uniwersytet Śląski w Katowicach

Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych

Instytut Matematyki

Uogólnione schematy i reguły wnioskowania w logice rozmytej

Praca doktorska

Autor:
Katarzyna Miś

Promotor:
dr hab. Michał Baczyński, prof. UŚ

Katowice, 2020

Spis treści

Wstęp

W matematyce pojęciem pierwotnym jest zbiór. Jest nim także relacja należenia elementu do zbioru. Ponadto, zazwyczaj możemy stwierdzić, czy dany element należy czy nie należy do pewnego zbioru $A \subseteq X$ oraz wówczas zdefiniować funkcję charakterystyczną takiego zbioru $\chi_A \colon X \to \{0, 1\}$ wzorem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

dla $x \in X$.

Niepewność jest natomiast pojęciem wydawać by się mogło leżącym na przeciwległym biegunie, dodatkowo bedącym daleko od precyzji naturalnie występującej w naukowym podejściu. Zacytujemy tu zdanie (zob. [27, str. 1]), które stawia niepewność w innym świetle:

> *According to the alternative (or modern) view, uncertainty is considered essential to science; it is not only an unavoidable plague, but it has, in face, a great utility.*

Modelowanie niepewności jest dzisiaj rzeczywiście bardzo użyteczne. Wykorzystuje się je m.in. w sterowaniu (np. pralkami, lodówkami, ale też metrem), w obrazowaniu medycznym, badaniach nad zrównoważonym zarządzaniem zasobami naturalnymi czy nad zmianami klimatu. Pojęcie niepewności w odniesieniu do zbiorów możemy widzieć we wspomnianej relacji należenia. Idea ta została rozpowszechniona wraz z pracą L. Zadeha, *Fuzzy Sets* [44] z 1965 roku. W artykule tym zostało wprowadzone pojęcie zbioru rozmytego, dla którego relacja należenia elementu do takiego zbioru B zawierała nieprecyzyjność - niepewność. Zatem taką zmodyfikowaną funkcję charakterystyczną przedstawilibyśmy jako funkcję $\chi_B \colon X \to [0, 1]$, gdzie $X \neq \emptyset$. W celu uniknięcia nieporozumień zbiór rozmyty definiujemy jako funkcję o wartościach w $[0, 1]$.

Definicja. Zbiorem rozmytym A nazywamy funkcję $A \colon X \to [0, 1]$, gdzie $X \neq \emptyset$.

W pracy tej pojęcie niepewności także stanowi swego rodzaju punkt wyjścia do dalszych rozważań. Niepewność ta pojawia się we wnioskowaniu przybliżonym (ang.

approximate reasoning) opartym na zbiorach rozmytych. Znajduje ono zastosowanie w takich dziedzinach nauki jak: teoria decyzji, analiza ryzyka, sterowanie rozmyte czy eksploracja danych. Na początku, zobaczmy, jak to wnioskowanie różni się od tego standardowego.

Przypomnijmy, że w logice klasycznej najczęściej wykorzystywaną regułą jest reguła *modus ponens*. Podkreślmy, że w rozprawie używamy w tym przypadku określenia schemat wnioskowania. Możemy więc ten schemat przedstawić następująco:

$$\frac{A \rightarrow B \ \wedge \ A}{\therefore \quad B}$$

Uogólnioną wersję tego schematu, gdzie pojawia się niepewność, możemy natomiast zapisać w poniższy sposób:

REGUŁA:	JEŻELI x jest A,	TO y jest B.
OBSERWACJA:	x jest A'.	
WNIOSEK:		y jest B'.

A, A', B, B' oznaczają pewne własności, które posiadają obiekty x, y. Zauważmy, że powyżej daną obserwacją jest x *jest* A', gdzie A' zazwyczaj nieznacznie różni się od A. Oczekiwalibyśmy więc wniosku: y *jest* B', gdzie B', w analogiczny sposób, nieznacznie różni się od B. Właśnie to podejście stanowi o znaczeniu pojęcia wnioskowania przybliżonego opartego na zbiorach rozmytych. Jeśli własności A, A', B będą reprezentowane przez zbiory rozmyte, czyli funkcje, to jesteśmy w stanie obliczyć wartości wyjściowej funkcji B', czyli podać jak własności B i B' różnią się od siebie.

Poniższa praca opiera się na analizie schematów wnioskowania, które pochodzą z logiki klasycznej, natomiast przez wykorzystanie zbiorów rozmytych okazują się użyteczne we wnioskowaniu przybliżonym. Schematy stanowiące podstawę naszych badań są następujące – sylogizm hipotetyczny, modus tolendo tollens, prawo redukcji do absurdu oraz wspomniany modus ponendo ponens (w dalszej części pracy będziemy posługiwać się skrótowymi nazwami zwyczajowymi):

(i) Sylogizm hipotetyczny

$$\frac{A \rightarrow B \ \wedge \ B \rightarrow C}{\therefore \quad A \rightarrow C}$$

(ii) Modus tollens

$$\frac{A \rightarrow B \ \wedge \ \neg B}{\therefore \quad \neg A}$$

(iii) Redukcja do absurdu

$$\frac{\neg A \rightarrow B \ \wedge \ \neg B}{\therefore \quad A}$$

gdzie A, B, C są dowolnymi zdaniami.

Celem pracy jest omówienie każdego z wymienionych schematów wnioskowania. Dokładniej, zajmiemy się analizą równań i nierówności funkcyjnych, które możemy dla nich uzyskać. Nierówności funkcyjne otrzymujemy dwuetapowo. Najpierw rozważając nierówności, które można zdefiniować w algebrze Boole'a dzięki działaniom kratowym, a następnie rozszerzając je na spójniki rozmyte. Takie spójniki wykorzystujemy kiedy chcemy mówić o działaniach na zbiorach rozmytych, gdyż uogólniają one i rozbudowują rolę negacji, alternatywy i koniunkcji, które to wykorzystujemy do definiowania dopełnienia, sumy i iloczynu zbiorów rozmytych. „Wnioskowanie” zaś interpretujemy jako porządek "$\leqslant$" przyjmując, że przesłanki nie mogą mieć większej wartości niż wniosek. W taki oto sposób dla schematu modus ponens otrzymujemy poniższą nierówność:

$$T(x, I(x, y)) \leqslant y, \quad x, y \in [0, 1], \tag{MP}$$

a dla pozostałych schematów nierówności są następujące:

$$T(I(x, z), I(z, y)) \leqslant I(x, y), \quad x, y, z \in [0, 1], \tag{HS}$$

$$T(N(y), I(x, y)) \leqslant N(x), \quad x, y \in [0, 1], \tag{MT}$$

$$T(N(y), I(N(x), y)) \leqslant x, \quad x, y \in [0, 1], \tag{RA}$$

gdzie T jest t-normą (lub innym uogólnieniem klasycznej koniunkcji), I jest implikacją rozmytą (lub innym uogólnieniem implikacji klasycznej), a N jest negacją rozmytą (lub innym uogólnieniem negacji klasycznej).

Naszym pierwszym celem jest scharakteryzowanie tych nierówności przy ustalonej jednej funkcji – najczęściej koniunkcji rozmytej, w tym t-normy. Ponadto zajmujemy się także równaniami funkcyjnymi, które są skorelowane z poszczególnymi schematami wnioskowania. Zostały one otrzymane z pewnych wzorców – zwyczajowo nazywanych regułami wnioskowania (jak przedstawimy później, samo pojęcie reguły będziemy odnosić do zdań typu JEŻELI - TO). Pierwszą i najważniejszą regułą wnioskowania jest reguła złożeniowa (ang. *Compositonal Rule of Inference* - CRI) podana przez Zadeha [45] w 1973 roku. Pojęcie to odnosi się do złożenia relacji rozmytej i zbioru rozmytego, co dla uogólnionego schematu modus ponens możemy zapisać jako:

$$B'(y) := \sup_{x \in X} T(A'(x), I(A(x), B(y))), \quad y \in Y.$$

Biorąc pod uwagę własność interpolacji, czyli krótko mówiąc spełniania przez powyższą regułę klasycznej wersji schematu modus ponens otrzymujemy równanie postaci

$$B(y) = \sup_{x \in X} T(A(x), I(A(x), B(y))), \quad y \in Y.$$

Następnie przechodząc z wartościami zbiorów rozmytych A, B na cały odcinek $[0, 1]$ otrzymujemy poniższe równanie funkcyjne

$$y = \sup_{x \in [0,1]} T(x, I(x, y)), \tag{CRI-GMP}$$

które powinno zachodzić dla wszystkich $y \in [0,1]$. CRI nie jest jedyną regułą, którą badamy w pracy. Drugą regułą jest tzw. iloczyn Bandlera-Kohouta (ang. *Bandler-Kohout Subproduct* - BKS, zob. [10]), który opiera się na innym złożeniu relacji rozmytych. W tym przypadku mamy następujący wzór wyznaczający wynik:

$$B'(y) := \inf_{x \in X} I(A'(x), T(A(x), B(y))),$$

który także powinien zachodzić dla wszystkich $y \in Y$. Podobnie jak wcześniej, zakładając spełnianie schematu modus ponens, otrzymujemy poniższe równanie funkcyjne:

$$y = \inf_{x \in [0,1]} I(x, T(x, y)), \quad y \in [0,1]. \tag{BK-GMP}$$

Poniżej przedstawiamy inne równania, które są badane w pracy i które związane są z powyższymi dwoma regułami oraz pozostałymi schematami wnioskowania:

$$I(x,y) = \sup_{z \in [0,1]} \left(T(I(x,z), I(z,y)) \right), \quad x, y \in [0,1], \tag{CRI-GHS}$$

$$I_2(x,y) = \inf_{z \in [0,1]} I_1(T(x,z), T(z,y)), \quad x, y \in [0,1], \tag{BK-GHS}$$

$$N(x) = \sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(x,y)), \quad x \in [0,1], \tag{CRI-GMT}$$

$$N(x) = \inf_{y \in [0,1]} I(N(y), T(x,y)), \quad x \in [0,1], \tag{BK-GMT}$$

$$x = \sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(N(x), y)), \quad x \in [0,1], \tag{CRI-GRA}$$

$$x = \inf_{y \in [0,1]} I(N(y), T(N(x), y)), \quad x \in [0,1]. \tag{BK-GRA}$$

Dotychczas badania były prowadzone głównie dla uogólnionego schematu modus ponens (zob. [37]), uogólnionego sylogizmu hipotetycznego (pierwsze badania pod koniec ubiegłego wieku, zob. [27]) oraz nierówności (HS), (MP), (MT), (RA) (zob. [38]).

Układ rozprawy jest następujący. Po przedstawieniu najważniejszych pojęć z teorii zbiorów rozmytych (Rozdział 1), omawiamy główne założenia wnioskowania przybliżonego (Rozdział 2). W głównej części rozprawy rozważamy wspomniane powyżej równania i nierówności funkcyjne przy ustalonej jednej funkcji – najczęściej t-normy T (lub semikopuły, czy innego uogólnienia klasycznej koniunkcji). Prezentujemy zatem rozwiązania dla wybranych rodzin implikacji rozmytych (R-implikacji, (S,N)-implikacji, implikacji Yagera czy implikacji probabilistycznych). Rozdział 3 został poświęcony sylogizmowi hipotetycznemu, a dokładniej rozwiązaniom (CRI-GHS), (BK-GHS) oraz (HS), a także wybranym algebraicznym własnościom złożenia $\sup -T$. Rozdział 4 zawiera wyniki dotyczące rozwiązań (CRI-GMP), (BK-GMP) oraz (MP). W Rozdziale 5 znalazły się analogiczne fakty dotyczące (CRI-GMT), (BK-GMT) oraz (MT). W Rozdziale 6 opisane zostały rozwiązania (CRI-GRA), (BK-GRA) oraz (RA). W Rozdziale 7 przedstawiamy krótko uwagi dotyczące możliwych innych równań funkcyjnych uzyskanych przy różnych kombinacjach reguł wnioskowania i relacji rozmytych. Ostatni Rozdział 8 został poświęcony innej metodzie wnioskowania – wnioskowaniu opartemu na podobieństwie. Podane też zostały pewne uwagi dotyczące dwóch głównych strategii wnioskowania: FITA (ang. *First Infer Then Aggregate*) i FATI (ang. *First Aggregate Then Infer*).

Wybrane wyniki dotyczące równania (CRI-GHS) związanego ze schematem sylogizmu hipotetycznego (np. Twierdzenia 3.17, 3.18) uogólniają pewne fakty uzyskane przez hinduskiego matematyka N. R. Vemuriego [41].

Część z rezultatów przedstawionych w poniższej rozprawie została już opublikowana w recenzowanych artykułach konferencyjnych powstałych we współpracy z M. Baczyńskim i P. Helbinem [24, 29] oraz opracowanych wspólnie z M. Baczyńskim [6, 28].

ROZDZIAŁ 1

Wprowadzenie

1.1 Struktury kratowe

W tym rozdziale podamy najważniejsze informacje dotyczące własności krat oraz algebr Boole'a, o których wspomnimy też później.

Definicja 1.1 ([11, 13]). Kratą nazywamy zbiór częściowo uporządkowany $(L, \leqslant)$, w którym dla dowolnych dwóch elementów istnieje kres górny oraz kres dolny tj.

$$\sup\{a, b\} = a \vee b, \quad \inf\{a, b\} = a \wedge b, \quad a, b \in L.$$

Wtedy $\vee$ oraz $\wedge$ nazywamy działaniami kratowymi.
Najmniejszy element w zbiorze częściowo uporządkowanym oznaczać będziemy przez $\mathbf{0}$, a największy przez $\mathbf{1}$ (o ile oba te elementy istnieją).

Twierdzenie 1.2 ([11, Lemma 1, I §5]). *W zbiorze częściowo uporządkowanym $(P, \leqslant)$ operacje $\wedge$ i $\vee$ spełniają następujące własności:*

$$x \wedge x = x, \qquad x \vee x = x, \tag{L1}$$

$$x \wedge y = y \wedge x, \qquad x \vee y = y \vee x, \tag{L2}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \qquad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \tag{L3}$$

$$x \wedge (x \vee y) = x, \qquad x \vee (x \wedge y) = x, \tag{L4}$$

dla $x, y, z \in P$.
Ponadto, relacja częściowego porządku $x \leqslant y$, $x, y \in P$ jest równoważna każdemu z warunków

$$x \wedge y = x \quad \text{oraz} \quad x \vee y = y. \tag{1.1}$$

Podamy teraz kilka najważniejszych własności krat.

Definicja 1.3 ([11])**.** Kratę $(L, \leqslant)$ nazywamy zupełną, jeżeli jej dowolny podzbiór posiada kres górny i dolny w L.
Ponadto, przyjmujemy, że w kracie zupełnej kres dolny zbioru pustego wynosi $\mathbf{1}$, a kres górny $\mathbf{0}$.

Definicja 1.4 ([11])**.** Kratę $(L, \leqslant)$ nazywamy rozdzielną (dystrybutywną), jeżeli spełniony jest jeden z poniższych warunków:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \tag{L5}$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \tag{L5'}$$

dla $x, y, z \in L$.

Ponadto, w każdej kracie warunki (L5) oraz (L5') są sobie równoważne. Zatem w kracie rozdzielnej spełnione są obie te własności.

Definicja 1.5 ([13])**.** Kratę zupełną $(L, \leqslant)$ nazywamy zupełnie rozdzielną (dystrybutywną), gdy dla dowolnych zbiorów $S, T_s \neq \emptyset$ oraz dla dowolnych $a_{s,t} \in L$ dla $t \in T_s, s \in S$ spełnione są warunki:

$$\bigvee_{s\in S}(\bigwedge_{t\in T_s} a_{s,t}) = \bigwedge_{h\in H}(\bigvee_{s\in S} a_{s,h_s}) \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{s\in S}(\bigvee_{t\in T_s} a_{s,t}) = \bigvee_{h\in H}(\bigwedge_{s\in S} a_{s,h_s}), \tag{1.2}$$

gdzie $H = \prod_{s\in S} T_s$.

Definicja 1.6 ([11])**.** Kratę $(L, \leqslant)$ z $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ nazywamy komplementarną, jeżeli dla każdego $x \in L$ istnieje taki $x' \in L$, że

$$x \wedge x' = \mathbf{0} \qquad\qquad x \vee x' = \mathbf{1}. \tag{L6}$$

Element x' nazywamy dopełnieniem boolowskim x.

Definicja 1.7 ([11])**.** Rozdzielną i komplementarną kratę $(L, \leqslant)$ nazywamy kratą Boole'a.

Twierdzenie 1.8 ([11, Theorem 16, I §10])**.** *W dowolnej kracie Boole'a $(L, \leqslant)$ dopełnienie boolowskie jest jedyne. Ponadto, spełnione są własności:*

$$(x')' = x \tag{L7}$$

$$(x \wedge y)' = x' \vee y' \quad \textit{oraz} \quad (x \vee y)' = x' \wedge y' \tag{L8}$$

dla $x, y \in L$.

Zauważmy, że z własności (L3) i (L6) można otrzymać następujące fakty:

$$x \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad x \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}. \tag{L9}$$

Definicja 1.9 ([11])**.** Algebrę $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ')$ nazywamy algebrą Boole'a, jeżeli operacje $\wedge, \vee, '$ spełniają warunki (L1)-(L9).

Definicja 1.10. Niech $(L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ')$ będzie zupełną algebrą Boole'a. Wówczas implikację $x \to y$ definujemy jako

$$x \to_1 y = x' \vee y \tag{1.3}$$

lub

$$x \to_2 y = \max\{t \in L \colon x \wedge t \leqslant y\}, \tag{1.4}$$

(zob. [11, II §10, str. 45]).

Stwierdzenie 1.11. *Wzory* (1.3) *oraz* (1.4) *są równoważne w zupełnej algebrze Boole'a.*

Dowód. Ustalmy dowolne $x, y \in L$. Oznaczmy przez $t^* = \max\{t : x \wedge t \leqslant y\} = x \to_2 y$. Wówczas

$$\begin{aligned} t^* \vee (x' \vee y) &= (t^* \vee x') \vee y = y \vee (t^* \vee x') \\ &= y \vee ((t^* \vee x') \wedge (x \vee x')) = y \vee ((t^* \wedge x) \vee x') \\ &= (y \vee (t^* \wedge x)) \vee x' = y \vee x' \\ &\Leftrightarrow t^* \leqslant x' \vee y. \end{aligned}$$

Zatem $x \to_2 y \leqslant x \to_1 y$.
Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} ((x' \vee y) \wedge x) \vee y &= ((x' \vee y) \vee y) \wedge (x \vee y) = (x' \vee y) \wedge (x \vee y) \\ &= (x' \wedge x) \vee y = \mathbf{0} \vee y = y, \end{aligned}$$

co oznacza, iż $(x' \vee y) \wedge x \leqslant y$, więc $x \to_1 y = x' \vee y \leqslant t^* = x \to_2 y$. □

W dalszej części pracy będziemy też korzystać z poniższej definicji.

Definicja 1.12 ([11, 26])**.** Niech $(L, \leqslant)$ będzie kratą, a $(L, *)$ półgrupą z elementem neutralnym.

(i) $(L, *, \leqslant)$ nazywamy kratowo uporządkowanym monoidem (l-monoidem), jeżeli dla wszystkich $x, y, z \in L$ mamy

$$\begin{aligned} x * (y \vee z) &= (x * y) \vee (x * z), \\ (x \vee y) * z &= (x * z) \vee (y * z). \end{aligned}$$

(ii) l-monoid nazywamy przemiennym, jeżeli półgrupa $(L, *)$ jest przemienna.

(iii) Przemienny l-monoid $(L, *, \leqslant)$ nazywamy przemiennym rezydualnym l-monoidem, jeżeli istnieje taki operator $\to_* \colon L^2 \to L$ ($*$ - rezyduum), że dla wszystkich $x, y, z \in L$

$$x * y \leqslant z \Leftrightarrow x \leqslant y \to_* z. \tag{1.5}$$

1.2 Spójniki w logice rozmytej

Tak jak wspomnieliśmy we Wstępie, podstawową funkcją spójników rozmytych jest umożliwienie wykonywania działań na zbiorach rozmytych. Pierwsze określenia takich działań pojawiły się w 1965 roku u Zadeha [44] w poniższej formie.

Definicja 1.13. Niech A, B będą zbiorami rozmytymi określonymi na przestrzeni $X \neq \emptyset$.

(i) Dopełnieniem zbioru rozmytego A nazywamy funkcję określoną jako

$$A^c(x) = 1 - A(x), \quad x \in X.$$

(ii) Sumą zbiorów rozmytych A i B nazywamy funkcję określoną jako

$$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}, \quad x \in X.$$

(iii) Przekrojem zbiorów rozmytych A i B nazywamy funkcję określoną jako

$$(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}, \quad x \in X.$$

Definicje tych działań można uogólnić, co przedstawimy w kolejnym podrozdziale. Rozpocznijmy zatem od wprowadzenia potrzebnych do tego pojęć. Mają one oczywiście dużo szersze zastosowanie w całej pracy.

Na początku, przyjmijmy kilka istotnych oznaczeń. Symbolem Φ będziemy oznaczać rodzinę wszystkich takich rosnących bijekcji φ, że $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$. Ponadto będziemy mówić, że funkcje $F, G\colon [0,1]^n \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, są Φ-sprzężone, jeżeli istnieje takie $\varphi \in \Phi$, że $F = G_\varphi$, tzn.

$$F(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1}(G(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))), \quad x_1, \dots, x_n \in [0,1].$$

Będziemy także używać następującej notacji - $a_F^{[n]}$ dla $a \in [0,1]$ oraz $n \in \mathbb{N}$, gdzie $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ jest funkcją łączną z elementem neutralnym $e \in [0,1]$ oraz

$$a_F^{[n]} = \begin{cases} e, & n = 0, \\ a, & n = 1, \\ F(a, a_F^{[n-1]}), & n > 1. \end{cases}$$

Przejdźmy teraz do omówienia najważniejszych funkcji używanych w teorii zbiorów rozmytych.

Definicja 1.14 ([21])**.** Funkcję $A\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy funkcją agregującą, jeżeli spełnione są następujące warunki:

(i) A jest rosnąca ze względu na każdą ze zmiennych,

(ii) $A(0,0) = 0$ oraz $A(1,1) = 1$.

Definicja 1.15 ([17])**.** Funkcję $C\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy koniunkcją rozmytą, jeżeli spełnione są następujące warunki:

(i) C jest rosnąca ze względu na każdą zmienną,

(ii) $C(0,0) = C(0,1) = C(1,0) = 0 \quad \text{oraz} \quad C(1,1) = 1$.

Zazwyczaj o takiej funkcji C mówimy, że jest *rozszerzeniem* koniunkcji klasycznej.

Kolejnym ważnym spójnikiem jest semikopuła.

Definicja 1.16 ([16])**.** Funkcję $C\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy semikopułą, jeżeli spełnione są następujące warunki:

(i) $C(x,1) = C(1,x) = x, \quad x \in [0,1]$,

(ii) C jest rosnąca ze względu na każdą zmienną.

Jedną z najważniejszych funkcji, która bardzo często pojawia się w różnych gałęziach logiki rozmytej i jej zastosowaniach jest norma trójkątna.

Definicja 1.17 ([18, 26])**.** Funkcję $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy normą trójkątną (w skrócie t-normą), jeżeli, dla $x, y, z \in [0,1]$, spełnione są następujące warunki:

$$T(x,y) = T(y,x), \tag{T1}$$

$$T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z), \tag{T2}$$

$$T(x,y) \leqslant T(x,z) \text{ dla } y \leqslant z, \text{ tzn. } T(x,\cdot) \text{ jest rosnąca}, \tag{T3}$$

$$T(x,1) = x. \tag{T4}$$

Pojęcie to po raz pierwszy pojawiło się w pracy *Statistical metrics* Karla Mengera [31] w roku 1942 właśnie w kontekście statystycznych przestrzeni metrycznych przy uogólnieniu warunku trójkąta. Początkowo założenia dotyczące tej funkcji były słabsze. Definicja taka jak powyższa została wprowadzona w 1960 roku przez Schweizera i Sklara [35]. Później też przestrzenie, o których pisał Menger zaczęto rozważać jako probabilistyczne przestrzenie metryczne. T-normy zostały zaadaptowane w teorii zbiorów rozmytych pod koniec lat 60. ubiegłego wieku.

Przykład 1.18. Przedstawiamy najważniejsze przykłady t-norm.

(i) t-norma drastyczna

$$T_{\mathbf{D}}(x,y) = \begin{cases} 0, & x, y \in [0,1), \\ \min\{x,y\}, & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases} \tag{1.6}$$

(ii) t-norma produktowa

$$T_{\mathbf{P}}(x, y) = x \cdot y, \tag{1.7}$$

(iii) t-norma minimum

$$T_{\mathbf{M}}(x, y) = \min\{x, y\}, \tag{1.8}$$

(iv) t-norma nilpotentne minimum

$$T_{\mathbf{nM}}(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \leqslant 1 \\ \min\{x, y\}, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \tag{1.9}$$

(v) t-norma Łukasiewicza

$$T_{\mathbf{LK}}(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}, \tag{1.10}$$

dla $x, y \in [0, 1]$.

Najmniejszą t-normą jest t-norma drastyczna, a największą minimum. Ponadto, dla powyższych przykładów zachodzi następująca relacja:

$$T_{\mathbf{D}} < T_{\mathbf{LK}} < T_{\mathbf{P}} < T_{\mathbf{M}}.$$

Natomiast, co łatwo zauważyć, $T_{\mathbf{nM}}$ nie jest porównywalna z $T_{\mathbf{P}}$ ani $T_{\mathbf{LK}}$.

Uwaga 1.19. Zauważmy, że semikopuła (Definicja 1.16) stanowi uogólnienie innych ważnych klas funkcji. Mianowicie, semikopułę C, która dla takich $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$, że $x_1 \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y_2$ spełnia warunek

$$C(x_1, y_1) + C(x_2, y_2) - C(x_1, y_2) - C(x_2, y_1) \geqslant 0$$

nazywamy kopułą. Jeśli zaś ta semikopuła spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1, tzn.

$$|C(x_1, y_1) - C(x_2, y_2)| \leqslant |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1],$$

to jest quasi-kopułą. W końcu, gdy semikopuła spełnia warunek (T1) i (T2), to jest t-normą [16].

Teraz bliżej zajmiemy się właśnie tą ostatnią klasą funkcji.

Definicja 1.20 ([26, Definition 2.1])**.** Niech T będzie t-normą.

(i) Liczbę $a \in [0, 1]$ nazywamy elementem idempotentnym T, jeżeli $T(a, a) = a$.

(ii) Liczbę $a \in (0, 1)$ nazywamy elementem nilpotentnym T, jeżeli istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $a_T^{[n]} = 0$.

(iii) Liczbę $a \in (0,1)$ nazywamy dzielnikiem zera, jeżeli istnieje takie $b \in (0,1)$, że $T(a,b) = 0$.

Definicja 1.21 ([26, Definition 2.9]). Niech T będzie t-normą. Mówimy, że T jest:

(i) ściśle monotoniczna, jeżeli $T(x,y) < T(x,z)$, gdy $x > 0$ oraz $y < z$.

(ii) archimedesowa, jeżeli, dla wszystkich $x, y \in (0,1)^2$ istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $x_T^{[n]} < y$.

Wsród wielu rodzin t-norm, możemy wyróżnić dwie następujące.

Definicja 1.22 ([26, Definition 2.13]). Niech T będzie t-normą.

(i) T nazywamy ścisłą, jeżeli jest ciągła i ściśle monotoniczna.

(ii) T nazywamy nilpotentną, jeżeli jest ciągła, a każdy $x \in (0,1)$ jest jej elementem nilpotentnym.

Idąc dalej do t-norm archimedesowych i ciągłych, mogą być one scharakteryzowane w poniższy sposób.

Twierdzenie 1.23 ([26, Theorem 5.1]). *Dla funkcji $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) T jest t-normą ciągłą i archimedesową.

(ii) T posiada ciągły generator addytywny tzn. istnieje taka ciągła, ściśle malejąca funkcja $f\colon [0,1] \to [0,\infty]$, że $f(1) = 0$ oraz

$$T(x,y) = f^{-1}\left(\min\{f(x) + f(y), f(0)\}\right), \quad x, y \in [0,1]. \tag{1.11}$$

Ponadto, ta reprezentacja jest wyznaczona jednoznacznie co do dodatniej stałej multiplikatywnej.

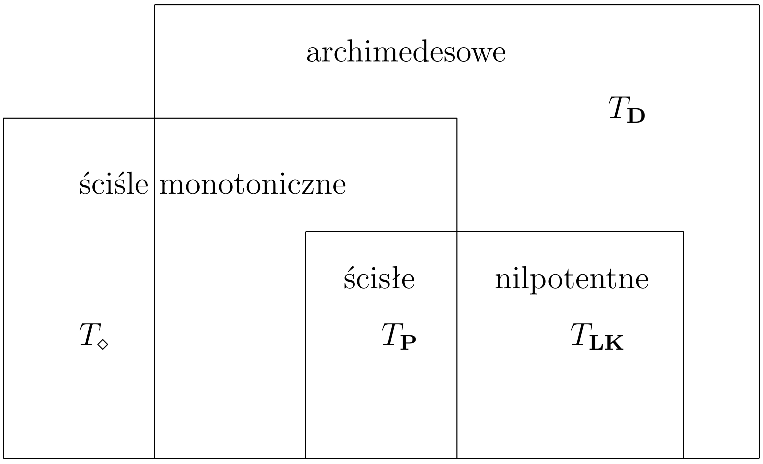
Dzięki generatorowi, można określić dwie klasy wśród t-norm ciągłych i archimedesowych.

Uwaga 1.24 ([26, Corollary 3.30]). Niech $f\colon [0,1] \to [0,\infty]$ będzie generatorem addytywnym t-normy T. Wówczas:

(i) T jest ścisła $\Leftrightarrow f(0) = \infty$.

(ii) T jest nilpotentna $\Leftrightarrow f(0) < \infty$.

Dla wymienionych klas t-norm możemy przedstawić następujący diagram:



gdzie

$$T_{\diamond}(x,y) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{x_n+y_n-n}}, & (x,y) \in (0,1]^2, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Przy czym zaznaczmy, że x_n, y_n są wyrazami takich ściśle rosnących ciągów $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że x, y mają następującą reprezentację diadyczną (zob. [26, Example 2.17]):

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{x_n}}, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{y_n}}.$$

Wracając do wspomnianych klas t-norm ciągłych i archimedesowych możemy podać dla nich następującą charakteryzację.

Twierdzenie 1.25 ([26, Proposition 5.9])**.** *Dla funkcji $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) T jest t-normą ścisłą.

(ii) T jest Φ-sprzężona z t-normą produktową tzn. istnieje takie $\varphi \in \Phi$, że

$$T(x,y) = (T_{\mathbf{P}})_{\varphi} = \varphi^{-1}(\varphi(x) \cdot \varphi(y)), \quad x, y \in [0,1].$$

Twierdzenie 1.26 ([26, Proposition 5.10])**.** *Dla funkcji $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) T jest t-normą nilpotentną.

(ii) T jest Φ-sprzężona z t-normą Łukasiewicza tzn. istnieje takie $\varphi \in \Phi$, że

$$T(x,y) = (T_{\mathbf{LK}})_{\varphi} = \varphi^{-1}(\max\{\varphi(x) + \varphi(y) - 1, 0\}), \quad x, y \in [0,1].$$

Możemy teraz podać przydatną charakteryzację t-norm ciągłych.

Twierdzenie 1.27 ([26, Theorem 5.11])**.** *Dla funkcji $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *T jest t-normą ciągłą.*

(ii) *T jest jednoznacznie przedstawiona w postaci sumy porządkowej t-norm ciągłych, archimedesowych, tzn. istnieje zbiór przeliczalny A (skończony lub nie) oraz rodzina takich rozłącznych przedziałów $\{(a_\alpha, e_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, że $(a_\alpha, e_\alpha) \subseteq [0,1]$ oraz taka rodzina t-norm ciągłych archimedesowych $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$, że*

$$T(x,y) = \begin{cases} a_\alpha + (e_\alpha - a_\alpha)\cdot T_\alpha\left(\frac{x-a_\alpha}{e_\alpha-a_\alpha}, \frac{y-a_\alpha}{e_\alpha-a_\alpha}\right), & x,y \in [a_\alpha, e_\alpha], \\ \min\{x,y\}, & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{1.12}$$

Wtedy taką t-normę będziemy zapisywać jako $T = (< a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha >_{\alpha\in A})$.

Przykład 1.28. Niech $|A| = 2, T_1 = T_{\mathbf{LK}}$ oraz $T_2 = T_{\mathbf{P}}$. Wówczas funkcja T określona wzorem

$$T(x,y) = \begin{cases} 0.2 + 0.3T_{\mathbf{LK}}\left(\frac{x-0.2}{0.3}, \frac{y-0.2}{0.3}\right), & x,y \in [0.2, 0.5], \\ 0.5 + 0.5T_{\mathbf{P}}\left(\frac{x-0.5}{0.5}, \frac{y-0.5}{0.5}\right), & x,y \in [0.5, 1], \\ \min\{x,y\}, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0.2 + 0.3\max\{0, \frac{10}{3}(x+y-0.4) - 1\}, & x,y \in [0.2, 0.5], \\ 0.5 + 2(x-0.5)(y-0.5), & x,y \in [0.5, 1], \\ \min\{x,y\}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

jest t-normą ciągłą.

Przejdźmy teraz do omawiania kolejnych istotnych spójników logicznych.

Definicja 1.29 ([26])**.** Funkcję $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy konormą trójkątną (w skrócie t-konormą), jeżeli, dla $x, y, z \in [0,1]$, spełnione są następujące warunki:

$$S(x,y) = S(y,x), \tag{S1}$$
$$S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z), \tag{S2}$$
$$S(x,y) \leqslant S(x,z) \text{ dla } y \leqslant z, \text{ tzn. } S(x,\cdot) \text{ jest rosnąca,} \tag{S3}$$
$$S(x,0) = x. \tag{S4}$$

Przykład 1.30. Poniżej przedstawiamy najważniejsze przykłady t-konorm.

(i) t-konorma maksimum
$$S_{\mathbf{M}}(x,y) = \max\{x,y\}, \tag{1.13}$$

(ii) t-konorma probabilistyczna
$$S_{\mathbf{P}}(x,y) = x + y - xy, \tag{1.14}$$

(iii) t-konorma Łukasiewicza

$$S_{\mathbf{LK}}(x, y) = \min\{1, x + y\}, \tag{1.15}$$

(iv) t-konorma drastyczna

$$S_{\mathbf{D}}(x, y) = \begin{cases} 1, & x, y \in (0, 1] \\ \max\{x, y\}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{1.16}$$

Pomiędzy powyższymi t-konormami zachodzi następująca relacja porządku:

$$S_{\mathbf{M}} < S_{\mathbf{P}} < S_{\mathbf{LK}} < S_{\mathbf{D}}.$$

Przejdźmy teraz do omówienia negacji - operatora jednoargumentowego, dzięki któremu możemy m. in. zdefiniować dopełnienie zbioru rozmytego.

Definicja 1.31 ([18, 5])**.** Funkcję $N\colon [0, 1] \to [0, 1]$ nazywamy negacją rozmytą, jeżeli spełnione są następujące warunki:

$$N(0) = 1, \quad N(1) = 0, \tag{N1}$$

$$N \text{ jest funkcją malejącą.} \tag{N2}$$

Ponadto, wyróżniamy negację:

(i) **ścisłą**, jeżeli N jest ściśle malejąca i ciągła,

(ii) **silną**, jeżeli N jest inwolucją, tzn. $N(N(x)) = x$ dla $x \in [0, 1]$.
Zauważmy, że ta własność stanowi uogólnienie prawa podwójnej negacji

$$\neg(\neg p) \equiv p.$$

Przykład 1.32. Poniżej przedstawiamy kilka przykładów podstawowych negacji rozmytych:

(i) Negacja drastyczna (najmniejsza wśród negacji rozmytych)

$$N_{\mathbf{D_1}}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

(ii) Największa negacja rozmyta

$$N_{\mathbf{D_2}}(x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases} \tag{1.18}$$

(iii) Negacja klasyczna (silna, a zatem ścisła)

$$N_{\mathbf{C}}(x) = 1 - x, \quad x \in [0,1]. \tag{1.19}$$

Ważną rolę odgrywają negacje silne, które można scharakteryzować w następujący sposób.

Twierdzenie 1.33 ([36]). *Dla funkcji $N\colon [0,1] \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) N jest negacją silną.

(ii) N jest Φ-sprzężona z negacja klasyczną, tzn. istnieje takie $\varphi \in \Phi$, że

$$N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)), \quad x \in [0,1]. \tag{1.20}$$

Mając daną t-normę lub t-konormę możemy także wyznaczyć negację zgodnie z poniższą definicją.

Definicja 1.34 ([5, Definition 2.3.1]). Niech T będzie t-normą, a S t-konormą.

(i) Funkcję $N_T\colon [0,1] \to [0,1]$ zdefiniowaną jako

$$N_T(x) = \sup\{y \in [0,1] \mid T(x,y) = 0\}, \quad x \in [0,1], \tag{1.21}$$

nazywamy negacją indukowaną przez T.

(ii) Funkcję $N_S\colon [0,1] \to [0,1]$ zdefiniowaną jako

$$N_S(x) = \inf\{y \in [0,1] \mid S(x,y) = 1\}, \quad x \in [0,1], \tag{1.22}$$

nazywamy negacją indukowaną przez S.

Dla t-norm przedstawiliśmy kilka ważnych twierdzeń charakteryzacyjnych. Dzięki poniższemu wynikowi, wiele własności norm trójkątnych można przenieść na przypadek t-konorm i podać analogiczne do nich twierdzenia.

Twierdzenie 1.35 ([18, Proposition 1.9]). *Jeżeli T jest t-normą, a N negacją ścisłą, to funkcja $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ dana wzorem*

$$S(x,y) = N^{-1}(T(N(x), N(y))), \quad x, y \in [0,1], \tag{1.23}$$

jest t-konormą. Mówimy wtedy, że S jest t-konormą N-dualną do T.

Przykład 1.36. T-konormy dualne do danych t-norm T.

T	N	t-konorma N-dualna do T
$T_{\mathbf{M}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$S_{\mathbf{M}}$
$T_{\mathbf{LK}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$S_{\mathbf{LK}}$
$T_{\mathbf{P}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$S_{\mathbf{P}}$
$T_{\mathbf{P}}$	$N(x) = 1 - x^2$	$S(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - x^2y^2}$

W logice klasycznej wśród wielu tautologii, możemy odnaleźć prawo wyłączonego środka

$$p \vee \neg p.$$

Podobny związek można zdefiniować dla spójników rozmytych będących odpowiednikami alternatywy oraz negacji.

Definicja 1.37 ([5, Definition 2.3.8])**.** Niech S będzie t-konormą, a N negacją rozmytą. Mówimy, że para (S, N) spełnia prawo wyłączonego środka (ang. *law of excluded middle*), jeżeli

$$S(x, N(x)) = 1, \quad x \in [0, 1]. \tag{LEM}$$

Inną tautologią, tym razem dla koniunkcji i negacji, którą będziemy wykorzystywać w dalszej części pracy jest prawo niesprzeczności (kontradykcji)

$$\neg(p \wedge \neg p). \tag{1.24}$$

Tutaj mówimy o następującym związku.

Definicja 1.38 ([5, Definition 2.3.14])**.** Niech T będzie t-normą, a N niech będzie negacją rozmytą. Mówimy, że para (T, N) spełnia prawo kontradykcji (ang. *law of contradiction*), jeżeli

$$T(x, N(x)) = 0, \quad x \in [0, 1]. \tag{LC}$$

Jak dotąd w literaturze można znaleźć charakteryzację par (T, N) spełniających (LC) tylko, gdy obie funkcje są ciągłe.

Twierdzenie 1.39 ([5, Proposition 2.3.15])**.** *Niech T będzie t-normą ciągłą, a N niech będzie negacją ciągłą. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) Para (T, N) spełnia (LC)*.*

(ii) T jest t-normą nilpotentną tzn. istnieje takie $\varphi \in \Phi$, że $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$ oraz

$$N(x) \leqslant \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)), \quad x \in [0, 1].$$

Zauważmy, że nie są to wszystkie pary spełniające (LC).

Przykład 1.40. (i) Niech N będzie negacją drastyczną daną wzorem (1.17). Wtedy jeśli T jest semikopułą, to (T, N) spełnia (LC).

(ii) Niech T będzie t-normą drastyczną (daną wzorem (1.6)) oraz niech N będzie negacją różnowartościową. Wtedy (T, N) spełnia (LC). Istotnie,

- jeśli $x = 0$, to $T(0, N(0)) = T(0, 1) = 0$,
- jeśli $0 < x < 1$, to $N(x) < 1$ oraz $T(x, N(x)) = 0$,
- jeśli $x = 1$, to $T(1, N(1)) = T(1, 0) = 0$.

Istnieją zatem przykłady par (T, N), w których przynajmniej jedna z funkcji jest nieciągła, a mimo to spełniają (LC).
Przejdźmy teraz do kolejnego bardzo istotnego operatora - implikacji rozmytej.

Definicja 1.41 ([5, 18])**.** Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy implikacją rozmytą, jeżeli spełnione są następujące warunki:

$$I \text{ jest malejąca ze względu na pierwszą zmienną,} \tag{I1}$$

$$I \text{ jest rosnąca ze względu na drugą zmienną,} \tag{I2}$$

$$I(0,0) = I(1,1) = 1 \text{ oraz } I(1,0) = 0. \tag{I3}$$

Ponadto, rodzinę wszystkich implikacji rozmytych będziemy oznaczać przez $\mathcal{FI}$.

Przykład 1.42. Poniżej przedstawiamy przykłady ważniejszych implikacji rozmytych.

(i) Implikacja Gödla

$$I_{\mathbf{GD}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ y, & x > y, \end{cases} \tag{1.25}$$

(ii) implikacja Goguena

$$I_{\mathbf{GG}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ \frac{y}{x}, & x > y, \end{cases} \tag{1.26}$$

(iii) implikacja Łukasiewicza

$$I_{\mathbf{LK}}(x,y) = \min\{1, 1 - x + y\}, \tag{1.27}$$

(iv) implikacja Reschera

$$I_{\mathbf{RS}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ 0, & x > y, \end{cases} \tag{1.28}$$

(v) implikacja Reichenbacha

$$I_{\mathbf{RC}}(x,y) = 1 - x + xy, \tag{1.29}$$

(vi) implikacja Webera

$$I_{\mathbf{WB}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ y, & x = 1, \end{cases} \tag{1.30}$$

(vii) implikacja Kleene-Dienesa

$$I_{\mathbf{KD}}(x,y) = \max\{1-x, y\}, \tag{1.31}$$

(viii) implikacja Fodora

$$I_{\mathbf{FD}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ \max\{1-x, y\}, & x > y, \end{cases} \tag{1.32}$$

(ix) implikacja drastyczna

$$I_{\mathbf{D}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ y, & x > 0, \end{cases} \tag{1.33}$$

(x) największa implikacja rozmyta

$$I_{\mathbf{1}}(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 1 \wedge y = 0, \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases} \tag{1.34}$$

(xi) najmniejsza implikacja rozmyta

$$I_{\mathbf{0}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \vee y = 1, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases} \tag{1.35}$$

dla $x, y \in [0,1]$.

Podobnie jak dla t-norm i t-konorm, tutaj także można zdefiniować negację indukowaną.

Definicja 1.43 ([5])**.** Niech I będzie implikacją rozmytą. Funkcję $N_I\colon [0,1] \to [0,1]$ określoną wzorem

$$N_I(x) = I(x,0), \quad x \in [0,1], \tag{1.36}$$

nazywamy negacją naturalną I lub **negacją indukowaną** przez I.

Dla implikacji rozmytych badane są różne własności, poniżej przedstawiamy najważniejsze z nich.

Definicja 1.44 ([5])**.** Niech N będzie negacją rozmytą. Mówimy, że implikacja rozmyta I spełnia

- **własność lewostronnego elementu neutralnego** (ang. *left neutrality property*), jeżeli
$$I(1, y) = y, \quad y \in [0, 1], \tag{NP}$$
- **własność identyczności** (ang *identity principle*), jeżeli
$$I(x, x) = 1, \quad x \in [0, 1], \tag{IP}$$
- **własność porządku** (ang. *ordering property*), jeżeli
$$I(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \leqslant y, \quad x, y \in [0, 1], \tag{OP}$$
- **zasadę wymiany** (ang. *exchange principle*), jeżeli
$$I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z)), \quad x, y, z \in [0, 1], \tag{EP}$$
- **prawo kontrapozycji ze względu na** N (ang. *law of contraposition*), jeżeli
$$I(x, y) = I(N(y), N(x)), \quad x, y \in [0, 1], \tag{CP}$$
- **lewostronne prawo kontrapozycji ze względu na** N (ang. *law of left contraposition*), jeżeli
$$I(N(x), y) = I(N(y), x), \quad x, y \in [0, 1], \tag{L-CP}$$
- **prawostronne prawo kontrapozycji ze względu na** N (ang. *law of right contraposition*), jeżeli
$$I(x, N(y)) = I(y, N(x)), \quad x, y \in [0, 1]. \tag{R-CP}$$

Geneza tych własności również łączy się z prawami klasycznego rachunku zdań. Własność (NP) wiąże się z faktem, iż wartość implikacji zależy od wartości jej następnika, jest zatem uogólnieniem tautologii
$$1 \to p \equiv p.$$
Własność (IP) jest uogólnieniem prawa tożsamości
$$p \equiv p.$$
Z kolei (OP) uogólnia własność mówiącą, że implikacja jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy następnik jest prawdziwy w co najmniej tym samym stopniu co poprzednik. Natomiast (EP) odpowiada zasadzie wymiany, czyli następującej tautologii
$$p \to (q \to r) \equiv q \to (p \to r).$$

Podobnie, (CP) pochodzi od znanego prawa kontrapozycji

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p.$$

Biorąc pod uwagę fakt, iż negacja klasyczna spełnia prawo podwójnego przeczenia, także poniższe zdania są tautologiami:

$$\neg p \to q \equiv \neg q \to p$$

oraz

$$p \to \neg q \equiv q \to \neg p.$$

Stąd (L-CP) oraz (R-CP) są odpowiednio uogólnieniami powyższych tautologii.

Omówimy teraz kilka wybranych rodzin implikacji rozmytych, którymi będziemy się zajmować w dalszej części pracy. Pierwszą z nich są R-implikacje. Ich nazwa pochodzi od implikacji rezydualnych, które definiuje się w l-monoidach w następujący sposób.

Uwaga 1.45 ([11, 26])**.** Niech $(L, *, \leqslant)$ będzie przemiennym rezydualnym l-monoidem. Wówczas $*$-rezyduum jest jednoznacznie wyznaczone jako:

$$x \to_* y = \bigvee \{z \in L | x * z \leqslant y\}.$$

Zauważmy, że w podobny sposób można było zdefiniować implikację w algebrze Boole'a wzorem (1.4).

Definicja 1.46 ([5, Definition 2.5.1])**.** Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy R-implikacją, jeżeli istnieje taka t-norma T, że

$$I(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \mid T(x,t) \leqslant y\}, \quad x, y \in [0,1]. \tag{1.37}$$

Mówimy wtedy, że I jest indukowana przez t-normę T, a oznaczać ją będziemy przez I_T.

Uwaga 1.47 ([30, Theorem 1])**.** Ogólniej, możemy zdefiniować implikację indukowaną I_C dla dowolnej koniunkcji rozmytej C. Przy czym, tak otrzymana funkcja będzie implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy C spełnia warunek

$$C(1,y) > 0, \quad y \in (0,1]. \tag{1.38}$$

Wśród wielu R-implikacji indukowanych przez różne t-normy, te indukowane przez t-normy lewostronnie ciągłe odgrywają znaczącą rolę. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.48 ([5, Proposition 2.5.2])**.** *Dla t-normy T następujące warunki są równoważne:*

(i) T jest lewostronnie ciągła.

(ii) Para (T, I_T) spełnia następujący warunek (ang. residual principle)

$$T(x,z) \leqslant y \Longleftrightarrow I_T(x,y) \geqslant z, \quad x,y,z \in [0,1], \tag{RP}$$

(iii) Supremum we wzorze (1.37) *jest osiągalne w tym zbiorze, tzn.*

$$I_T(x,y) = \max\{t \in [0,1] \mid T(x,t) \leqslant y\}, \quad x,y \in [0,1]. \tag{1.39}$$

Zauważmy, że warunek (RP) jest analogiczny do (1.5). Ta bardzo ważna charakteryzacja może być w pewien sposób rozszerzona na znacznie szerszą klasę funkcji o których wspomnieliśmy we wcześniejszej uwadze.

Twierdzenie 1.49 ([30])**.** *Niech C będzie koniunkcją rozmytą spełniającą warunek* (1.38)*. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) C jest lewostronnie ciągła ze względu na drugą zmienną.

(ii) Para (C, I_C) spełnia (RP)*.*

(iii) Dla $x, y \in [0,1]$ zachodzi

$$I_C(x,y) = \max\{t \in [0,1] \mid C(x,t) \leqslant y\}. \tag{1.40}$$

Przykład 1.50. Poniższa tabela zawiera przykłady R-implikacji indukowanych z różnych koniunkcji rozmytych.

C	I_C
$T_{\mathbf{LK}}$	$I_{\mathbf{LK}}$
$T_{\mathbf{M}}$	$I_{\mathbf{GD}}$
$T_{\mathbf{P}}$	$I_{\mathbf{GG}}$
$T_{\mathbf{D}}$	$I_{\mathbf{WB}}$
$T_{\mathbf{nM}}$	$I_{\mathbf{FD}}$
$C_1(x,y) = \begin{cases} y, & x = 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$	$I_{\mathbf{WB}}$
$C_2(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \vee y = 0 \\ 1, & \text{w p. p.} \end{cases}$	$I_{\mathbf{0}}$

Znane prawo zastępowania implikacji

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

posłużyło do zdefiniowania innej rodziny implikacji rozmytych - (S, N)-implikacji.

Definicja 1.51 ([5, Definition 2.4.1])**.** Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy (S,N)-implikacją, jeżeli istnieje taka t-konorma S oraz taka negacja N, że

$$I(x,y) = S(N(x),y), \quad x,y \in [0,1]. \tag{1.41}$$

Jeżeli N jest negacją silną, to I nazywamy silną implikacją lub S-implikacją. Ponadto, jeżeli I jest indukowana przez S oraz N, to oznaczamy ją $I_{S,N}$.

Widzimy, że tu znów zastąpiono $\vee$ i $\neg$ odpowiednio przez t-konormę i negację, by otrzymać tę klasę implikacji.

Przykład 1.52. Poniżej przedstawiamy przykłady (S,N)-implikacji.

S	N	$I_{S,N}$
$S_{\mathbf{M}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$I_{\mathbf{KD}}$
$S_{\mathbf{P}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$I_{\mathbf{RC}}$
$S_{\mathbf{LK}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$I_{\mathbf{LK}}$
dowolna	$N_{\mathbf{D_1}}$	$I_{\mathbf{D}}$

Kolejnymi implikacjami, którymi będziemy sie zajmować są implikacje Yagera, wśród których wyróżniamy f i g-implikacje.

Definicja 1.53 ([43, 4])**.** Niech $f\colon [0,1] \to [0,\infty]$ będzie taką ściśle malejącą i ciągłą funkcją, że $f(1) = 0$. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ daną wzorem

$$I(x,y) = f^{-1}(x \cdot f(y)), \quad x,y \in [0,1], \tag{1.42}$$

(przy założeniu, że $0 \cdot \infty = 0$) nazywamy f-implikacją, a funkcję f - generatorem I. Ponadto, implikację tę będziemy oznaczać I_f.

Definicja 1.54 ([43])**.** Niech $g\colon [0,1] \to [0,\infty]$ będzie taką ściśle rosnącą i ciągłą funkcją, że $g(0) = 0$. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ daną wzorem

$$I(x,y) = g^{-1}\left(\min\left\{\frac{1}{x} \cdot g(y), g(1)\right\}\right), \quad x,y \in [0,1], \tag{1.43}$$

(przy założeniu, że $\frac{1}{0} = \infty$ oraz $\infty \cdot 0 = \infty$) nazywamy g-implikacją, a funkcję g - generatorem I. Ponadto tak zdefiniowaną implikację będziemy oznaczać I_g.

Przykład 1.55. Poniżej przedstawiamy przykłady f- i g-implikacji. Zauważmy, że implikacja $I_{\mathbf{YG}}$ należy do obu tych rodzin.

	generator	implikacja
f-implikacje	$-\ln x$	$I_{\mathbf{YG}}$
	$1-x$	$I_{\mathbf{RC}}$
g-implikacje	x	$I_{\mathbf{GG}}$
	$-\frac{1}{\ln x}$	$I_{\mathbf{YG}}$
	$g(x) = \frac{e^x-1}{e-1}$	$I_g(x,y) = \min\left\{1, \ln\left(\frac{e^y-1+x}{x}\right)\right\}$

gdzie $I_{\mathbf{YG}}$ jest implikacją Yagera daną wzorem:

$$I_{\mathbf{YG}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \wedge y = 0, \\ y^x, & x > 0 \vee y > 0. \end{cases} \tag{1.44}$$

Inną rodziną implikacji rozmytych, których pochodzenie łączy się z prawdopodobieństwem warunkowym i kopułami są implikacje probabilistyczne.

Definicja 1.56 ([22, 23])**.** Niech C będzie kopułą. Funkcję $I_C\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ daną wzorem

$$I_C(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{C(x,y)}{x}, & x > 0, \end{cases} \tag{1.45}$$

nazywamy implikacją probabilistyczną (opartą na kopule C).

Twierdzenie 1.57 ([23, Theorem 6])**.** *Implikacja probabilistyczna oparta na kopule C jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$C(x_1,y)x_2 \geqslant C(x_2,y)x_1,$$

dla takich $x_1, x_2, y \in [0,1]$, że $x_1 \leqslant x_2$.

Przykład 1.58. Poniżej podajemy przykłady implikacji probabilistycznych.

C	I_C
xy	$I_{\mathbf{D}}$
$\min\{x,y\}$	$I_{\mathbf{GG}}$
$C(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y = 0, \\ \dfrac{xy}{x+y-xy}, & \text{w p. p.} \end{cases}$	$I_C = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \dfrac{y}{x+y-xy}, & \text{w p. p.} \end{cases}$

1.3 Relacje rozmyte

W podrozdziale tym przedstawimy pojęcia związane z relacjami rozmytymi.

Definicja 1.59. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niepustymi zbiorami. n-argumentową relacją rozmytą nazywamy dowolną funkcję $R\colon X_1 \times \ldots \times X_n \to [0,1]$. Przy czym, jeśli $n = 1$, to taką jednoargumentową relację R będziemy traktować jak zbiór rozmyty, a symbolem $\mathcal{F}(X)$ będziemy oznaczać rodzinę wszystkich zbiorów rozmytych określonych na $X \neq \emptyset$.

Korzystając z przedstawionych wcześniej informacji na temat spójników rozmytych, możemy podać teraz jak rozumiemy operacje na zbiorach rozmytych.

Definicja 1.60 ([18])**.** Niech $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

(i) Mówimy, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B ($A \subseteq B$) jeśli spełniony jest warunek

$$A(x) \leqslant B(x), \quad x \in X.$$

(ii) Dopełnienie zbioru rozmytego A określamy jako

$$A^c(x) = N(A(x)), \quad x \in X, \tag{1.46}$$

gdzie N jest negacją rozmytą.

(iii) Przekrój zbiorów rozmytych A i B określamy jako

$$(A \cap_T B)(x) = T(A(x), B(x)), \quad x \in X, \tag{1.47}$$

gdzie T jest t-normą.

(iv) Sumę zbiorów rozmytych A i B określamy jako

$$(A \cup_S B)(x) = S(A(x), B(x)), \quad x \in X, \tag{1.48}$$

gdzie S jest t-konormą.

Zanim przejdziemy do omawiania pojęć związanych z operacjami na relacjach rozmytych, przypomnimy te związane z relacjami klasycznymi. Mianowicie, mówiąc o takich należy wspomnieć o dwóch pojęciach - obrazie i złożeniu relacji.

Definicja 1.61 (zob. [8])**.** Niech $A \subseteq X$ oraz $R \subseteq X \times Y$ dla $X \neq \emptyset \neq Y$.

(i) Obrazem zbioru A przez relację R nazywamy zbiór

$$R_{\circ}(A) = \{y \in Y |\ \exists_{x \in X}(x \in A \wedge (x, y) \in R)\}. \tag{1.49}$$

(ii) Podobrazem zbioru A (ang. *subdirect image*) przez relację R nazywamy zbiór

$$R_{\triangleleft}(A) = \{y \in Y |\ \forall_{x \in X}(x \in A \Rightarrow (x, y) \in R)\}.$$

(iii) Nadobrazem zbioru A (ang. *superdirect image*) przez relację R nazywamy zbiór

$$R_{\triangleright}(A) = \{y \in Y |\ \forall_{x \in X}((x, y) \in R \Rightarrow x \in A)\}.$$

(iv) Obrazem kwadratowym (ang. *square image*) zbioru A przez relację R nazywamy

$$R_{\diamond}(A) = \{y \in Y |\ \forall_{x \in X}((x, y) \in R \Leftrightarrow x \in A)\}.$$

W tej samej konwencji możemy podać definicję złożeń relacji klasycznych.

Definicja 1.62. Niech X, Y, Z będą niepustymi zbiorami oraz niech $R \subseteq X \times Y, S \subseteq Y \times Z$.

(i) Złożeniem $R \circ S$ nazywamy zbiór

$$R \circ S = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists_{y \in Y}((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}. \tag{1.50}$$

(ii) Podzłożeniem $R \triangleleft S$ nazywamy zbiór

$$R \triangleleft S = \{(x, z) \in X \times Z \mid \forall_{y \in Y}((x, y) \in R \Rightarrow (y, z) \in S)\}. \tag{1.51}$$

(iii) Nadzłożeniem $R \triangleright S$ nazywamy zbiór

$$R \triangleright S = \{(x, z) \in X \times Z \mid \forall_{y \in Y}((y, z) \in S) \Rightarrow (x, y) \in R\}. \tag{1.52}$$

(iv) Złożeniem kwadratowym $R \diamond S$ nazywamy zbiór

$$R \diamond S = \{(x, z) \in X \times Z \mid \forall_{y \in Y}((y, z) \in S) \Leftrightarrow (x, y) \in R\}. \tag{1.53}$$

Możemy teraz przejść do zdefiniowania operacji dla relacji rozmytych.

Definicja 1.63 ([7])**.** Niech $A \in \mathcal{F}(X)$ oraz $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$. Wówczas:

(i) obrazem zbioru A przez relację rozmytą R w oparciu o koniunkcję C nazywamy zbiór rozmyty określony jako

$$R_{\circ_C}(A)(y) = \sup_{x \in X} C(A(x), R(x, y)), \quad y \in Y,$$

(ii) podobrazem zbioru A przez relację rozmytą R w oparciu o implikację I nazywamy zbiór rozmyty określony jako

$$R_{\triangleleft_I}(A)(y) = \inf_{x \in X} I(A(x), R(x, y)), \quad y \in Y,$$

(iii) nadobrazem zbioru A przez relację rozmytą R w oparciu o implikację I nazywamy zbiór rozmyty określony jako

$$R_{\triangleright_I}(A)(y) = \inf_{x \in X} I(R(x, y), A(x)), \quad y \in Y.$$

Definicja 1.64 ([7])**.** Niech $R \in \mathcal{F}(X \times Y),\ S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$. Wówczas:

(i) złożeniem $R \overset{C}{\circ} S$ relacji R i S w oparciu o koniunkcję rozmytą C nazywamy relację rozmytą określoną jako

$$(R \overset{C}{\circ} S)(x, z) = \sup_{y \in Y} C(R(x, y), S(y, z)), \quad (x, z) \in X \times Z, \tag{1.54}$$

(ii) złożeniem $R \overset{I}{\lhd} S$ relacji R i S w oparciu o implikację I nazywamy relację rozmytą określoną jako

$$(R \overset{I}{\lhd} S)(x,z) = \inf_{y \in Y} I(R(x,y), S(y,z)), \quad (x,z) \in X \times Z, \tag{1.55}$$

(iii) złożeniem $R \overset{I}{\rhd} S$ relacji R i S w oparciu o implikację I nazywamy relację rozmytą określoną jako

$$(R \overset{I}{\rhd} S)(x,z) = \inf_{y \in Y} I(S(y,z), R(x,y)), \quad (x,z) \in X \times Z. \tag{1.56}$$

Uwaga 1.65. Przypomnijmy także, że pierwsze złożenie relacji rozmytych pojawiło się u Zadeha [44] i było ono zdefiniowane w następujący sposób (przy powyższych oznaczeniach):

$$(R \overset{T_{\mathbf{M}}}{\circ} S)(x,z) = \sup_{y \in Y} \min\{R(x,y), S(y,z)\}, \quad (x,z) \in X \times Z. \tag{1.57}$$

Widzimy zatem, że jest to szczególny przypadek złożenia $R \overset{C}{\circ} S$ dla $C = T_{\mathbf{M}}$.

Listę własności tychże złożeń (z pewnymi modyfikacjami) można znaleźć np. w [9] lub [14]. Dotyczą on m. in. monotoniczności oraz zachowania w przypadku ich sumy czy przekroju.

W zastosowaniach relacji rozmytych pojawiają się dwa modele takich relacji. Okażą się one przydatne w kolejnym rozdziale.

Definicja 1.66 (zob. [42, 34])**.** Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $A_i \in \mathcal{F}(X), B_i \in \mathcal{F}(X), i \in \{1, \ldots, n\}$. Wówczas wyróżniamy następujące modele relacji:

(i) relację $\overset{I}{\hat{R}}$ określoną jako

$$\overset{I}{\hat{R}}(x,y) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} I(A_i(x), B_i(y)), \quad (x,y) \in X \times Y, \tag{1.58}$$

gdzie I jest implikacją rozmytą,

(ii) relację $\overset{C}{\check{R}}$ określoną jako

$$\overset{C}{\check{R}}(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} C(A_i(x), B_i(y)), \quad (x,y) \in X \times Y, \tag{1.59}$$

gdzie C jest koniunkcją rozmytą.

ROZDZIAŁ 2

Wnioskowanie przybliżone

O wnioskowaniu przybliżonym wspomnieliśmy już we Wstępie omawiając m. in. przykład uogólnionego schematu modus ponens. Przyjrzyjmy się jednak dokładniej temu pojęciu. Przede wszystkim wnioskowanie przybliżone znacząco różni się od wnioskowania w klasycznym ujęciu. Tutaj proces ten, czyli działanie mające na celu uzyskanie pewnych wyników na podstawie dostarczonych przesłanek, przebiega inaczej. Opiera się on na obliczeniach wartości zbiorów rozmytych, które z kolei reprezentują pewne własności lub cechy obiektów (reprezentują znaczenie określonego zbioru zdań rozmytych) [15].

Zanim skupimy się na konkretnych schematach wnioskowania wymienionych we Wstępie, a wykorzystywanych we wnioskowaniu przybliżonym prześledźmy historię tego pojęcia. Podstawowym terminem, na którym opiera się to wnioskowanie jest zmienna lingwistyczna (językowa). Nazwiemy tak zmienną, której wartości określamy opisując pewne wielkości, a nie podając dane liczbowe je charakteryzujące - tak jak jest to w języku naturalnym, którym posługujemy się na co dzień. Jako przykład takiej zmiennej możemy podać temperaturę. Mówimy, że jest bardzo wysoka, wysoka, średnia, niska, raczej niska itd. Posługując się dalej tym przykładem, przyjrzyjmy się dokładniej temu pojęciu. W opisie formalnym zmiennej lingwistycznej mówimy o następującej czwórce, która ją charakteryzuje ([46, 15]):

$$(X, \mathcal{L}X, U, M),$$

gdzie X - nazwa rozważanej zmiennej,
$\mathcal{L}X$ - zbiór wartości językowych, jakie może przyjmować zmienna, np. wysoka, niska (inaczej jest to zbiór termów), element zbioru $\mathcal{L}X$ oznaczamy przez LX,
U - dziedzina, w której zmienna przyjmuje wartości (np. będzie to przedział $[-15°\mathrm{C}, 40°\mathrm{C}]$),
M - funkcja semantyczna, która podaje znaczenie, interpretację zmiennej lingwistycznej, tzn. $M\colon \mathcal{L}X \to \mathcal{F}(U)$. Zatem argumentem funkcji M jest wartość zmiennej lin-

gwistycznej np. "niska", a wartością określony zbiór rozmyty.

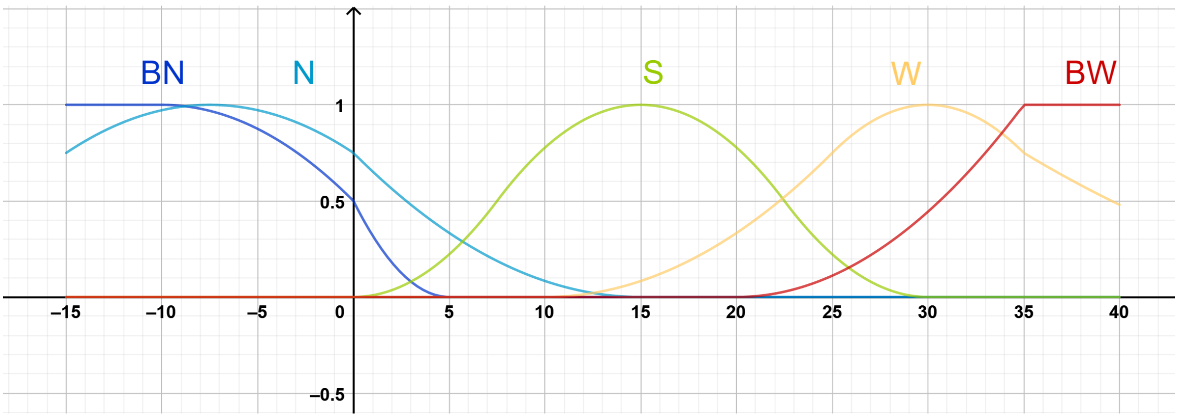
Dokładniej, rozważmy poniższy przykład.

Przykład 2.1. Przyjmijmy następujące dane:

- X - temperatura,
- $\mathcal{L}(X) = \{$bardzo niska, niska, średnia, wysoka, bardzo wysoka$\}$,
- $U = [-15, 40]$,
- $M \colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{F}(U)$.

Zatem definiujemy 5 zbiorów rozmytych: BN, N, S, W, BW odpowiednio. Na przykład zbiór rozmyty BW ma postać:

$$BW(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 20, \\ \frac{1}{225}x^2 - \frac{8}{45}x + \frac{16}{9}, & 20 < x \leqslant 35, \\ 1, & 35 < x \leqslant 40. \end{cases} \tag{2.1}$$



Rysunek 2.1: Funkcje M

Oczywiście definicja tych funkcji zależy od interpretacji konkretnego zjawiska, inaczej określilibyśmy zbiory rozmyte rozważając temperaturę powietrza w innej niż umiarkowana strefie klimatycznej (np. równikowej). Przeanalizujmy kolejny przykład. Zdanie

Temperatura jest wysoka

możemy zapisać jako

Temperatura posiada własność bycia wysoką,

w skrócie

T *jest* **W**.

Takie wyrażenie nazywamy rozmytą formułą atomową (ang. *atomic fuzzy proposition*). Korzystając ze spójników *i, lub, jeżeli ... to*, także *nie* możemy utworzyć formuły złożone. Znaczenie tych zdań jest wyrażone poprzez interpretację tychże spójników.

Przejdźmy teraz do omówienia rozmytych systemów wnioskowania, w których to kluczową rolę odgrywa jeden rodzaj rozmytych formuł złożonych. Zatem, rozmyte systemy wnioskowania (ang. *fuzzy inference/expert systems*) są systemami, które naśladują naturalny (ludzki) sposób rozumowania dzięki określonemu zakresowi wiedzy [27]. Systemy te służą w procesach takich jak wspomaganie podejmowania decyzji, planowanie czy uczenie się. Prześledźmy podstawową budowę takiego systemu. Jego jądro (podstawa) składa się z:

(i) bazy wiedzy (ang. *knowledge base*) - zawiera wiedzę typową dla problemu, w rozmytych systemach wnioskowania są to najczęściej zdania warunkowe (reguły rozmyte),

(ii) baza danych (ang. *database*) - jest to magazyn danych dla określonego zadania (zawiera pewne parametry, może zostać utworzona przez interakcje pomiędzy użytkownikiem a systemem),

(iii) aparat wnioskujący (ang. *inference engine*) - działa na bazie wiedzy, korzysta z reguł i przeprowadza wnioskowanie rozmyte.

2.1 Równania funkcyjne we wnioskowaniu przybliżonym

W rozmytym systemie wnioskowania realizowane jest wnioskowanie przybliżone, kiedy to używa się różnych schematów wnioskowania. Najczęśniej mówi się o uogólnionym modus ponens - nazywając je schematem lub regułą wnioskowania. Często zaś na zdanie warunkowe będące rdzeniem bazy wiedzy wcześniej opisanego systemu mówi się reguły JEŻELI - TO (*IF - THEN*) - są to właśnie wspomniane wyżej formuły złożone. Wprowadźmy zatem bardziej uporządkowane nazewnictwo, dzieki któremu będziemy mogli dokonać rozróżnienia pomiędzy wszystkimi wspomnianymi pojęciami. W monografii *An Introduction to Fuzzy Control* [15] autorzy piszą:

> ”In approximate reasoning, two inference rules are of major importance, viz. the *compositional rule of inference* and the *generalized modus ponens*. The first rule uses a fuzzy relation to represent explicitly the connection between two fuzzy propositions, the second uses an if-then rule that implicitly represents a fuzzy relation.”

Dokonamy tutaj pewnej polemiki z tym stwierdzeniem, a konkretnie z pierwszym zdaniem. Mianowicie *compositional rule of inference* (CRI) - złożeniowa reguła wnioskowania odnosić się będzie do pewnego wzorca postępowania (będziemy mówić o regule wnioskowania), w którym to korzysta się ze złożenia $\overset{C}{\circ}$ (1.54) relacji rozmytych (gdzie C jest koniunkcją rozmytą). Natomiast *generalized modus ponens* - uogólniony modus ponens jest rozmytym schematem wnioskowania, szczególnym przypadkiem zastosowania CRI.

Schemat uogólnionego modus ponens pojawił się we Wstępie. Zapiszmy go ponownie, by wyróżnić wspomniane pojęcia:

$$\begin{array}{lll} \text{1. REGUŁA:} & \text{JEŻELI } x \text{ jest } A, & \text{TO } y \text{ jest } B. \\ \text{2. OBSERWACJA:} & x \text{ jest } A'. & \\ \hline \text{WNIOSEK:} & & y \text{ jest } B', \end{array} \tag{2.2}$$

tutaj x, y są zmiennymi lingwistycznymi, a A, A', B, B' wartościami tych zmiennych, które reprezentowane są przez zbiory rozmyte. Stąd, dla wcześniejszego przykładu mielibyśmy:

REGUŁA:	JEŻELI temperatura jest bardzo niska,	TO zużycie węgla jest bardzo wysokie
OBSERWACJA:	Temperatura jest niska.	

Oczekiwanym wnioskiem powinno być zdanie 'Zużycie węgla jest wysokie'. Pojawia się pytanie, jak obliczyć wartość zmiennej lingwistycznej, by móc ją zakwalifikować do bycia wysoką. Odpowiedź możemy uzyskać stosując reguły wnioskowania. Pierwszą ważną z nich jest już wspomniana reguła złożeniowa Zadeha (CRI). Przeanalizujmy schemat (2.2). Zdanie 1 rozumiemy jako relację rozmytą, a zdanie 2 jako zbiór rozmyty. Zatem schemat uogólnionego modus ponens przy pomocy CRI możemy zapisać jako:

$$B' := A' \overset{C}{\circ} R, \tag{2.3}$$

gdzie A', B' rozumiemy jako relacje jednoargumentowe, a C jest koniunkcją rozmytą.

Uwaga 2.2. Możemy też interpretować wzór (2.3) jako obraz zbioru A' przez relację R (wtedy $B' := R_{\circ_C}(A')$).

Oczywiście, niemal natychmiastowo nasuwa się następująca definicja relacji R:

$$R(A(x), B(y)) = I(A(x), B(y)), \quad x \in X, y \in Y, \tag{2.4}$$

gdzie I jest implikacją rozmytą. Wówczas (2.3) będzie mieć postać:

$$B'(y) := \sup_{x \in X} C(A'(x), I(A(x), B(y)), \quad y \in Y, \tag{2.5}$$

gdzie C jest koniunkcją rozmytą. Tę właśnie postać podaliśmy we Wstępie. W poprzednim rozdziale przedstawiliśmy także dwa modele relacji. Zauważmy, że w powyższym wzorze użyliśmy jednego z nich - $\overset{I}{\hat{R}}$ dla $n = 1$. Jest to naturalne podejście, gdyż wykorzystujemy warunkowy charakter naszej reguły. Użycie drugiego modelu nie wydaje się uzasadnione, przynajmniej dla CRI. Otrzymalibyśmy wtedy

$$B'(y) := \sup_{x \in X} C(A'(x), C(A(x), B(y))), \quad y \in Y, \tag{2.6}$$

do którego jeszcze powrócimy. Ten model relacji – $\overset{C}{\check{R}}$ stosuje się przy drugiej rozważanej regule wnioskowania jaką jest iloczyn Bandlera-Kohouta ([34, 10]), który jest niczym innym jak złożeniem $\overset{I}{\triangleleft}$. Zatem dla schematu (2.2) mamy

$$B'(y) := \inf_{x \in X} I(A'(x), C(A(x), B(y))) \quad y \in Y.$$

Korzystając z modelu $\overset{I}{\hat{R}}$ otrzymalibyśmy

$$B'(y) := \inf_{x \in X} I(A'(x), I(A(x), B(y))) \quad y \in Y.$$

Jak widzimy, różne kombinacje modeli i reguł wnioskowania dają dużo różnych potencjalnych możliwości wnioskowania.

Poniższy przykład pokazuje, jak wykorzystujemy wzór (2.5) do obliczenia wyjściowego zbioru rozmytego B'.

Przykład 2.3. Niech $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ oraz $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Zbiory rozmyte A, B oraz relację R przedstawimy jako macierze poszczególnyh wartości, niech zatem $A = [0.7, 0.3, 0.8, 1]$, $B = [0, 0.9, 0.2]$. Weźmy $C = T_{\mathbf{LK}}$ i $I = I_{\mathbf{GG}}$. Wówczas, skoro $R(x, y) = I(A(x), B(y))$, $x \in X,\ y \in Y$, to otrzymujemy

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.9 \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{3} & 0.25 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Niech $A' = [0.4, 0.9, 0.7, 0.8]$. Korzystając ze wzoru (2.5) mamy

$$\begin{aligned} B'(y_1) &= T_{\mathbf{LK}}(0.4, 0) \vee T_{\mathbf{LK}}(0.9, 0) \vee T_{\mathbf{LK}}(0.7, 0) \vee T_{\mathbf{LK}}(0.8, 0) = 0, \\ B'(y_2) &= T_{\mathbf{LK}}(0.4, 1) \vee T_{\mathbf{LK}}(0.9, 1) \vee T_{\mathbf{LK}}(0.7, 1) \vee T_{\mathbf{LK}}(0.8, 0.9) = 0.9, \\ B'(y_3) &= T_{\mathbf{LK}}(0.4, \frac{2}{7}) \vee T_{\mathbf{LK}}(0.9, \frac{2}{3}) \vee T_{\mathbf{LK}}(0.7, 0.25) \vee T_{\mathbf{LK}}(0.8, 0.2) = \frac{17}{30}, \end{aligned}$$

czyli $B' = [0, 0.9, \frac{17}{30}]$.

Powróćmy teraz do rozmytych systemów wnioskowania. Jedną z podstawowych własności, której żądamy od takich systemów jest interpolacja - wspomniana krótko na początku pracy. Możemy ją określić w poniższy sposób.

Niech będzie dane zdanie warunkowe *JEŻELI x jest A, TO y jest B*. Jeśli w takim systemie dane wejściowe będą równe poprzednikowi tej implikacji, tzn. zamiast *x jest A'* będziemy mieć *x jest A*, to dane po przeprowadzeniu wnioskowania powinny być następujące - *y jest B*. Zatem w powyższy sposób otrzymujemy:

$$B = A \overset{C}{\circ} R$$

lub

$$B = A \overset{I}{\triangleleft} R$$

dla iloczynu Bandlera-Kohouta. Okazuje się, że nie wszystkie pary (C, I) spełniają własność interpolacji. Przeanalizujmy poniższe przykłady dla uogólnionego schematu modus ponens.

Przykład 2.4. Korzystając z danych z Przykładu 2.3 niech $A' = A$. Biorąc pod uwagę własność interpolacji powinniśmy otrzymać $B' = B$. Zobaczmy jak wygląda to tutaj. Korzystając z obliczonych już wartości relacji R oraz wzoru (2.5) otrzymujemy

$$B(y_1) = 0, \; B(y_2) = 0.9, \; B(y_3) = 0.2,$$

co oznacza, że $B' = B$, a zatem wybraliśmy odpowiednią implikację. Nie każda implikacja będzie jednak właściwa.

Przykład 2.5. Niech $C = T_{\mathbf{P}}$ oraz $I = I_{\mathbf{LK}}$, dla tych samych zbiorów rozmytych A, B co w Przykładzie 2.3 otrzymujemy następującą relację R:

$$R = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze wzoru (2.5) mamy

$$B'(y_1) = T(0.7, 0.3) \vee T(0.3, 0.7) \vee T(0.8, 0.2) \vee T(1, 0) = 0.21 \vee 0.21 \vee 0.16 \vee 0 = 0.21$$
$$B'(y_2) = T(0.7, 1) \vee T(0.3, 1) \vee T(0.8, 1) \vee T(1, 0.9) = 0.9$$
$$B'(y_3) = T(0.7, 0.5) \vee T(0.3, 0.9) \vee T(0.8, 0.4) \vee T(1, 0.2) = 0.35 \vee 0.27 \vee 0.32 \vee 0.2 = 0.35.$$

Widzimy więc, że $B' = [0.21, 0.9, 0.35] \neq [0, 0.9, 0.2] = B$. W dalszej części pracy (w Stwierdzeniu 3.18) dostarczymy odpowiedzi na pytanie, dlaczego tak jest.

Korzystając z omówionej własności interpolacji możemy zapisać wzór (2.5) jako równanie

$$B(y) = \sup_{x \in X} C(A(x), I(A(x), B(y))), \quad y \in Y. \tag{2.7}$$

Ponownie, jak pisaliśmy we Wstępie przechodząc z wartościami zbiorów A, B na cały odcinek $[0,1]$ otrzymujemy następujące równania:

$$y = \sup_{x\in[0,1]} C(x, I(x,y)), \quad y \in [0,1], \tag{CRI-GMP}$$
$$(C, I)$$

$$y = \inf_{x\in[0,1]} I(x, C(x,y)), \quad y \in [0,1], \tag{BK-GMP}$$
$$(C, I)$$

odpowiednio z reguły złożeniowej Zadeha i iloczynu Bandlera - Kohouta.

Uwaga 2.6. Po każdym z równań podano także w nawiasach kolejność zgodnie z którą będziemy mówić o poszczególnych funkcjach spełniających kolejne równania.

Zauważmy, że dla schematu modus ponens (nawet klasycznego) rozumowanie przeprowadzamy opierając się na jednym zdaniu JEŻELI - TO (IF - THEN) oraz jednej obserwacji. Wiemy jednak, że zbiór rozmyty możemy traktować jako relację jednoargumentową. Dlatego też w złożeniu $\overset{C}{\circ}$ mieliśmy dwie relacje rozmyte. CRI możemy wykorzystać do innego rozmytego schematu wnioskowania, a który symbolicznie zapisujemy jako

$$R_3 = R_1 \overset{T}{\circ} R_2, \tag{2.8}$$

gdzie T jest t-normą (lub innym uogólnieniem koniunkcji). Mowa tu o sylogizmie hipotetycznym (zob. [27, Rozdział 8.6]). Prześledźmy następujący przykład.

REGUŁA:	JEŻELI temperatura jest niska,	TO zużycie węgla jest wysokie.
REGUŁA:	JEŻELI zużycie węgla jest bardzo wysokie,	TO jakość powietrza jest bardzo zła.
WNIOSEK:	JEŻELI temperatura jest raczej niska,	TO jakość powietrza jest raczej zła.

Zapisując to ponownie, przy pomocy zmiennych lingwistycznych otrzymujemy:

REGUŁA:	JEŻELI x jest A,	TO z jest B.
REGUŁA:	JEŻELI z jest B',	TO y jest C.
WNIOSEK:	JEŻELI x jest A',	TO y jest C'.

(2.9)

Zatem opierając się na regule CRI otrzymujemy wzór

$$R_3(A'(x), C'(y)) := \sup_{z\in Z} T(R_1(A(x), B(z)), R_2(B'(z), C(y))), \quad x \in X,\ y \in Y, \tag{2.10}$$

a przyjmując $R_1 = R_2 = R_3 = \overset{I}{\hat{R}}$ mamy

$$I(A'(x), C'(y)) := \sup_{z \in Z} T(I(A(x), B(z)), I(B'(z), C(y))), \quad x \in X,\ y \in Y. \tag{2.11}$$

Ponownie, korzystając z własności interpolacji (tzn. gdy $B = B'$ i żądając by $A' = A$, $C' = C$) oraz przechodząc z wartościami zbiorów rozmytych A, B, C na przedział $[0, 1]$ otrzymujemy poniższe równanie funkcyjne:

$$I(x, y) = \sup_{z \in [0,1]} \left(T(I(x, z), I(z, y)) \right), \quad x, y \in [0, 1], \tag{CRI-GHS}$$
$$(T, I)$$

Jeśli natomiast schemat (2.9) zapiszemy jako

REGUŁA:	JEŻELI x jest A i z jest B',	TO z jest B i y jest C.
WNIOSEK:	JEŻELI x jest A',	TO y jest C',

to uzasadnione zostaje, z semantycznego punktu widzenia, użycie innego złożenia relacji rozmytych, mianowicie iloczynu Bandlera-Kohouta. Wówczas otrzymujemy

$$I(A'(x), C'(y)) := \inf_{z \in [0,1]} I(T(A(x), B'(z)), T(B(z), C(y))), \quad x \in X, y \in Y, \tag{2.12}$$

dla $R_1 = R_2 = \overset{T}{\check{R}}$, $R_3 = \overset{I}{\hat{R}}$. W podobny sposób, jak dla równania (CRI-GHS), możemy uzyskać następujące równanie funkcyjne:

$$I_2(x, y) = \inf_{z \in [0,1]} I_1(T(x, z), T(z, y)), \quad x, y \in [0, 1]. \tag{BK-GHS}$$
$$(T, I_1, I_2)$$

Zapiszmy również analogiczne równania dla pozostałych schematów wnioskowania:

(i) dla uogólnionego modus tollens

$$N(x) = \sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(x, y)), \quad x \in [0, 1], \tag{CRI-GMT}$$
$$(T, I, N)$$

$$N(x) = \inf_{y \in [0,1]} I(N(y), T(x, y)), \quad x \in [0, 1], \tag{BK-GMT}$$
$$(T, I, N)$$

(ii) dla uogólnionego prawa redukcji do absurdu

$$x = \sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(N(x), y)), \quad x \in [0, 1], \tag{CRI-GRA}$$
$$(T, I, N)$$

$$x = \inf_{y\in[0,1]} I(N(y), T(N(x), y)), \quad x \in [0,1]. \tag{BK-GRA}$$

$$(T, I, N)$$

W ten sposób uzasadniliśmy genezę równań funkcyjnych pojawiających się w trakcie badań nad wnioskowaniem przybliżonym.

W całej pracy skupiamy się na czterech wymienionych już schematach wnioskowania pochodzących z logiki klasycznej. Teraz prześledźmy raz jeszcze jak uzyskujemy dla nich nierówności funkcyjne. Zamiast dowolnych zdań w tych schematach rozważmy dowolne elementy z algebry Boole'a $(L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ')$. Niech zatem $x, y, z \in L$. Kolejne schematy zapiszmy w następujący sposób:

(i) sylogizm hipotetyczny: $(x \to y) \wedge (y \to z) \leqslant x \to z$,

(ii) modus ponens: $x \to y \wedge x \leqslant y$,

(iii) modus tollens: $x \to y \wedge y' \leqslant x'$,

(iv) prawo redukcji do absurdu: $x' \to y \wedge y' \leqslant x$.

Zauważmy, że wówczas wszystkie te nierówności są spełnione w $\mathcal{L}$. Istotnie, jeśli przyjmiemy, że $x \to y = x' \vee y$, to otrzymujemy odpowiednio:

$$\begin{aligned}
(x \to y) \wedge (y \to z) &= (x' \vee y) \wedge (y' \vee z) = ((x' \vee y) \wedge y') \vee ((x' \vee y) \wedge z)\\
&= ((x' \wedge y') \vee (y \wedge y')) \vee (z \wedge (x' \vee y)) = (x' \wedge y') \vee (z \wedge (x' \vee y))\\
&= ((x' \wedge y') \vee z) \wedge ((x' \wedge y') \vee (x' \vee y))\\
&= (x' \vee z) \wedge (y' \vee z) \wedge (((x' \wedge y') \vee x') \vee y)\\
&= (x' \vee z) \wedge (y' \vee z) \wedge (x' \vee y)\\
&\leqslant x' \vee z = x \to z\\
(x \to y) \wedge x &= (x' \vee y) \wedge x = (x' \wedge x) \vee (y \wedge x) = \mathbf{0} \vee (y \wedge x)\\
&= y \wedge x \leqslant y\\
(x \to y) \wedge y' &= (x' \vee y) \wedge y' = (x' \wedge y') \vee (y \wedge y')\\
&= (x' \wedge y') \vee \mathbf{0} \leqslant x'\\
(x' \to y) \wedge y' &= (x'' \vee y) \wedge y' = (x \vee y) \wedge y'\\
&= (x \wedge y') \vee (y \wedge y') = (x \wedge y') \vee \mathbf{0}\\
&= x \wedge y' \leqslant x
\end{aligned}$$

Jeśli jednak zastąpimy operacje w algebrze Boole'a odpowiednimi spójnikami rozmytymi, to otrzymamy następujące nierówności:

$$T(I(x,z), I(z,y)) \leqslant I(x,y), \quad x, y, z \in [0,1] \tag{HS}$$

$$T(x, I(x, y)) \leqslant y, \quad x, y \in [0, 1] \tag{MP}$$

$$T(N(y), I(x, y)) \leqslant N(x), \quad x, y \in [0, 1] \tag{MT}$$

$$T(N(y), I(N(x), y)) \leqslant x, \quad x, y \in [0, 1], \tag{RA}$$

gdzie T jest t-normą (lub uogólnieniem klasycznej koniunkcji), I jest implikacją rozmytą (lub uogólnieniem klasycznej implikacji), a N jest negacją rozmytą (lub uogólnieniem klasycznej negacji). Okazuje się jednak, że wtedy takie nierówności nie zawsze są spełnione dla dowolnie wybranych funkcji.

Przykład 2.7. Wybierzmy dwie nierówności:

(i) Dla (HS) niech $I = I_{\mathbf{FD}}$, a $T = T_{\mathbf{P}}$. Ustalmy $x = 0.9, y = 0.1, z = 0.3$, wtedy

$$T(I(x, z), I(z, y)) = T(0.3, 0.7) = 0.21 > 0.1 = I(x, y).$$

(ii) Dla (RA) przyjmijmy, że $N = N_{\mathbf{D_1}}$, weźmy $x \in (0, 1)$ oraz $y = 0$. Wtedy

$$T(N(y), I(N(x), y)) = T(1, I(0, 0)) = T(1, 1) = 1 > x.$$

Dlatego też jednym z celów pracy jest zbadanie tych nierówności, które jak widzimy różnią się od swoich odpowiedników w algebrze Boole'a.

ROZDZIAŁ 3

Sylogizm hipotetyczny

W rozdziale tym zbadamy nierówność i równania funkcyjne związane z sylogizmem hipotetycznym:

$$T(I(x,z), I(z,y)) \leqslant I(x,y), \quad x, y, z \in [0,1], \tag{HS}$$

$$I(x,y) = \sup_{z\in[0,1]} \left(T(I(x,z), I(z,y))\right), \quad x, y \in [0,1], \tag{CRI-GHS}$$

$$I_2(x,y) = \inf_{z\in[0,1]} I_1(C(x,z), C(z,y)), \quad x, y \in [0,1]. \tag{BK-GHS}$$

Rozpocznijmy od równania, które otrzymujemy ze wzoru (2.11) korzystając z własności interpolacji i przechodząc z wartościami odpowiednich zbiorów rozmytych na odcinek $[0,1]$, mianowicie, od równania (CRI-GHS). Często pojawiało się ono w literaturze m. in. [41, 27]. Zanim przejdziemy do omawiania jego pewnych rozwiązań, przyjrzyjmy się jego genezie. Przedstawiliśmy już jego jedno pochodzenie. Możemy je także wyprowadzić z innej ogólniejszej postaci.

Definicja 3.1 ([27, 44])**.** Niech T będzie t-normą oraz niech $I, J \in \mathcal{FI}$. Złożenie $\sup -T$ implikacji I, J określamy wzorem

$$(I \overset{T}{\circ} J)(x,y) := \sup_{z\in[0,1]} T\left(I(x,z), J(z,y)\right), \quad x, y \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Zauważmy, że jest to szczególny przypadek złożenia (1.54), gdyż implikacje rozmyte są pewnymi relacjami rozmytymi. Ponadto, możemy rozważyć szczególny przypadek wzoru (3.1). Niech $J = I$. Jeśli teraz $I \overset{T}{\circ} I = I$, co jest jednoznaczne z tym, iż implikacja I jest $\overset{T}{\circ}$-idempotentna, to wówczas także otrzymujemy równanie (CRI-GHS). Zanim jednak przejdziemy do omawiania jego rozwiązań, zatrzymajmy się przy złożeniu (3.1), które było już kilkukrotnie badane - w pracach [2] oraz [5, Rozdział 6.4.2], gdzie podano jego algebraiczne własności.

Przypomnimy tu główne wyniki dotyczące tego złożenia, przy czym najpierw przytoczymy odpowiednie oznaczenia. Niech

- $\mathcal{FI}_L = \{I \in \mathcal{FI} : I(1,x) = 0, x \in (0,1)\}$,
- $\mathcal{FI}_R = \{I \in \mathcal{FI} : I(x,0) = 0, x \in (0,1)\}$,
- $\mathcal{FI}_C = \mathcal{FI}_L \cap \mathcal{FI}_R$.

Twierdzenie 3.2 ([5, Theorem 6.4.13])**.** *Jeżeli T jest t-normą lewostronnie ciągłą, to $(\mathcal{FI}_L, \overset{T}{\circ}, \leqslant)$, $(\mathcal{FI}_R, \overset{T}{\circ}, \leqslant)$, $(\mathcal{FI}_C, \overset{*}{\circ}, \leqslant)$ są uporządkowanymi półgrupami implikacji rozmytych. Ponadto, $(\mathcal{FI}_L, \leqslant)$, $(\mathcal{FI}_R, \leqslant)$, $(\mathcal{FI}_C, \leqslant)$ są kratami zupełnymi i zupełnie rozdzielnymi.*

Twierdzenie 3.3 ([5, Theorem 6.4.15])**.** *Niech T bedzie dowolną t-normą. Wówczas implikacja $I_{\mathbf{RS}}$ jest elementem neutralnym złożenia* (3.1) *w $\mathcal{FI}$. Ponadto, jeżeli T jest lewostronnie ciągła, to $I_{\mathbf{RS}}$ jest też elementem neutralnym półgrup z Twierdzenia 3.2.*

Twierdzenie 3.4 ([5, Theorem 6.4.4])**.** *Niech T będzie t-normą oraz niech $I, J \in \mathcal{FI}$. Wówczas*

$$I \overset{T}{\circ} J \in \mathcal{FI} \Leftrightarrow (I \overset{T}{\circ} J)(1,0) = 0.$$

Korzystając niejako z konwencji występującej w złożeniu $\sup -T$ możemy także podać nową klasę implikacji rozmytych, opartą na agregacji dwóch już znanych. Tak zostało to wprowadzone w 2013 roku w pracy [12].

Twierdzenie 3.5 ([12, Proposition 3.2])**.** *Niech $I, J \in \mathcal{FI}$ oraz niech $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]$. Wówczas funkcja $K\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ dana wzorem*

$$K(x,y) = F(I(x,y), J(x,y)), \quad x, y \in [0,1]$$

jest implikacja rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy F jest funkcją agregującą.

Przykład 3.6. Niech $I = J = I_{\mathbf{LK}}$ oraz $F = T_{\mathbf{LK}}$. Wówczas

$$K(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ \max\{0, 1 - 2x + 2y\}, & x > y. \end{cases}$$

Ponadto,

$$K^{[n]}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ \max\{0, 1 - (n+1)x + (n+1)y\}, & x > y, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

gdzie

$$K^{[n]}(x,y) = \begin{cases} F(I(x,y), I(x,y)), & n = 1 \\ F(I(x,y), K^{[n-1]}(x,y)), & n \geqslant 2. \end{cases}$$

W tej części najpierw przedstawimy kilka interesujących własności par (T, I) spełniających równanie (CRI-GHS).

Pierwsza anlizowana przez nas własność wiąże się z Twierdzeniem 3.4. Możemy bowiem zadać pytanie, kiedy złożenie sup $-T$ dwóch takich implikacji rozmytych I, J, że pary $(T, I), (T, J)$ spełniają (CRI-GHS) dalej będzie je spełniać. Okazuje się, że nie jest to takie oczywiste. Temat ten jest obecnie przedmiotem badań, dlatego ograniczymy się tu do podania jedynie dwóch przykładów - pozytywnego i negatywnego.

Przykład 3.7. (i) Niech $T = T_{\mathbf{LK}}$, $I = I_{\mathbf{GG}}$ oraz niech $J = I_{\mathbf{LK}}$. Wówczas pary $(T, I), (T, J)$ spełniają (CRI-GHS) (wynika to z Twierdzenia 3.18, które wykażemy później) oraz $I \overset{T}{\circ} J = J$. Istotnie, ustalmy $x, y \in [0, 1]$. Jeśli $x \leqslant y$, to

$$\begin{aligned}(I \overset{T}{\circ} J)(x, y) &= \sup_{z\in[0,1]} T(I(x, z), J(z, y)) \\ &= T(I(x, x), J(x, y)) = T(1, 1) = 1.\end{aligned}$$

Natomiast, gdy $x > y$, to

$$\begin{aligned}(I \overset{T}{\circ} J)(x, y) &= \sup_{z\in[0,1]} T(I(x, z), J(z, y)) = \sup_{z\leqslant y} T(I(x, z), J(z, y)) \\ &\quad \vee \sup_{z\in(y,x)} T(I(x, z), J(z, y)) \vee \sup_{z\geqslant x} T(I(x, z), J(z, y)) \\ &= I(x, y) \vee \sup_{z\in(y,x)} T\left(\frac{z}{x}, 1 - z + 1\right) \vee J(x, y) \\ &= I(x, y) \vee \max\left\{0, \frac{z}{x} + 1 - z + y - 1\right\} \vee J(x, y) \\ &= 1 - x + y.\end{aligned}$$

W konsekwencji, $(I \overset{T}{\circ} J) = J$, stąd otrzymujemy, iż $(T, I \overset{T}{\circ} J)$ spełnia (CRI-GHS).

(ii) Niech $T = T_{\mathbf{D}}$ oraz niech implikacje I, J będą dane następującymi wzorami (por. [41, Lemma 4.2]):

$$I(x, y) = \begin{cases} 1, & y = 1, \\ N(x), & y < 1, \end{cases} \qquad x, y \in [0, 1],$$

$$J(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ y^2, & x > 0, \end{cases} \qquad x, y \in [0, 1].$$

Pokażemy, że pary $(T_{\mathbf{D}}, I)$, $(T_{\mathbf{D}}, J)$ spełniają (CRI-GHS), gdy N jest dowolną negacją rozmytą:

- dla pary $(T_{\mathbf{D}}, I)$, gdy $y = 1$ mamy

$$\begin{aligned}(I \overset{T}{\circ} I)(x,1) &= \sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), I(z,1)) \\ &= \sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z),1) = \sup_{z\in[0,1]} I(x,z) \\ &\geqslant I(x,1) = 1,\end{aligned}$$

natomiast dla $y < 1$ mamy

$$\begin{aligned}(I \overset{T}{\circ} I)(x,y) &= \sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), N(z)) = \sup_{z\in[0,1)} (T(N(x), N(z))) \vee T(1,0) \\ &= \sup_{z\in[0,1)} T(N(x), N(z)) \geqslant T(N(x), N(0)) = N(x),\end{aligned}$$

z drugiej strony, $T(N(x), N(z)) \leqslant \min\{N(x), N(z)\} \leqslant N(x)$, więc $(I \overset{T}{\circ} I)(x,y) = N(x)$.

- Dla pary $(T_{\mathbf{D}}, J)$, gdy $x = 0$ mamy

$$(J \overset{T}{\circ} J)(0,y) = \sup_{z\in[0,1]} T(J(0,z), J(z,y)) = T(1, J(0,y)) = 1,$$

natomiast dla $x > 0$ mamy

$$\begin{aligned}(J \overset{T}{\circ} J)(x,y) &= \sup_{z\in[0,1]} T(J(x,z), J(z,y)) \\ &= T(J(x,0),1) \vee \sup_{z\in(0,1]} T(J(0,z), J(z,y)) \\ &= T(0,1) \vee \sup_{z\in(0,1]} T(J(x,z), y^2) \\ &= \sup_{z\in(0,1]} T(J(x,z), y^2) \geqslant T(J(x,1), y^2) = y^2,\end{aligned}$$

a z drugiej strony $T(J(x,z), y^2) \leqslant y^2$. Dlatego też $(J \overset{T}{\circ} J)(x,y) = y^2$.

Ponadto,

$$(I \overset{T_{\mathbf{D}}}{\circ} J)(x,y) = \begin{cases} \max\{N(x), y^2\}, & x < 1, \\ y^2, & x = 1, \end{cases} \qquad x,y \in [0,1].$$

Jeżeli N jest największą negacją daną wzorem (1.18), to

$$(I \overset{T_{\mathbf{D}}}{\circ} J)(x,y) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ y^2, & x = 1, \end{cases} \qquad x,y \in [0,1].$$

Jednak, $((I \overset{T_{\mathbf{D}}}{\circ} J) \overset{T_{\mathbf{D}}}{\circ} (I \overset{T_{\mathbf{D}}}{\circ} J))(x,y) = 1$, $x,y \in [0,1]$. Istotnie, dla $x < 1$ mamy

$$1 \geqslant \sup_{z\in[0,1]} T(1, (I \overset{T_{\mathbf{D}}}{\circ} J)(z,y)) \geqslant \sup_{z\in[0,1)} (I \overset{T_{\mathbf{D}}}{\circ} J)(z,y) = 1,$$

a dla $x = 1$ mamy

$$\sup_{z\in[0,1]} T(z^2, (I \overset{T_{\mathbf{D}}}{\circ} J)(z, y)) \geqslant \sup_{z\in[0,1)} T(z^2, 1) = \lim_{z\to 1^-} z^2 = 1.$$

Stąd widzimy, że para $(T_{\mathbf{D}}, I \overset{T_{\mathbf{D}}}{\circ} J)$ nie spełnia (CRI-GHS) ($I \overset{T_{\mathbf{D}}}{\circ} J$ nie jest nawet implikacją rozmytą).

Kolejna własność związana jest z własnością rodziny $\mathcal{FI}$. Wiadomym jest, że $(\mathcal{FI}, \leqslant)$ tworzy zupełną, zupełnie rozdzielną kratę [5, Theorem 6.1.1] z operacjami $\vee$, $\wedge$ zdefiniowanymi następująco:

$$(I \vee J)(x, y) := \max\{I(x, y), J(x, y)\}, \quad x, y \in [0, 1],$$
$$(I \wedge J)(x, y) := \min\{I(x, y), J(x, y)\}, \quad x, y \in [0, 1].$$

Można tu zapytać, czy dla ustalonej t-normy T oraz rodziny

$$\mathcal{FI}_{\mathcal{GHS}} = \{I \in \mathcal{FI} : (T, I) \text{ spełnia (CRI-GHS)}\},$$

$(\mathcal{FI}_{\mathcal{GHS}}, \leqslant)$ będzie kratą?
Odpowiedź na powyższe pytanie jest negatywna. By to zabaczyć, przeanalizujmy następujące przykłady.

Przykład 3.8. Niech $I, J \in \mathcal{FI}$ oraz niech będą dane wzorami (zob. [41, Lemma 4.2]):

$$I(x, y) = \begin{cases} 1, & y = 1, \\ N(x), & y < 1, \end{cases} \qquad x, y \in [0, 1],$$

gdzie N jest negacją rozmytą oraz dla ustalonego $\varphi \in \Phi$

$$J(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \varphi(y), & x > 0, \end{cases} \qquad x, y \in [0, 1].$$

Pary $(T_{\mathbf{LK}}, I)$ i $(T_{\mathbf{LK}}, J)$ spełniają (CRI-GHS). Istotnie, zauważmy że dla pary $(T_{\mathbf{LK}}, I)$ oraz $y = 1$ mamy

$$(I \overset{T_{\mathbf{LK}}}{\circ} I)(x, 1) = \sup_{z\in[0,1]} T_{\mathbf{LK}}(I(x, z), I(z, 1)) = \sup_{z\in[0,1]} T_{\mathbf{LK}}(I(x, z), 1) = 1,$$

a dla $y < 1$ mamy

$$\begin{aligned}(I \overset{T_{\mathbf{LK}}}{\circ} I)(x, y) &= \sup_{z\in[0,1]} T_{\mathbf{LK}}(I(x, z), I(z, y)) \\ &= \sup_{z\in[0,1)} T_{\mathbf{LK}}(I(x, z), I(z, y)) \vee T_{\mathbf{LK}}(1, 0) \\ &= \sup_{z\in[0,1)} T_{\mathbf{LK}}(N(x), N(z)) \vee 0 \\ &= N(x).\end{aligned}$$

Zatem $I \overset{T_{\mathbf{LK}}}{\circ} I = I$. Podobnie można wykazać, że $(T_{\mathbf{LK}}, J)$ spełnia (CRI-GHS).

(i) Korzystając z [5, Theorem 6.1.1] otrzymujemy

$$(I \wedge J)(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ lub } y = 1, \\ \min\{N(x), \varphi(y)\}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Biorąc za N negację klasyczną $N_{\mathbf{C}}$ oraz $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ dostajemy

$$((I \wedge J) \overset{T_{\mathbf{LK}}}{\circ} (I \wedge J))(0.5, 0.25) = 0 \neq 0.5 = (I \wedge J)(0.5, 0.25).$$

Dlatego też, para $(T_{\mathbf{LK}}, I \wedge J)$ nie spełnia (CRI-GHS).

(ii) Zauważmy, że dla tych samych implikacji I, J mamy

$$(I \vee J)(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ lub } y = 1, \\ \max\{N(x), \varphi(y)\}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Tym razem niech $N(x) = 1 - x^2$, a $\varphi(x) = x$, $x \in [0,1]$. Otrzymujemy

$$((I \vee J) \overset{T_{\mathbf{LK}}}{\circ} (I \vee J))(1, 0) = 0.25 \neq 0 = (I \vee J)(1, 0).$$

Ponownie widzimy, że $(T_{\mathbf{LK}}, I \vee J)$ nie spełnia (CRI-GHS).

Zatem, ogólnie $(\mathcal{FI}_{\mathcal{GHS}}, \leqslant)$ nie tworzy kraty. Jednak przy pewnych założeniach można otrzymać działania kratowe.

Twierdzenie 3.9. *Niech T będzie t-normą, $I, J \in \mathcal{FI}$ oraz niech pary (T, I) i (T, J) spełniają* (CRI-GHS). *Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) Para $(T, (I \wedge J))$ spełnia (CRI-GHS).

(ii) $((I \overset{T}{\circ} J) \wedge (J \overset{T}{\circ} I)) \geqslant (I \wedge J)$.

Dowód. Ustalmy dowolne $x, y, z \in [0,1]$. Korzystając z monotoniczności T możemy zapisać, że

$$\begin{aligned} T\left((I \wedge J)(x,z), (I \wedge J)(z,y)\right) &= \\ &\min\{T(I(x,z), I(z,y)), T(I(x,z), J(z,y)), \\ &\qquad T(J(x,z), I(z,y)), T(J(x,z), J(z,y))\} \end{aligned}$$

Biorąc teraz supremum po z w $[0,1]$ i korzystając z ciągłości minimum, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sup_{z\in[0,1]} T\left((I \wedge J)(x,z), (I \wedge J)(z,y)\right) &= \\ &\min\{\sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), I(z,y)), \sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), J(z,y)), \\ &\qquad \sup_{z\in[0,1]} T(J(x,z), I(z,y)), \sup_{z\in[0,1]} T(J(x,z), J(z,y))\}, \end{aligned}$$

stąd

$$\Big((I \wedge J) \overset{T}{\circ} (I \wedge J)\Big)(x, y) = (\min\{I, I \overset{T}{\circ} J, J \overset{T}{\circ} I, J\})(x, y).$$

Dla dowodu $(i) \Rightarrow (ii)$ zauważmy, że gdy $(T, I \wedge J)$ spełnia (CRI-GHS), to

$$\min\{I, I \overset{T}{\circ} J, J \overset{T}{\circ} I, J\} = \min\{I, J\},$$

co oznacza, że $I \overset{T}{\circ} J \geqslant I,\ I \overset{T}{\circ} J \geqslant J$ oraz $J \overset{T}{\circ} I \geqslant I,\ J \overset{T}{\circ} I \geqslant J$, a wówczas $(I \overset{T}{\circ} J) \wedge (J \overset{T}{\circ} I) \geqslant I \wedge J$. Natomiast dla dowodu $(ii) \Rightarrow (i)$ zauważmy, że gdy $(I \overset{T}{\circ} J) \wedge (J \overset{T}{\circ} I) \geqslant I \wedge J$, to $\min\{I, I \overset{T}{\circ} J, J \overset{T}{\circ} I, J\} = \min\{I, J\}$, a więc $(T, I \wedge J)$ spełnia (CRI-GHS). □

Następne twierdzenie, dotyczące operacji $\vee$, może być udowonione w podobny sposób.

Twierdzenie 3.10. *Niech T będzie t-normą, $I, J \in \mathcal{FI}$ oraz niech pary (T, I) i (T, J) spełniają* (CRI-GHS). *Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *Para $(T, (I \vee J))$ spełnia* (CRI-GHS).

(ii) $((I \overset{T}{\circ} J) \vee (J \overset{T}{\circ} I)) \leqslant (I \vee J)$.

3.1 Równanie (CRI-GHS)

W tej części zajmiemy się powyższym równaniem dla różnych rodzin implikacji rozmytych. Rozpoczniemy od następującego lematu.

Lemat 3.11 (por. [41])**.** *Niech T będzie t-normą oraz niech $I \in \mathcal{FI}$. Jeżeli (T, I) spełnia* (CRI-GHS)*, to*

(i) $T(I(1, x), I(x, 0)) = 0$, *dla* $x \in [0, 1]$,

(ii) *jeżeli I spełnia* (NP)*, to (T, N) spełnia* (LC) *dla takiej negacji N, że $N \leqslant N_I$ oraz mamy też, iż $N_I \leqslant N_T$.*

Dowód. (i). W równaniu (CRI-GHS) wystarczy przyjąć $x = 1$ oraz $y = 0$. Wówczas $\sup_{z \in [0,1]} T(I(1, z), I(z, 0)) = 0$, zatem $T(I(1, t), I(t, 0)) = 0$ dla $t \in [0, 1]$.
(ii). Jeśli I spełnia (NP), to z ostatniej równości z (i) mamy $T(t, N_I(t)) = 0,\ t \in [0, 1]$. Zatem z monotoniczności T otrzymujemy pierwszą część tezy, z kolei druga jej część jest jasna z określenia N_T wzorem (1.21). □

Teraz podamy twierdzenie, które przy dość słabych założeniach pokazuje, że równanie (CRI-GHS) jest ogólniejsze od pozostałych wymienionych równań pochodzących od reguły złożeniowej Zadeha.

Twierdzenie 3.12. *Niech T będzie t-normą oraz niech $I \in \mathcal{FI}$. Jeżeli (T, I) spełnia* (CRI-GHS)*, to* *(i) jeżeli I spełnia* (NP), *to* (T, I) *spełnia* (CRI-GMP),

(ii) (T, I, N_I) *spełnia* (CRI-GMT),

(iii) jeżeli N_I jest negacją silną, to (T, I, N_I) *spełnia* (CRI-GRA).

Dowód. (i). W równaniu (CRI-GHS) wystarczy wziąć $x = 1$, wówczas dla $y \in [0, 1]$ otrzymujemy

$$\sup_{z\in[0,1]} T(I(1, z), I(z, y)) = I(1, y), \tag{3.2}$$

zatem $\sup_{z\in[0,1]} T(z, I(z, y)) = y$.
(ii). Weźmy $y = 0$, wtedy dla $x \in [0, 1]$ w równaniu (CRI-GHS) mamy

$$\sup_{z\in[0,1]} T(I(x, z), I(z, 0)) = I(x, 0),$$

stąd $\sup_{z\in[0,1]} T(I(x, z), N_I(z)) = N_I(x)$.
(iii). W równaniu (CRI-GHS) przyjmijmy $y = 0$, $x = N_I(t)$ dla ustalonego $t \in [0, 1]$ oraz $N = N_I$, wówczas

$$\sup_{z\in[0,1]} T(I(N_I(t), z), I(z, 0)) = N_I(N_I(t))$$
$$\sup_{z\in[0,1]} T(I(N_I(t), z), N_I(z)) = t.$$

Skoro N_I jest silna, to ostatnia równość zachodzi dla wszystkich $t \in [0, 1]$. □

3.1.1 (CRI-GHS) dla R-implikacji

Jak wiadomo R-implikacje to funkcje indukowane z t-norm lub nawet koniunkcji rozmytych (z pewnymi dodatkowymi własnościami - zob. Uwaga 1.47). Dlatego naturalne jest pytanie o związek między takim generatorem a t-normą z równania (CRI-GHS).

Pytanie 1. Czy dla dowolnej t-normy T, para (T, I_T) spełnia równanie (CRI-GHS)? Odpowiedź na powyższe pytanie jest negatywna, co wykażemy w poniższym przykładzie.

Przykład 3.13. Niech $T = T_{\mathbf{D}}$. R-implikacją indukowaną z $T_{\mathbf{D}}$ jest implikacja Webera $I_{\mathbf{WB}}$ dana wzorem (1.30). Dla ustalonych $x, y \in [0, 1]$ mamy:

- jeżeli $x < 1$, to

$$\sup_{z\in[0,1]} (T_{\mathbf{D}}(I_{\mathbf{WB}}(x, z), I_{\mathbf{WB}}(z, y))) = \sup_{z\in[0,1]} T_{\mathbf{D}}(1, I_{\mathbf{WB}}(z, y)) = \sup_{z\in[0,1]} I_{\mathbf{WB}}(z, y) = 1,$$

- jeżeli $x = 1$, to

$$\begin{aligned}\sup_{z\in[0,1]} (T_{\mathbf{D}}(I_{\mathbf{WB}}(x,z), I_{\mathbf{WB}}(z,y))) &= \sup_{z\in[0,1]} (T_{\mathbf{D}}(z, I_{\mathbf{WB}}(z,y))) \\ &= \sup_{z\in[0,1)} T_{\mathbf{D}}(z,1) \vee y = \lim_{z\to 1^-} z \vee y = 1.\end{aligned}$$

Zatem $(I_{\mathbf{WB}} \overset{T_{\mathbf{D}}}{\circ} I_{\mathbf{WB}})(x,y) = 1,\ x,y \in [0,1]$, więc $I_{\mathbf{WB}} \overset{T_{\mathbf{D}}}{\circ} I_{\mathbf{WB}}$ nie jest nawet implikacją rozmytą.

Jednak przy dodatkowym założeniu znajdziemy wiele innych takich implikacji I, że $(T_{\mathbf{D}}, I)$ spełnia (CRI-GHS).

Stwierdzenie 3.14. *Jeżeli implikacja rozmyta I spełnia* (OP)*, to para* $(T_{\mathbf{D}}, I)$ *spełnia* (CRI-GHS).

Dowód. Ustalmy $x, y \in [0,1]$. Jeżeli $x \leqslant y$, to $I(x,y) = 1$ oraz

$$\begin{aligned}\sup_{z\in[0,1]} T_{\mathbf{D}}(I(x,z), I(z,y)) &= \sup_{z\in[0,x)} T_{\mathbf{D}}(I(x,z), I(z,y)) \vee \sup_{z\in[x,y]} T_{\mathbf{D}}(I(x,z), I(z,y)) \\ &\quad \vee \sup_{z\in(y,1]} T_{\mathbf{D}}(I(x,z), I(z,y)) \\ &= \sup_{z\in[0,x)} T_{\mathbf{D}}(I(x,z),1) \vee \sup_{z\in[x,y]} T_{\mathbf{D}}(1,1) \vee \sup_{z\in(y,1]} T_{\mathbf{D}}(1, I(z,y)) \\ &= 1 \vee 1 \vee 1 = 1.\end{aligned}$$

Natomiast jeżeli $x > y$, to $I(x,y) < 1$ oraz

$$\begin{aligned}\sup_{z\in[0,1]} T_{\mathbf{D}}(I(x,z), I(z,y)) &= \sup_{z\in[0,y]} T_{\mathbf{D}}(I(x,z), I(z,y)) \vee \sup_{z\in(y,x)} T_{\mathbf{D}}(I(x,z), I(z,y)) \\ &\quad \vee \sup_{z\in[x,1]} T_{\mathbf{D}}(I(x,z), I(z,y)) \\ &= \sup_{z\in[0,y]} T_{\mathbf{D}}(I(x,z),1) \vee \sup_{z\in(y,x)} T_{\mathbf{D}}(I(x,z), I(z,y)) \\ &\quad \vee \sup_{z\in[x,1]} T_{\mathbf{D}}(1, I(z,y)) \\ &= I(x,y) \vee 0 \vee I(x,y) = I(x,y),\end{aligned}$$

co oznacza, że $(T_{\mathbf{D}}, I)$ spełnia (CRI-GHS). □

Pytanie 2. Jakie dodatkowe założenia powinna spełniać t-norma T, aby para (T, I_T) spełniała (CRI-GHS)?
Odpowiedź na to pytanie daje nam poniższe twierdzenie, udowodnione w 2004 roku.

Twierdzenie 3.15 ([25, Theorem 6])**.** *Niech $U \neq \emptyset$, $F, G, H \in \mathcal{F}(U)$ oraz niech $\pi, \kappa\colon [0,1]^2 \to [0,1]$. Jeżeli* *(i)* π *będzie zwrotna, tzn.* $\forall_{r\in[0,1]}\ \pi(r,r)=1$,

(ii) $\forall_{r\in[0,1]}\ \kappa(1,r)=r$,

(iii) π *jest* κ*-przechodnia, tzn.* $\forall_{r,s,t\in[0,1]}\ \kappa(\pi(r,s),\pi(s,t))\leqslant\pi(r,t)$,

(iv) $\forall_{x\in U}\ \exists_{y\in U}\ F(x)=G(y)$,

to

$$\pi(F(x),H(y))=\sup\{\kappa(\pi(F(x),G(z)),\pi(G(z),H(y))) : z\in U\}.$$

To twierdzenie wyrażone w nieco ogólniejszym języku możemy zastosować do naszego problemu. Wystarczy, że przyjmiemy:

- $\kappa=T$,
- $\pi=I_T$,
- $F(x)=H(x)=G(x)=x,\ x\in U=[0,1]$.

Przypomnijmy, że jeśli t-norma T jest lewostronnie ciągła, to I_T jest T-przechodnia [20, Proposition 1.6]. Zatem następujący wniosek jest oczywisty.

Wniosek 3.16. Jeżeli T jest t-normą lewostronnie ciągłą, to para (T,I_T) spełnia (CRI-GHS).

Okazuje się, że implikacja odwrotna także jest prawdziwa.

Twierdzenie 3.17. *Niech* T *będzie t-normą. Wówczas następujące warunki sa równoważne:*

(i) T *jest lewostronnie ciągła.*

(ii) (T,I_T) *spełnia* (CRI-GHS).

Dowód. $(i)\Rightarrow(ii)$. Ta implikacja jest oczywista z Wniosku 3.16.
$(ii)\Rightarrow(i)$. Przypuśćmy, że para (T,I_T) spełnia (CRI-GHS), ale T nie jest lewostronnie ciągła. Oznacza to, że (T,I_T) nie spełnia (RP). Ponadto, zauważmy, że dla dowolnej t-normy T^* spełniona jest poniższa implikacja

$$\forall_{x,y,z\in[0,1]}\quad T^*(x,z)\leqslant y\Rightarrow I_{T^*}(x,y)\geqslant z,$$

gdyż dla ustalonych $x,y,z\in[0,1]$, jeżeli $z\in\{t\in[0,1]|T^*(x,t)\leqslant y\}$, to oznacza, że $z\leqslant\sup\{t\in[0,1]|T^*(x,t)\leqslant y\}=I_{T^*}(x,y)$. Zatem, jeśli T nie jest lewostronnie ciągła, to istnieją takie $x,y,z\in[0,1]$, że $I_T(x,y)\geqslant z$ i $T(x,z)>y$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} y<T(x,z)&\leqslant T(x,I_T(x,y))=T(I_T(1,x),I_T(x,y))\\ &\leqslant\sup_{t\in[0,1]}T(I_T(1,t),I_T(t,y))=I_T(1,y)=y,\end{aligned}$$

co daje sprzeczność. $\square$

Zauważmy, że także każda t-norma $T^* \leqslant T$ spełnia założenia Twiedzenia 3.15. Ponadto, możemy podać następujące twierdzenie charakteryzujące t-normy lewostronnie ciągłe.

Twierdzenie 3.18. *Niech T będzie t-normą lewostronnie ciągłą, a T^* niech będzie dowolną t-normą. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) para (T^*, I_T) spełnia (CRI-GHS).

(ii) $T^* \leqslant T$.

Dowód. $(ii) \Rightarrow (i)$. Jest oczywista z Twierdzenia 3.15.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Tutaj skorzystamy z własności (RP), którą spełnia dowolnie ustalona lewostronnie ciągła t-norma T. Weźmy $x, z \in [0,1]$, niech $y = T(x,z)$. Korzystając z założenia oraz warunku (RP), który w naszym przypadku ma postać

$$T(x,z) \leqslant T(x,z) \Leftrightarrow I_T(x, T(x,z)) \geqslant z$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} T(x,z) = I_T(1, T(x,z)) &= \sup_{t\in[0,1]} T^*(I_T(1,t), I_T(t, T(x,z))) \\ &\geqslant T^*(I_T(1,x), I_T(x, T(x,z))) \geqslant T^*(x,z). \end{aligned}$$

□

Przykład 3.19. Poniższa tabela zawiera informacje dotyczące par t-norm i R-implikacji spełniających (CRI-GHS). Zauważmy, że $T_{\mathbf{nM}}$, która nie jest porównywalna z $T_{\mathbf{LK}}$ ani $T_{\mathbf{P}}$ nie spełnia tego równania z R-implikacjami indukowanymi z tych t-norm.

	$I_{\mathbf{WB}}$	$I_{\mathbf{FD}}$	$I_{\mathbf{LK}}$	$I_{\mathbf{GG}}$	$I_{\mathbf{GD}}$
$T_{\mathbf{D}}$	×	✓	✓	✓	✓
$T_{\mathbf{nM}}$	×	✓	×	×	✓
$T_{\mathbf{LK}}$	×	✓	✓	✓	✓
$T_{\mathbf{P}}$	×	×	×	✓	✓
$T_{\mathbf{M}}$	×	×	×	×	✓

Tabela 3.1: Pary (T, I_T) a (CRI-GHS).

Powróćmy teraz do pierwszej formy złożenia sup $-T$, gdzie T jest t-normą minimum (1.57). Takim przypadkiem (CRI-GHS) zajmował się Vemuri [41], który w swoim artykule zbadał właśnie to równanie dla ustalonej t-normy $T_{\mathbf{M}}$. Teraz na podstawie powyższych twierdzeń, jego wyniki zostały uogólnione, a także możemy uzasadnić w inny sposób rezultaty z jego pracy. Pierwsza uwaga dotyczy Lematu 3.11, który mówi o jednym z warunków koniecznych spełniania (CRI-GHS). Zauważmy, że w przypadku gdy t-norma $T = T_{\mathbf{M}}$, to jedyną taką negacją N, że $(T_{\mathbf{M}}, N)$ spełnia (LC) jest najmniejsza negacja rozmyta $N_{\mathbf{D_1}}$ dana wzorem (1.17). Jeśli T jest dowolną t-normą takich negacji jest więcej, co widzieliśmy w Przykładzie 1.40 i Twierdzeniu 1.39. Ponadto, Vemuri [41, Theorem 3.6] podał także wynik dotyczący R-implikacji, które wraz z t-normą minimum spełniają (CRI-GHS). W rozdziale tym jest to następujący wniosek z Twierdzenia 3.18.

Wniosek 3.20. Niech $T = T_{\mathbf{M}}$ oraz niech I będzie R-implikacją. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) (T, I) spełnia (CRI-GHS).

(ii) $I = I_{\mathbf{GD}}$.

Dowód. Zauważmy, że $T_{\mathbf{M}}$ jest największą t-normą. Gdyby para $(T_{\mathbf{M}}, I_{T_2})$ spełniała (CRI-GHS) dla pewnej t-normy T_2, to na podstawie Twierdzenia 3.18 mielibyśmy $T_{\mathbf{M}} \leqslant T_2$. Jednak jedyną t-normą T_2, która spełnia tę nierówność jest $T_{\mathbf{M}}$. Stąd $I_{T_2} = I_{T_{\mathbf{M}}} = I_{\mathbf{GD}}$. □

Uwaga 3.21. Oczywiście, przy ustaleniu implikacji $I_{\mathbf{GD}}$ analogiczny fakt nie zachodzi. $(T, I_{\mathbf{GD}})$ spełnia (CRI-GHS) także m. in. dla $T = T_{\mathbf{D}}$ (ze Stwierdzenia 3.14 oraz tego, iż $I_{\mathbf{GD}}$ spełnia (OP)) oraz dla wszystkich innych z Przykładu 3.19.

Zauważmy też, że istnieją pary (T, I) spełniające (CRI-GHS), mimo, iż ani T nie jest t-normą lewostronnie ciągłą, ani I nie spełnia (IP) (co jest równoważne założeniu (i) z Twierdzenia 3.15). Przykładem tu może być $T = T_{\mathbf{D}}$ oraz $I = I_{\mathbf{KD}}$ dana wzorem (1.31).

3.1.2 (CRI-GHS) dla (S, N)-implikacji

W tym podrozdziale będziemy rozważać równanie (CRI-GHS) dla ustalonej t-normy ciągłej T. Dlatego rozpoczniemy od t-normy minimum.

Twierdzenie 3.22 ([41, Theorem 3.3])**.** *Niech I będzie (S, N)-implikacją. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $(T_{\mathbf{M}}, I)$ *spełnia* (CRI-GHS).

(ii) $I = I_{\mathbf{D}}$.

Kolejnym krokiem jest rozważenie t-norm ciągłych archimedesowych. Jako pierwszą weźmy t-normę ścisłą. Jak wiemy jest ona Φ-sprzężona z t-normą produktową (Twierdzenie 1.25). Ponadto, zauważmy, że (S, N)-implikacje spełniają (NP), dlatego spełniony jest Lemat 3.11. Możemy zatem sformułować następujący fakt.

Twierdzenie 3.23. *Niech T będzie t-normą ścisłą oraz niech I będzie (S,N)-implikacją. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) (T,I) *spełnia* (CRI-GHS).

(ii) $I = I_{\mathbf{D}}$.

Dowód. $(i) \Rightarrow (ii)$. Jeżeli (T,I) spełnia (CRI-GHS), to na mocy Lematu 3.11 mamy $T(x, N_I(x)) = 0,\ x \in [0,1]$. Skoro $T(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x)\cdot\varphi(y)),\ x,y \in [0,1]$, dla pewnego $\varphi \in \Phi$, to otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\varphi(x)\cdot\varphi(N_I(x))) &= 0,\\ \varphi(x) = 0 \vee \varphi(N_I(x)) &= 0,\\ x = 0 \vee N_I(x) &= 0, \end{aligned}$$

co oznacza, że $N_I(x) = 0$ dla $x > 0$. Zatem $N_I = N_{\mathbf{D_1}}$. Otrzymujemy wtedy, że

$$\begin{aligned} I(x,y) = S(N_{\mathbf{D_1}}(x), y) &= \begin{cases} S(1,y), & x = 0\\ S(0,y), & x > 0 \end{cases}\\ &= \begin{cases} 1, & x = 0\\ y, & x > 0 \end{cases} = I_{\mathbf{D}}(x,y). \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Ustalmy $x, y \in [0,1]$. Jeśli $x = 0$, to mamy

$$\begin{aligned} \sup_{z\in[0,1]} \varphi^{-1}(\varphi(I_{\mathbf{D}}(0,z))\cdot\varphi(I_{\mathbf{D}}(z,y))) &= \sup_{z\in[0,1]} \varphi^{-1}(1\cdot\varphi(I_{\mathbf{D}}(z,y)))\\ &= \sup_{z\in[0,1]} I_{\mathbf{D}}(z,y) = 1 = I_{\mathbf{D}}(0,y), \end{aligned}$$

natomiast dla $x > 0$ mamy

$$\begin{aligned} \sup_{z\in[0,1]} \varphi^{-1}(\varphi(I_{\mathbf{D}}(x,z))\cdot\varphi(I_{\mathbf{D}}(z,y))) &= \sup_{z\in[0,1]} \varphi^{-1}(\varphi(z)\cdot\varphi(I_{\mathbf{D}}(z,y)))\\ &= 0 \vee \sup_{z\in(0,1]} \varphi^{-1}(\varphi(z)\cdot\varphi(y))\\ &= y = I_{\mathbf{D}}(x,y). \end{aligned}$$

□

Niech teraz T będzie t-normą nilpotentną, czyli Φ-sprzężoną z t-normą Łukasiewicza. Możemy w tym przypadku sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.24. *Niech T będzie t-normą nilpotentną (tzn. istnieje takie $\varphi \in \Phi$, że $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$) oraz niech I (S,N)-implikacją. Jeżeli (T,I) spełnia* (CRI-GHS)*, to $I(x,y) \leqslant \varphi^{-1}(1 - \varphi(x) + \varphi(y)),\ x,y \in [0,1]$.*

Dowód. Ustalmy $\varphi \in \Phi$ oraz niech $T(x,y) = \varphi^{-1}(\max\{0, \varphi(x) + \varphi(y) - 1\})$ dla $x, y \in [0,1]$. Z (CRI-GHS) mamy

$$I(x,y) = \sup_{t \in [0,1]} T(I(x,t), I(t,y)).$$

Dla $x = 1$

$$I(1,y) = y = \sup_{t \in [0,1]} T(t, I(t,y)),$$

zatem dla wszystkich $t \in [0,1]$ mamy

$$\begin{aligned} y &\geqslant T(t, I(t,y)) \\ y &\geqslant \varphi^{-1}(\max\{0, \varphi(t) + \varphi(I(t,y)) - 1\}), \end{aligned}$$

stąd

$$\begin{aligned} \varphi(y) &\geqslant \varphi(t) + \varphi(I(t,y)) - 1 \\ I(t,y) &\leqslant \varphi^{-1}(1 - \varphi(t) + \varphi(y)). \end{aligned}$$

$\square$

Zauważmy, że w powyższym przypadku, $I(x,y) \leqslant (I_{\mathbf{LK}})_\varphi(x,y)$ dla ustalonego $\varphi \in \Phi$ oraz $x > y$. Istnieje wiele implikacji, które spełniają ten warunek, nie tylko $(I_{\mathbf{LK}})_\varphi$, ale także implikacja Fodora $(I_{\mathbf{FD}})_\varphi$ czy Kleene-Dienesa $(I_{\mathbf{KD}})_\varphi$. Okazuje się, że pary $(T, (I_{\mathbf{FD}})_\varphi)$, $(T, (I_{\mathbf{KD}})_\varphi)$ spełniają (CRI-GHS). Na ogół jednak, twierdzenie odwrotne nie zachodzi.

Przykład 3.25. Niech $T(x,y) = \max\{0, x+y-1\}$, $S(x,y) = x + y - xy$, $x, y \in [0,1]$ oraz $N(x) = 1 - x$. Wówczas $I_{S,N}(x,y) = I_{\mathbf{RC}}(x,y) = 1 - x + xy$, zatem $I_{\mathbf{RC}}(x,y) \leqslant 1 - x + y$. Niech $x = 0,5$, $y = 0.4$. Wówczas $I_{S,N}(x,y) = 0.7$. Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} \sup_{z \in [0,1]} \max\{0, I_{S,N}(0.5, z) + I_{S,N}(z, 0.4) - 1\} &= \sup_{z \in [0,1]} \max\{0, 0.5 - 0.1z\} \\ &= 0.5 < 0.7. \end{aligned}$$

Zatem $(T, I_{S,N})$ nie spełnia (CRI-GHS).

Na podstawie powyższych przykładów możemy podać jedynie twierdzenie mówiące o warunkach koniecznych na to żeby (T, I) spełniała (CRI-GHS), gdzie T jest t-normą ciągłą, a I (S,N)-implikacją.

Wniosek 3.26. Niech T będzie taką t-normą ciągłą, że $T = < a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha >_{\alpha \in A}$, a I (S,N)-implikacją. Wówczas jeżeli:

(i) $a_{\alpha_1} = 0 \;\wedge\; e_{\alpha_1} = 1 \;\wedge\; T_{\alpha_1}$ jest nilpotentna, tzn. istnieje takie $\varphi \in \Phi$, że $T_{\alpha_1} = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$ to $I(x,y) \leqslant \varphi^{-1}(1-\varphi(x)+\varphi(y))$ dla $x, y \in [0,1]$.

(ii) $a_{\alpha_1} > 0$ lub $(a_{\alpha_1} = 0 \wedge e_{\alpha_1} < 1)$ lub T_{α_1} jest ścisła, to (T, I) spełnia (CRI-GHS) wtedy i tylko wtedy, gdy $I = I_{\mathbf{D}}$.

Dowód. (i) : korzystamy z Twierdzenia 3.24.
(ii) : Dla tego przypadku rozważmy najpierw negację indukowaną N_T. Ma ona następującą postać:

$$N_T(x) = \begin{cases} e_{\alpha_1}\varphi^{-1}(1-\varphi(\frac{x}{e_{\alpha_1}})), & a_{\alpha_1} = 0 \wedge x \in [0, e_{\alpha_1}] \text{ oraz } T_{\alpha_1} \text{ jest nilpotentna} \\ N_{\mathbf{D_1}}(x), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Istotnie, niech $a_{\alpha_1} = 0$, ustalmy $x \in [0, e_{\alpha_1}]$ oraz zauważmy, że wtedy $N_T(x) = \sup\{y \in [0,1] \mid e_{\alpha_1} T_{\alpha_1}(\frac{x}{e_{\alpha_1}}, \frac{y}{e_{\alpha_1}}) = 0\}$. Jeżeli T_{α_1} jest ścisła, to $N_T(x) = N_{\mathbf{D_1}}(x)$, a z monotoniczności $N_T(x) = N_{\mathbf{D_1}}(x),\ x \in [0,1]$. Jednak, jeśli T_{α_1} jest nilpotentna, to

$$e_{\alpha_1}\varphi^{-1}(\max\left\{0, \varphi\left(\frac{x}{e_{\alpha_1}}\right) + \varphi\left(\frac{y}{e_{\alpha_1}}\right)\right\} - 1) = 0$$
$$y = e_{\alpha_1}\varphi^{-1}\left(1 - \varphi\left(\frac{x}{e_{\alpha_1}}\right)\right).$$

Zatem $N_T(x) = e_{\alpha_1}\varphi^{-1}(1-\varphi(\frac{x}{e_{\alpha_1}}))$.
Dla $x \notin [0, e_{\alpha_1}]$ oraz $y \in [0,1]$ mamy $T(x,y) = \min\{x,y\}$ lub $T(x,y) = a_{\alpha_2} + e_{\alpha_2} T_{\alpha_2}(\frac{x-a_{\alpha_2}}{e_{\alpha_2}-a_{\alpha_2}}, \frac{y-a_{\alpha_2}}{e_{\alpha_2}-a_{\alpha_2}}) \geqslant a_{\alpha_2}$, jeśli $x \in [a_{\alpha_2}, e_{\alpha_2}]$. W obu tych przypadkach uzyskujemy, że $T(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$, skąd $N_T(x) = N_{\mathbf{D_1}}(x)$.
Jeżeli natomiast $a_{\alpha_1} > 0$, to $a_{\alpha_1} + (e_{\alpha_1} - a_{\alpha_1}) T_{\alpha_1}(\frac{x-a_{\alpha_1}}{e_{\alpha_1}-a_{\alpha_1}}, \frac{y-a_{\alpha_1}}{e_{\alpha_1}-a_{\alpha_1}}) \geqslant a_{\alpha_1}$, zatem zgodnie z definicją N_T otrzymujemy, że

$$N_T(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Wówczas dla takiej t-normy T, że $N_T = N_{\mathbf{D_1}}$ mamy, iż (T, N) spełnia (LC) dla $N \leqslant N_T$, a więc $N = N_T$. Dalej, skoro $N_{I_{S,N}} = N = N_{\mathbf{D_1}}$, to ze spełniania przez parę $(T, N_{I_{S,N}})$ warunku koniecznego (LC) dla (CRI-GHS) otrzymujemy, że $I = I_{\mathbf{D}}$.

Pozostaje rozważyć przypadek kiedy $N_T \neq N_{\mathbf{D_1}}$:

- $a_{\alpha_1} = 0,\ e_{\alpha_1} < 1$ oraz T_{α_1} jest nilpotentna - wtedy istnieje takie $\varphi \in \Phi$, że $T_{\alpha_1} = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$. Wówczas dla dowolnie ustalonych $x, y \in [0,1]$ istnieje takie $z \in [0,1]$, że $I(x,z) > e_{\alpha_1}$ lub $I(z,y) > e_{\alpha_1}$. Wówczas

$$T(I(x,z), I(z,y)) = \min\{I(x,z), I(z,y)\} \leqslant \sup_{z\in[0,1]} \min\{I(x,z), I(z,y)\},$$

więc supremum jest osiągnięte dla t-normy minimum, a to implikuje, że $I = I_{\mathbf{D}}$. Istotnie, oznaczmy jako $A = \{z \in [0,1] : I(x,z), I(z,y) \in [a_{\alpha_1}, e_{\alpha_1}]\}$

$$\begin{aligned}\sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), I(z,y)) &= \sup_{z\in A} T(I(x,z), I(z,y)) \vee \sup_{z\notin A} T(I(x,z), I(z,y)) \\ &= \sup_{z\in A} \varphi^{-1}(\max\{0, \varphi(I(x,z)) + \varphi(I(z,y)) - 1\}) \\ &\quad \vee \sup_{z\notin A} T(I(x,z), I(z,y)) = \sup_{z\notin A} T(I(x,z), I(z,y)),\end{aligned}$$

gdyż $\sup_{z\in A} \varphi^{-1}(\max\{0, \varphi(I(x,z)) + \varphi(I(z,y)) - 1\}) \leqslant e_{\alpha_1}$, a $T(I(x,z), I(z,y)) = \min\{I(x,z), I(z,y)\} \geqslant e_{\alpha_1}$, gdy $I(x,z) \notin A$ lub $I(z,y) \notin A$ (w szczególności dla $z = 1$ mamy $\min\{I(x,z), I(z,y)\} = y > e_{\alpha_1}$, dla $y > e_{\alpha_1}$).

Stąd na podstawie poprzednich dowodów otrzymujemy, iż $I = I_{\mathbf{D}}$.

□

3.1.3 (CRI-GHS) dla implikacji Yagera

Tutaj przedstawimy częściowe wyniki.

Twierdzenie 3.27. *Niech T będzie t-normą, a I taką f-implikacją, że $f(0) = \infty$. Wtedy*

(i) jeżeli $T = T_{\mathbf{M}}$, to (T, I) nie spełnia (CRI-GHS)*,*

(ii) jeżeli T jest taką t-normą ścisłą, że f jest jej addytywnym generatorem, to (T, I) nie spełnia (CRI-GHS)*.*

Dowód. Zobacz dowód Twierdzenia 3.15 [41], na mocy [5, Theorem 7.2.22]. □

Poniższe wyniki pochodzą z pracy [24] napisanej wspólnie z P. Helbinem oraz M. Baczyńskim.

Twierdzenie 3.28 ([24, Corollary 4.4])**.** *Niech I będzie taką g-implikacją, że $g(1) < \infty$. Wówczas $I_{\mathbf{GG}}$ jest jedyną implikacją z tej rodziny, że $(T, I_{\mathbf{GG}})$ dla pewnej t-normy T. Ponadto, $(T, I_{\mathbf{GG}})$ spełnia* (CRI-GHS) *wtedy i tylko wtedy, gdy $T \leqslant T_{\mathbf{P}}$.*

Twierdzenie 3.29 ([24, Theorem 4.6])**.** *Niech I będzie taką g-implikacją, że $g(1) = \infty$. Wówczas:*

(i) jeżeli $T = T_{\mathbf{M}}$, to (T, I) nie spełnia (CRI-GHS)*,*

(ii) jeżeli T jest taką ścisłą t-normą, że $\frac{1}{g}$ jest jej generatorem addytywnym oraz $\frac{1}{0} = \infty$ i $\frac{1}{\infty} = 0$. Wtedy (T, I) nie spełnia (CRI-GHS)*.*

3.2 Nierówność (HS)

W tej cześci przedstawimy kilka informacji dotyczących nierówności (HS). Rozpoczniemy od ogólnych uwag.

Stwierdzenie 3.30. *Niech C będzie semikopułą oraz niech $I \in \mathcal{FI}$ spełnia* (NP). *Jeżeli (C, I) spełnia nierówność* (HS)*, to:*

(i) (C, N) *spełnia* (LC) *dla* $N \leqslant N_I$,

(ii) I *spełnia warunek:* $I(x, y) = 1 \Rightarrow x \leqslant y,\ x, y \in [0, 1]$,

(iii) jeśli $C = T$ *jest t-normą oraz* $N \neq N_{\mathbf{D_1}}$, *to* T *ma dzielniki zera,*

(iv) jeśli $C = T$ *jest t-normą ciągłą oraz* $N_I(x) \neq 0,\ x \in [0, 1)$, *to istnieje takie* $\varphi \in \Phi$, *że* $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$.

Dowód. (*i*). Podobnie jak Lemat 3.11.
(*ii*). Przypuśćmy, że istnieją takie $z, y \in [0, 1]$, że $I(z, y) = 1$ i $z > y$, weźmy też $x = 1$. Wówczas

$$\begin{aligned} C(I(1, z), I(z, y)) &\leqslant I(x, y), \\ C(I(1, z), 1) &\leqslant I(1, y), \\ z &\leqslant y, \end{aligned}$$

co daje sprzeczność.
(*iii*). Skoro $N \neq N_{\mathbf{D_1}}$, to istnieje taki $x \in (0, 1)$, że $N(x) > 0$, co oznacza, że T ma dzielnika zera, gdyż (T, N) spełnia (LC).
(*iv*). Skoro $N_I(x) > 0$ dla $x \in [0, 1)$, to każdy taki x jest dzielnikiem zera T, a jedyną taką t-normą ciągłą, że zbiór dzielników zera jest równy $(0, 1)$ jest $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$. □

Zauważmy, że oczywiście jeżeli para (T, I) spełnia (CRI-GHS), to spełnia także (HS). Implikacja przeciwna zachodzi jednak przy dodatkowym warunku.

Lemat 3.31 (por. [29, Proposition 3.5])**.** *Niech T będzie semikopułą oraz niech $I \in \mathcal{FI}$ spełnia* (IP). *Jeżeli para (T, I) spełnia* (HS)*, to spełnia także* (CRI-GHS).

Dowód. Ustalmy $x, y, t \in [0, 1]$. Wówczas otrzymujemy

$$\sup_{z \in [0,1]} T(I(x, z), I(z, y)) \geqslant T(I(x, x), I(x, y)) = T(1, I(x, y)) = I(x, y),$$

z drugiej strony, oczywiście skoro

$$T(I(x, t), I(t, y)) \leqslant I(x, y),$$

to

$$\sup_{z\in[0,1]} T(I(x,z), I(z,y)) \leqslant I(x,y).$$

Zatem (T, I) spełnia (CRI-GHS). □

Uwaga 3.32. Własność (IP) nie jest warunkiem koniecznym dla implikacji z powyższego lematu – nie wszystkie takie $I \in \mathcal{FI}$, że (T, I) spełnia (CRI-GHS) posiadają własność (IP), co możemy zobaczyć w poniższym przykładzie.

Przykład 3.33. Niech $I = I_{\mathbf{0}}$ będzie dana wzorem (1.35), a T niech będzie dowolną t-normą. $I_{\mathbf{0}}$ nie spełnia (IP), a mimo para $(T, I_{\mathbf{0}})$ spełnia (CRI-GHS) (a więc i (HS)). Istotnie, niech $x = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} 1 \geqslant \sup_{z\in[0,1]} T(I_{\mathbf{0}}(0,z), I_{\mathbf{0}}(z,y)) &= \sup_{z\in[0,1]} T(1, I_{\mathbf{0}}(z,y)) \geqslant T(1, I_{\mathbf{0}}(0,y)) \\ &= 1 = I_{\mathbf{0}}(0,y), \end{aligned}$$

gdy $y = 1$ mamy

$$\begin{aligned} 1 \geqslant \sup_{z\in[0,1]} T(I_{\mathbf{0}}(x,z), I_{\mathbf{0}}(z,1)) &= \sup_{z\in[0,1]} T(I_{\mathbf{0}}(x,z), 1) \geqslant T(I_{\mathbf{0}}(x,1), 1) \\ &= 1 = I_{\mathbf{0}}(x,1). \end{aligned}$$

Ponadto, dla $x \in (0, 1]$ i $y \in [0, 1)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sup_{z\in[0,1]} T(I_{\mathbf{0}}(x,z), I_{\mathbf{0}}(z,y)) &= T(I_{\mathbf{0}}(x,0), I_{\mathbf{0}}(0,y)) \vee \sup_{z\in(0,1)} T(I_{\mathbf{0}}(x,z), I_{\mathbf{0}}(z,y)) \\ &\quad \vee T(I_{\mathbf{0}}(x,1), I_{\mathbf{0}}(1,y)) \\ &= T(0,1) \vee T(0,0) \vee T(1,0) = 0 = I_{\mathbf{0}}(x,y). \end{aligned}$$

Podobnie jak dla równania (CRI-GHS), dla nierówności (HS) możemy podać analogiczne związki jak w Twierdzeniu 3.12.

Twierdzenie 3.34. *Niech T będzie t-normą oraz niech $I \in \mathcal{FI}$. Jeżeli (T, I) spełnia* (HS), *to*

(i) jeżeli I spełnia (NP), *to (T, I) spełnia* (MP),

(ii) (T, I, N_I) spełnia (MT),

(iii) jeżeli N_I jest negacją silną, to (T, I, N_I) spełnia (RA).

3.2.1 (HS) dla R-implikacji

Jak widzieliśmy w paragrafie dotyczącym (CRI-GHS), nierówność (HS) jest niczym innym jak przechodniością, która jest zarezerwowana tylko dla t-norm lewostronnie ciągłych.

Korzystając z faktu, iż wszystkie R-implikacje spełniają (IP) możemy sformułować następujący wniosek.

Wniosek 3.35. Dla t-normy T następujące warunki są równoważne:

(i) Para (T, I_T) spełnia (HS).

(ii) Para (T, I_T) spełnia (CRI-GHS).

(iii) T jest lewostronnie ciągła.

Dowód. W dowodzie wystarczy skorzystać z Lematu 3.31. □

3.2.2 (HS) dla (S, N)-implikacji

Opierając się na pracy [38] sformułujemy twierdzenie charakteryzujące pewną klasę (S, N)-implikacji w kontekście (HS). Najpierw jednak podamy potrzebne do tego fakty.

Twierdzenie 3.36 ([38, Proposition 5.2])**.** *Jeżeli C jest quasi-kopułą, to dla wszystkich $x, y, z \in [0, 1]$ spełniona jest nierówność*

$$C(x, y) + C(1 - y, z) \geqslant C(x, z). \tag{3.3}$$

Ponadto, wprowadźmy pewną rodzinę funkcji $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q} = \{F\colon [0, 1]^2 \to [0, 1] |\ F \geqslant T_{\mathbf{LK}} \text{ oraz } F \text{ spełnia (3.3)}\}.$$

Uwaga 3.37. Zauważmy, że dla funkcji F z rodziny $\mathcal{Q}$ pojawia się założenie $F \geqslant T_{\mathbf{LK}}$. Jest ono jednak naturalne, gdyż wszystkie quasi-kopuły je spełniają. Dokładniej, jeżeli C jest quasi-kopułą, to

$$T_{\mathbf{LK}} \leqslant C \leqslant T_{\mathbf{M}}.$$

Powyższe nierówności noszą nazwę ograniczeń Fréscheta (lub Frécheta-Hoeffinga). Zostały one wykazane m. in. w [19].

Twierdzenie 3.38. *Niech $\varphi \in \Phi$, S niech będzie t-konormą oraz niech T będzie t-normą, a N taką negacją, że $(T, N) = ((T_{\mathbf{LK}})_\varphi, (N_{\mathbf{C}})_\varphi)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $(T, I_{S,N})$ *spełnia* (HS).

(ii) istnieje takie $F \in \mathcal{Q}$, że

$$S(x,y) = \varphi^{-1}(1 - F(1-\varphi(x), 1-\varphi(y))), \quad x, y \in [0,1].$$

Dowód. $(ii) \Rightarrow (i)$. Korzystając ze wzoru na S łatwo sprawdzić, $(T, I_{S,N})$ spełnia (HS).
$(i) \Rightarrow (ii)$. Zdefiniujmy funkcję F następująco:

$$F(x,y) = 1 - \varphi(S(\varphi^{-1}(1-x), \varphi^{-1}(1-y))), \quad x, y \in [0,1].$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(1 - F(1-\varphi(x), 1-\varphi(y))) &= \varphi^{-1}(\varphi(S(\varphi^{-1}(1-1+\varphi(x)), \varphi^{-1}(1-1+\varphi(y)))) \\ &= S(x,y).\end{aligned}$$

Ponadto, na podstawie założenia dla ustalonych $x, y, z \in [0,1]$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\max\{0, 1 - F(1-1+\varphi(x), 1-\varphi(z)) + 1 - F(1-1+\varphi(z), 1-\varphi(y)) - 1\} \leqslant \\ \max\{0, 1 - F(1-1+\varphi(x), 1-\varphi(y))\} \leqslant 1 - F(\varphi(x), 1-\varphi(y))\end{aligned}$$

Zatem, jeśli przyjmując $a = \varphi(x), b = 1-\varphi(y), c = 1-\varphi(z)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}-F(a,c) - F(1-c,b) &\leqslant -F(a,b) \\ F(a,c) + F(1-c,b) &\geqslant F(a,b).\end{aligned}$$

Zauważmy, że mamy

$$F(x,1) = 1 - \varphi(S(\varphi^{-1}(1-x), \varphi^{-1}(0))) = 1 - 1 + x = x$$

oraz

$$F(1,x) = 1 - \varphi(S(\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(1-x))) = 1 - 1 + x = x.$$

Stąd oraz z wykazanej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned}F(x,y) + F(1-y,1) &\geqslant F(x,1) \\ F(x,y) &\geqslant x + y - 1,\end{aligned}$$

oraz $F(x,y) \geqslant 0$, dlatego $F \geqslant T_{\mathbf{LK}}$, a zatem $F \in \mathcal{Q}$. □

3.2.3 (HS) dla implikacji Yagera

Podamy tutaj poniższe fakty dla g-implikacji. Pierwszy z nich jest wnioskiem z Twierdzenia 3.28.

Wniosek 3.39. Niech T będzie dowolną t-normą. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $(T, I_{\mathbf{GG}})$ spełnia (HS).

(ii) $T \leqslant T_{\mathbf{P}}$.

Można tu jednak pokazać nieco więcej w stosunku do wspomnianego twierdzenia.

Twierdzenie 3.40. *Niech I_g będzie taką implikacją, że $g(1) < \infty$ oraz niech T będzie t-normą ścisłą taką, że $T = (T_{\mathbf{P}})_g$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $g(x) \leqslant x,\ x \in [0,1]$.

(ii) (T, I_g) *spełnia* (HS).

Dowód. Zauważmy, że gdy $g(1) < \infty$, to bez straty ogólności możemy rozważać przypadek, gdy $g(1) = 1$ ([5, Remark 3.2.6]). Zatem $g \in \Phi$.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Ustalmy dowolnie $y \in [0,1],\ x, z \in (0,1]$. Wówczas zauważmy, że gdy $g(z) \leqslant z$, to $\frac{1}{x} \cdot g(z) \cdot \frac{1}{z} \cdot g(y) \leqslant \frac{1}{x} g(y)$, a stąd

$$\begin{aligned} T(I_g(x,z), I(z,y)) = g^{-1}(g(I_g(x,z)) \cdot g(I_g(z,y))) = g^{-1}\left(\frac{1}{x} \cdot g(z) \cdot \frac{1}{z} \cdot g(y)\right) \\ \leqslant g^{-1}\left(\frac{1}{x} \cdot g(y)\right) = I_g(x,y). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Jeżeli $x = 0$, to $I_g(x,y) = 1$, a gdy $z = 0$, to $T(I_g(x,z), I_g(z,y)) = I_g(x,z) \leqslant I_g(x,y)$.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Podobnie tutaj korzystając z nierówności (3.4) otrzymujemy tezę dla $z \in (0,1]$, a dla $z = 0$ mamy $g(0) = 0 \leqslant 0$. □

Korzystając z faktu, iż t-norma Łukasiewicza przyjmuje wartości niewiększe niż t-norma produktowa uzykujemy poniższy wniosek.

Wniosek 3.41. Niech I_g będzie taką implikacją, że $g(1) < \infty$ oraz niech T będzie t-normą nilpotentną taką, że $T = (T_{\mathbf{LK}})_g$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $g(x) \leqslant x,\ x \in [0,1]$.

(ii) (T, I_g) spełnia (HS).

3.3 Równanie (BK-GHS)

W tym paragrafie omówimy równanie (BK-GHS), które jest szczególnym przypadkiem złożenia (1.55). Istotnie, niech C_1, C_2 będą semikopułami. Rozważmy $C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2$, gdzie $I \in \mathcal{FI}$:

$$(C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2)(x,y) := \inf_{z \in [0,1]} I(C_1(x,z), C_2(z,y)), \quad x, y \in [0,1] \tag{3.5}$$

Poniżej przedstawiamy kilka własności złożenia (3.5).

Twierdzenie 3.42. *Niech C_1, C_2 będą semikopułami, a $I \in \mathcal{FI}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2 \in \mathcal{FI}$.

(ii) I *spełnia* (IP).

Dowód. Zauważmy, że warunki (I1), (I2) oraz część (I3) dla $C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2$ będzie spełniona bez względu na to, czy I spełnia (IP). Istotnie, jeżeli $x_1 \leqslant x_2$, to $C_1(x_1, z) \leqslant C_1(x_2, z)$ oraz $I(C_1(x_1, z), C_2(z, y)) \geqslant I(C_1(x_2, z), C_2(z, y))$. Wtedy

$$\begin{aligned}(C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2)(x_1, y) &= \inf_{z\in[0,1]} I(C_1(x_1, z), C_2(z, y)) \\ &\geqslant \inf_{z\in[0,1]} I(C_1(x_2, z), C_2(z, y)) \\ &= (C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2)(x_2, y),\end{aligned}$$

$x_1, x_2, y \in [0, 1]$.
Podobnie jeśli $y_1 \leqslant y_2$, to $C_2(z, y_1) \leqslant C_2(z, y_2)$ oraz
$I(C_1(x, z), C_2(z, y_1)) \leqslant I(C_1(x, z), C_2(z, y_2))$. Wtedy

$$\begin{aligned}(C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2)(x, y_1) &= \inf_{z\in[0,1]} I(C_1(x, z), C_2(z, y_1)) \\ &\leqslant \inf_{z\in[0,1]} I(C_1(x, z), C_2(z, y_2)) \\ &= (C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2)(x, y_2),\end{aligned}$$

$x, y_1, y_2 \in [0, 1]$.
Ponadto

$$(C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2)(0, 0) = \inf_{z\in[0,1]} I(C_1(0, z), C_2(z, 0)) = \inf_{z\in[0,1]} I(0, 0) = 1$$

$$(C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2)(1, 0) = \inf_{z\in[0,1]} I(C_1(1, z), C_2(z, 0)) = \inf_{z\in[0,1]} I(z, 0) = 0$$

Zauważmy, że

$$(C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2)(1, 1) = \inf_{z\in[0,1]} I(C_1(1, z), C_2(z, 1)) = \inf_{z\in[0,1]} I(z, z).$$

Wtedy $(C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2)(1, 1) = 1 \Leftrightarrow I(z, z) = 1,\ z \in [0, 1] \Leftrightarrow I$ spełnia (IP).

□

Twierdzenie 3.43. *Niech $\varphi \in \Phi$, C_1, C_2 będą semikopułami, a $I \in \mathcal{FI}$. Wówczas*

$$(C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2)_\varphi = (C_1)_\varphi \overset{I_\varphi}{\triangleleft} (C_2)_\varphi$$

Dowód. Ustalmy $x, y \in [0,1]$. Dostajemy

$$\begin{aligned}
(C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2)_\varphi(x,y) &= \varphi^{-1}((C_1 \overset{I}{\triangleleft} C_2))(\varphi(x),\varphi(y)) \\
&= \varphi^{-1}(\inf_{z\in[0,1]} I(C_1(\varphi(x),z),C_2(z,\varphi(y)))) \\
&= \varphi^{-1}(\inf_{z\in[0,1]} I(C_1(\varphi(x),\varphi(z)),C_2(\varphi(z),\varphi(y)))) \\
&= \inf_{z\in[0,1]} \varphi^{-1}(I(C_1(\varphi(x),\varphi(z)),C_2(\varphi(z),\varphi(y)))) \\
&= \inf_{z\in 0,1} \varphi^{-1}(I(\varphi(\varphi^{-1}(C_1(\varphi(x),\varphi(z)))),\varphi(\varphi^{-1}(C_2(\varphi(z),\varphi(y)))))) \\
&= \inf_{z\in[0,1]} \varphi^{-1}(I(\varphi((C_1)_\varphi(x,z)),\varphi((C_2)_\varphi(z,y)))) \\
&= \inf_{z\in[0,1]} I_\varphi((C_1)_\varphi(x,z),(C_2)_\varphi(z,y)) \\
&= (C_1)_\varphi \overset{I_\varphi}{\triangleleft} (C_2)_\varphi(x,y).
\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 3.44. *Niech $I \in \mathcal{FI}$ spełnia* (IP)*. Wówczas $T_{\mathbf{M}} \overset{I}{\triangleleft} T_{\mathbf{M}} = I$.*

Przejdźmy teraz do równania (BK-GHS). Zauważmy również, że bez większych założeń co to tego, do jakich rodzin należą funkcje C, I_1, I_2 mamy następujący fakt.

Stwierdzenie 3.45. *Niech $I_1, I_2 \colon [0,1]^2 \to [0,1]$, $I_2(1,1) = 1$ oraz niech C będzie semikopulą. Jeżeli (C, I_1, I_2) spełnia* (BK-GHS)*, to I_1 spełnia* (IP)*.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że jeśli (C, I_1, I_2) spełnia (BK-GHS), to

$$1 = I_2(1,1) = \inf_{z\in[0,1]} I_1(C(1,z),C(z,1)) = \inf_{z\in[0,1]} I_1(z,z)$$

a zatem $1 = I_1(z,z)$ dla wszystkich $z \in [0,1]$.

□

Stwierdzenie 3.46. *Niech C będzie przemienną funkcją agregującą. Jeżeli (C, I, I) spełnia* (BK-GHS)*, to I spełnia warunek:*

$$x \leqslant y \Rightarrow I(x,y) = 1, \quad x, y \in [0,1].$$

Dowód. Na mocy Stwierdzenia 3.45 I spełnia (IP). Zatem dla takich $x, y \in [0,1]$, że $x \leqslant y$ mamy:

(i) Dla $z \in [0,x)$ mamy $I(C(x,z),C(z,y)) \geqslant I(C(z,y),C(z,y)) = 1$,

(ii) Dla $z \in [x,y]$ mamy

$$I(C(x,z),C(z,y)) \geqslant I(C(x,z),C(z,x)) = I(C(x,z),C(x,z)) = 1,$$

(iii) Dla $z \in (y,1]$ mamy $I(C(x,z),C(z,y)) \geqslant I(C(x,z),C(z,x)) = 1$. Zatem

$$1 = \inf_{z\in[0,1]} I(C(x,z),C(z,y)) = I(x,y).$$

□

3.3.1 Równanie (BK-GHS) dla R-implikacji

W tej części przedstawimy twierdzenie podobne do Twierdzenia 3.15, ale bez założenia lewostronnej ciągłości. Przypomnijmy następujący fakt, w którym wbrew podanym założeniom w [20] lewostronna ciągłość nie jest konieczna.

Twierdzenie 3.47 ([20, cf. Proposition 1.5])**.** *Jeżeli T jest t-normą, to*

$$I_T(x,y) \leqslant I_T(T(x,z),T(z,y)), \quad x,y,z \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Dowód. Ustalmy $x,y,z,s \in [0,1]$. Jeśli $T(x,s) \leqslant y$, to

$$T(z,y) = T(y,z) \geqslant T(T(x,s),z) = T(z,T(x,s)) = T(T(z,x),s) = T(T(x,z),s).$$

Zatem

$$\{s \in [0,1] \mid T(x,s) \leqslant y\} \subset \{s \in [0,1] \mid T(T(x,z),s) \leqslant T(z,y)\},$$
$$\sup\{s \in [0,1] \mid T(x,s) \leqslant y\} \leqslant \sup\{s \in [0,1] \mid T(T(x,z),s) \leqslant T(z,y)\},$$

a korzystając z wzoru (1.37) mamy $I_T(x,y) \leqslant I_T(T(x,z),T(z,y))$. □

Do wykazania wspomnianego twierdzenia potrzebny jest także poniższy prosty lemat.

Lemat 3.48. *Niech $F,G\colon [0,1]^2 \to [0,1]$. Wówczas*

$$\forall_{x,y,z\in[0,1]}\ F(x,y) \leqslant F(G(x,z),G(z,y)) \Leftrightarrow \forall_{x,y\in[0,1]}\ F(x,y) \leqslant \inf_{t\in[0,1]} F(G(x,t),G(t,y)). \tag{3.7}$$

Dowód. Pokażemy jedynie implikację ($\Rightarrow$) (odwrotna jest oczywista). Załóżmy, że dla dowolnie ustalonych $x,y,z \in [0,1]$ mamy $F(x,y) \leqslant F(G(x,z),G(z,y))$ oraz przypuśćmy, że istnieją takie $x_0,y_0 \in [0,1]$, że $F(x_0,y_0) > \inf_{t\in[0,1]} F(G(x_0,t),G(t,y_0))$. Wtedy jednak musi istnieć takie $z_0 \in [0,1]$, że $F(x_0,y_0) > F(G(x_0,z_0),G(z_0,y_0))$, co stanowi sprzeczność z założeniem. □

Możemy teraz sformułować twierdzenie.

Twierdzenie 3.49. *Niech $F,G\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, G niech będzie semikopułą oraz niech (F,G) spełniają nierówność* (3.7)*. Wówczas (G,F,F) spełnia* (BK-GHS).

Dowód. Z Lematu 3.48 widzimy, że pozostaje do wykazania przeciwna nierówność. Wystarczy pokazać, że istnieje taki $z_0 \in [0,1]$, że dla wszystkich $x,y \in [0,1]$ mamy $F(x,y) = F(G(x,z_0),G(z_0,y))$, przyjmując $z_0 = 1$, otrzymujemy żądaną równość. □

Z tego twierdzenia oraz z Lematu 3.48 możemy otrzymać następujący fakt.

Wniosek 3.50. Jeżeli T jest t-normą, to (T, I_T, I_T) spełnia (BK-GHS).

Możemy także sformułować następujący wniosek.

Wniosek 3.51. Niech T będzie t-normą, a I_2 implikacją rozmytą. Wówczas jeśli (T, I_2, I_T) spełnia (BK-GHS), to $I_T \leqslant I_2$.

Dowód. Jeżeli (T, I_2, I_T) spełnia (BK-GHS), to dla dowolnych $x, y \in [0,1]$ mamy

$$I_T(x,y) = \inf_{z\in[0,1]} I_2(T(x,z), T(z,y)) \leqslant I_2(T(x,1), T(1,y)) = I_2(x,y).$$

□

Odwrotna implikacja nie jest prawdziwa.

Przykład 3.52. Rozważmy $T = T_{\mathbf{LK}}$ oraz $I_2 = I_{\mathbf{WB}}$. Wówczas, gdy $x \in [0,1)$, to dla dowolnych $y, z \in [0,1]$ mamy $I_{\mathbf{WB}}(T_{\mathbf{LK}}(x,z), T_{\mathbf{LK}}(z,y)) = 1$, gdyż $T_{\mathbf{LK}}(x,z) < 1$. Zatem

$$1 = \inf_{z\in[0,1]} I_{\mathbf{WB}}(T_{\mathbf{LK}}(x,z), T_{\mathbf{LK}}(z,y)) \neq I_{\mathbf{LK}}(x,y).$$

3.3.2 (BK-GHS) dla (S, N)-implikacji

Zgodnie z oznaczeniami z równania (BK-GHS), rozważmy ponownie (jak dla R-implikacji) przypadek, gdy $I_1 = I_2$. Przypomnijmy istotne w dalszej części pracy twierdzenie charakteryzujące (S, N)-implikacje.

Twierdzenie 3.53 ([5, Theorem 2.4.17])**.** *Niech S będzie ciągłą t-konormą, a N negacją rozmytą. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $I_{S,N}$ jest ciągłą (S, N)-implikacją spełniającą (IP).

(ii) S jest t-normą nilpotentną, a $N(x) \geqslant N_S(x)$, $x \in [0,1]$.

Dodatkowo, jeśli jest S-implikacją ([5, Corollary 2.4.18]), to istnieją takie $\psi, \varphi \in \Phi$, że

$$I(x,y) = \varphi^{-1}(\min\{\varphi(\psi^{-1}(1-\psi(x))) + \varphi(y), 1\}), \quad x, y \in [0,1],$$

gdzie $\psi^{-1}(1-\psi(x)) \geqslant \varphi^{-1}(1-\varphi(x))$.

Uwaga 3.54. Jeżeli (przy powyższych założeniach) $\varphi = \psi$, to $I = (I_{\mathbf{LK}})_\varphi$. Wówczas możemy skorzystać z Wniosku 3.50. Ponadto, gdy $\varphi \neq \psi$, ale $\varphi > \psi$, to poniższy przykład pokazuje, że dla (S, N)-implikacji określonej jak powyżej (BK-GHS) nie zawsze jest spełnione.

Przykład 3.55. Rozważmy $\varphi(x) = x$ oraz $\psi(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Wówczas $I(x,y) = \min\{\sqrt{1-x^2}+y, 1\}$. Wtedy dla $T = T_{\mathbf{LK}}$ mamy $I(0.9, 0.6) = 1$ podczas, gdy

$$I(T_{\mathbf{LK}}(0.9, 0.4), T_{\mathbf{LK}}(0.4, 0.4)) = I(0.3, 0) = \sqrt{0.91} < 1.$$

Natomiast, jeśli $\varphi = \psi$ możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.56. *Niech $\varphi \in \Phi$ oraz niech T będzie taką t-normą ciągłą, że $T =< a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha >_{\alpha\in A}$. Wówczas następujące warunki sa równoważne:*

(i) $(T, (I_{\mathbf{LK}})_\varphi, (I_{\mathbf{LK}})_\varphi)$ *spełnia* (BK-GHS).

(ii) $|A| \leqslant 1,\ a_{\alpha_1} = 0, e_{\alpha_1} = 1$ *(inaczej: $T = (T_{\mathbf{P}})_\varphi \vee T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi \vee T = T_{\mathbf{M}}$).*

Dowód. $(ii) \Rightarrow (i)$. Ustalmy $x, y \in [0,1]$. Zauważmy, że gdy $x \leqslant y$, to dla $T \in \{T_{\mathbf{M}}, (T_{\mathbf{LK}})_\varphi, (T_{\mathbf{P}})_\varphi\}$, $\inf_{z\in[0,1]} I(T(x,z), T(z,y)) = 1$. Zatem wystarczy wykazać tezę dla takich $x, y \in [0,1]$, że $x > y$.
Jeżeli $A = \emptyset$, to $T = T_{\mathbf{M}}$. Zatem na mocy Stwierdzenia 3.44 teza jest prawdziwa.
Jeżeli $|A| = 1$ oraz $a_\alpha = 0, e_\alpha = 1$, to pozostaje sprawdzić przypadek, gdy $T = (T_{\mathbf{P}})_\varphi$. wtedy mamy

$$\begin{aligned}
\inf_{z\in[0,1]} I(T(x,z), T(z,y)) &= \inf_{z\in[0,1]} \varphi^{-1}(\min\{1, 1 - \varphi(x)\varphi(z) + \varphi(z)\varphi(y)\}) \\
&= \inf_{z\in[0,1]} \varphi^{-1}(\min\{1, 1 + \varphi(z)(-\varphi(x) + \varphi(y))\}) \\
&= \varphi^{-1}(1 + \varphi(1)(-\varphi(x) + \varphi(y))) \\
&= \varphi^{-1}(1 - \varphi(x) + \varphi(y)) \\
&= I(x,y)
\end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Najpierw przypuśćmy, że $|A| = 1$, ale

- $a_{\alpha_1} = 0, e_{\alpha_1} < 1$. Niech $x \leqslant e_{\alpha_1}, y > e_{\alpha_1}$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned}
\inf_{z\in[0,1]} I(T(x,z), T(z,y)) &= \min\{\inf_{z\in[0,y]} I(T(x,z), T(z,y)), \inf_{z\in(y,1]} I(T(x,z), T(z,y))\} \\
&= \min\{1, I(z,y)\} = I(1,y) = y,
\end{aligned}$$

  a $y < I(x,y)$ dla $x > y$.

- $a_{\alpha_1} > 0, e_{\alpha_1} = 1$. Wówczas gdy $x > a_{\alpha_1}, y < a_{\alpha_1}$ mamy:

$$\begin{aligned}
\inf_{z\in[0,1]} I(T(x,z), T(z,y)) &= \min\{\inf_{z\in[0,y]} I(x,z), \inf_{z\in(y,a_{\alpha_1}]} I(z,y), \\
&\qquad \inf_{z\in(a_{\alpha_1},x]} I(T(x,z), y), \inf_{z\in(x,1]} I(T(x,z), y)\} \\
&= \min\{I(x,0), I(a_{\alpha_1}, y), I(T(x,x), y), I(x,y)\} \\
&\leqslant I(a_{\alpha_1}, y) < I(x,y).
\end{aligned}$$

Przypuśćmy, że $|A| \geqslant 2$. Ustalmy $x, y \in [0,1]$, $x > y$. Wówczas to należy rozważyć poniższe przypadki:

(i) $x, y \in [a_\alpha, e_\alpha]$.

- $z \in [0, a_\alpha)$, wtedy $I(T(x,z), T(z,y)) = I(z,z) = 1$,
- $z \in [a_\alpha, e_\alpha]$, wtedy $I(T(x,z), T(z,y)) \geqslant I(T(x,e_\alpha), T(e_\alpha, y)) = I(x,y)$
- $z \in (e_\alpha, 1]$, wtedy $I(T(x,z), T(z,y)) = I(x,y)$

(ii) $x \in [a_{\alpha_2}, e_{\alpha_2}]$, $y \in [a_{\alpha_1}, e_{\alpha_1}]$, gdzie $a_{\alpha_2} > a_{\alpha_1}, e_{\alpha_2} > e_{\alpha_1}$

- $z \in [0, a_{\alpha_1})$, wtedy $I(T(x,z), T(z,y)) = I(z,z) = 1$,
- $z \in [a_{\alpha_1}, e_{\alpha_1}]$, wtedy

$$\begin{aligned} I(T(x,z), T(z,y)) &= I(x, T(z,y)) \\ &\geqslant I(x, T(a_{\alpha_1}, y)) \\ &= I(x, a_{\alpha_1}) < I(x,y), \end{aligned}$$

  gdy $y > a_{\alpha_1}$.
- $z \in [e_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}]$, wtedy

$$\begin{aligned} \inf_{z \in [e_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}]} I(T(x,z), T(z,y)) &= \inf_{z \in [e_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}]} I(z,y) \\ &= I(a_{\alpha_2}, y) \end{aligned}$$

- $z \in [a_{\alpha_2}, e_{\alpha_2}]$, wtedy

$$\begin{aligned} \inf_{z \in [a_{\alpha_2}, e_{\alpha_2}]} I(T(x,z), T(z,y)) &= \inf_{z \in [a_{\alpha_2}, e_{\alpha_2}]} I(T(x,z), y) \\ &= I(T(x, e_{\alpha_2}), y) = I(x,y), \end{aligned}$$

- $z \in (e_{\alpha_2}, 1]$, wtedy $I(T(x,z), T(z,y)) = I(x,y)$.

Zatem wnioskujemy, iż $\inf_{z \in [0,1]} I(T(x,z), T(z,y)) < I(x,y)$, co oznacza, że (BK-GHS) nie jest spełniona w przypadku, gdy $|A| \geqslant 2$.

□

3.3.3 (BK-GHS) dla implikacji Yagera

Uwaga 3.57. Niech I_f będzie f-implikacją, C niech będzie semikopułą, a $I_2 \in \mathcal{FI}$. Wówczas żadna trójka (C, I_f, I_2), nie spełnia (BK-GHS).

Dowód. Jest tak, ponieważ f-implikacje nie spełniają (IP) ([5, Theorem 3.1.7]). □

Przejdźmy do g-implikacji. Przypomnijmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.58 ([5, Theorem 3.2.8])**.** *Niech g będzie g-generatorem. Wówczas:*

(i) I_g *spełnia* (NP) *i* (EP),

(ii) I_g *spełnia* (IP) $\Leftrightarrow g(1) < \infty$ *i* $x \leqslant g_1(x)$ *dla* $x \in [0,1]$, *gdzie* $g_1(x) = \frac{g(x)}{g(1)}$

Wniosek 3.59. Jeżeli (C, I_g, I_2) spełnia (BK-GHS), a I_g jest g-implikacją, to $g_1(1) < \infty$ i $x \leqslant g_1(x),\ x \in [0,1]$.

Zauważmy, że oczywiście jeżeli I_g jest taka jak w poprzednim twierdzeniu, to trójka (T_M, I_g, I_g) spełnia (BK-GHS). Dla t-norm nilpotentnych jednak ta własność nie zachodzi.

Przykład 3.60. Niech $T = T_{\mathbf{LK}}$, a $I_g = I_{\mathbf{GG}}$. Wówczas, I_g spełnia warunki z Wniosku 3.59. Dla $x = 0.5, y = 0.1$ mamy $I_g(x,y) = 0.2$ oraz

$$\inf_{z \in [0,1]} I_g(T(0.5,z), T(z,0.1)) \leqslant I_g(T(0.5,0.95), T(0.95,0.1)) = I_g(0.45, 0.05) = \frac{1}{9} < 0.2.$$

ROZDZIAŁ 4

Modus ponens

W rozdziale tym zajmiemy się nierównością oraz równaniami funkcyjnymi związanymi ze schematem modus ponens:

$$T(x, I(x, y)) \leqslant y, \quad x, y \in [0, 1], \tag{MP}$$

$$y = \sup_{x\in[0,1]} C(x, I(x, y)), \quad y \in [0, 1], \tag{CRI-GMP}$$

$$y = \inf_{x\in[0,1]} I(x, C(x, y)), \quad y \in [0, 1]. \tag{BK-GMP}$$

Zauważmy, że dzięki Twierdzeniu 3.12, w wielu przypadkach rozwiązania poszczególnych problemów będą takie same lub podobne jak w przypadku sylogizmu hipotetycznego.

4.1 Równanie (CRI-GMP) oraz nierówność (MP)

Tę część rozpoczniemy od podania dotychczasowych wyników związanych z nierównością (MP), które można znaleźć w literaturze.

Definicja 4.1 ([37, Definition 2])**.** Niech T będzie ciągłą t-normą, a N negacją silną. Wówczas funkcję $I\colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$ nazywamy:

(i) MP-implikacją dla t-normy T jeżeli (T, I) spełnia (MP),

(ii) MT-implikacją dla pary (T, N) jeżeli (T, I, N) spełnia (MT),

(iii) MPT-implikacją dla pary (T, N), jeżeli jest MP-implikacją dla T oraz MT-implikacją dla (T, N).

Jak widzimy, w powyższej definicji wprowadzono nowe nazwy implikacji nas interesujących, jednak przy założeniu ciągłości dla t-normy oraz negacji. Zagadnienie

MP-implikacji jest także znane i badane jako pojęcie T-warunkowości (ang. *T-conditionality*) (zob. [1, 5]).

Zanim przejdziemy to wyników dotyczących wybranych rodzin implikacji, przedstawimy kilka ogólnych własności par (T, I) spełniających (MP).

Twierdzenie 4.2 ([5, Proposition 7.4.2])**.** *Niech T będzie t-normą oraz niech $I \in \mathcal{FI}$. Jeżeli istnieją takie $x, y \in (0, 1)$, że $x > y$ oraz $I(x, y) = 1$, to (T, I) nie spełnia* (MP) *dla żadnej t-normy T.*

Twierdzenie 4.3 ([5, Proposition 7.4.3])**.** *Niech T będzie t-normą oraz niech $I \in \mathcal{FI}$. Jeśli para (T, I) spełnia* (MP)*, to*

(i) $N_I \leqslant N_T$,

(ii) jeżeli $N_I \neq N_{\mathbf{D_1}}$*, to T ma dzielniki zera,*

(iii) jeżeli $N_I(x) \neq 0$, $x \in [0, 1)$*, a T jest ciągła, to* $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$*, dla pewnego* $\varphi \in \Phi$,

(iv) jeżeli $J \leqslant I$ *dla* $J \in \mathcal{FI}$*, to* (T, J) *spełnia* (MP),

(v) jeżeli T' jest taką t-normą, że $T' \leqslant T$*, to* (T', I) *spełnia* (MP).

4.1.1 (MP) i (CRI-GMP) dla R-implikacji

Wniosek 4.4. Niech T będzie t-normą oraz niech $I \in \mathcal{FI}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

(i) (T, I_T) spełnia (MP).

(ii) (T, I_T) spełnia (CRI-GMP).

(iii) T jest lewostronnie ciągła.

Dowód. Wystarczy, że skorzystamy z Wniosku 3.35, który zawiera podobne warunki równoważne dla (HS) oraz (CRI-GHS), a także z Twierdzenia 3.34, gdyż R-implikacje spełniają (NP). □

4.1.2 (MP) dla (S, N)-implikacji

Rozumowanie przeprowadzimy tu ze względu na ustaloną t-normę, a skupimy się jedynie na t-normach ciągłych. Najpierw zauważmy, że jeśli T jest t-normą ścisłą lub minimum, to jedyną (S, N)-implikacją spełniającą warunek konieczny (Lemat 3.11, Twierdzenie 3.34) jest implikacja drastyczna (Twierdzenie 3.23), a dla dowolnej t-normy T $(T, I_{\mathbf{D}})$ spełnia (MP). Rozważmy zatem przypadek, gdzy t-norma jest nilpotentna.

Twierdzenie 4.5 ([37]). *Niech S będzie t-normą ciągłą, N negacją silną oraz niech T niech będzie t-normą ciągłą. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $(T, I_{S,N})$ *spełnia* (MP).

(ii) $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$ *dla pewnego* $\varphi \in \Phi$, $N \leqslant (N_C)_\varphi$ *oraz*

$$S(x, y) \leqslant (S_{\mathbf{LK}})_\varphi((N_C)_\varphi \circ N(x), y), \quad x, y \in [0, 1].$$

4.1.3 (MP) dla implikacji probalistycznych

W tej części zacytujemy wyniki pochodzące z pracy [3] z 2016 roku.

Twierdzenie 4.6 ([3, Theorem 4.2]). *Niech C będzie kopułą, T niech będzie t-normą oraz niech I_C będzie implikacją probabilistyczną opartą na C. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) (T, I_C) *spełnia* (MP).

(ii) $C(x, y) \leqslant xy$ *dla takich* $x, y \in [0, 1]$, *że* $x > y$.

Twierdzenie 4.7 ([3, Proposition 4.3]). *Niech T będzie taką t-normą, że $T \leqslant T_{\mathbf{P}}$ oraz niech I_C będzie dowolną implikacją probabilistyczną opartą na pewnej kopule C. Wówczas (T, I_C) spełnia* (MP).

4.2 Równanie (BK-GMP)

Równania funkcyjne pochodzące od iloczynu Bandlera-Kohouta nie były do tej pory tematem szerszych badań. W tej pracy przedstawiamy pewne wyniki dla nich takie jak poniższe.

Stwierdzenie 4.8. *Niech C będzie semikopułą oraz niech $I \in \mathcal{FI}$ spełnia* (NP). *Jeżeli (C, I) spełnia* (BK-GMP), *to I spełnia* (IP).

Stwierdzenie 4.9. *Niech $I \in \mathcal{FI}$ spełnia* (NP), *C będzie semikopułą. Jeżeli trójka (C, I, I) spełnia* (BK-GHS), *to spełnia także* (BK-GMP).

Dowód. W równaniu (BK-GHS) wystarczy przyjąć $x = 1$, otrzymujemy wtedy

$$y = \inf_{z \in [0,1]} I(z, C(z, y)), \quad y \in [0, 1].$$

□

Uwaga 4.10. Z powyższego twierdzenia otrzymujemy jako wnioski wyniki dla wszystkich tych rodzin implikacji, które spełniają (NP).

Wniosek 4.11. Niech T będzie t-normą. Wówczas:

(i) (T, I_T) spełnia (BK-GMP).

(ii) Niech $\varphi \in \Phi$, a T będzie taką t-normą ciągłą, że $T =< a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha >_{\alpha \in A}$ Wówczas następujące warunki są równoważne:

  (a) $(T, (I_{\mathbf{LK}})_\varphi)$ spełnia (BK-GMP).

  (b) $|A| \leqslant 1,\ a_{\alpha_1} = 0, e_{\alpha_1} = 1$.

(iii) Niech I będzie f-implikacją. Wówczas żadna para (C, I) nie spełnia (BK-GMP).

ROZDZIAŁ 5

Modus tollens

W tym rozdziale omówimy pewne rozwiązania dla nierówności i równań związanych ze schematem modus tollens:

$$T(N(y), I(x,y)) \leqslant N(x), \quad x, y \in [0,1], \tag{MT}$$

$$N(x) = \sup_{y\in[0,1]} T(N(y), I(x,y)), \quad x \in [0,1], \tag{CRI-GMT}$$

$$N(x) = \inf_{y\in[0,1]} I(N(y), T(x,y)), \quad x \in [0,1]. \tag{BK-GMT}$$

5.1 Nierówność (MT) oraz równanie (CRI-GMT)

Na początku podamy podobne własności jak dla nierówności (HS) oraz (MP).

Stwierdzenie 5.1. *Niech C będzie semikopułą oraz niech $I \in \mathcal{FI}$. Jeżeli (C, I, N) spełnia* (MT)*, to*

(i) jeżeli I spełnia (NP)*, to (C, N) spełnia* (LC)*,*

(ii) jeżeli N jest różnowartościowa, to I spełnia warunek

$$I(x,y) = 1 \Rightarrow x \leqslant y, \; x, y \in (0,1),$$

(iii) $N_I \leqslant N$,

(iv) jeżeli I spełnia (NP) *oraz $C = T$ jest t-normą, to $N \leqslant N_T$,*

(v) jeżeli $C = T$ jest t-normą oraz $N \neq N_{\mathbf{D_1}}$, to T ma dzielniki zera,

(vi) jeżeli $C = T$ *jest t-normą ciągłą oraz* $N_I(x) \neq 0,\ x \in [0,1)$*, to istnieje takie* $\varphi \in \Phi$*, że* $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$*,*

(vii) jeżeli $I_1 \in \mathcal{FI}$*, a* C_2 *jest taką semikopułą, że* $C_2 \leqslant C$ *oraz* $I_1 \leqslant I$*, to* (C_2, I_1) *spełnia* (MT)*.*

Dowód. (i). Wystarczy w (MT) przyjąć $x = 1$, otrzymujemy wtedy

$$C(N(y), I(1, y)) = C(N(y,), y) = 0, \quad y \in [0, 1].$$

(ii). Przypuśćmy, że istnieją takie $x, y \in (0, 1)$, że $I(x, y) = 1$ oraz $x > y$. Wówczas z różnowartościowości N mamy

$$C(N(y), I(x, y)) = C(N(y), 1) = N(y) > N(x)$$

dla tak ustalonych x, y, co daje sprzeczność.
(iii). Wystarczy, że w nierówności (MT) przyjmiemy $y = 0$, otrzymujemy wówczas

$$C(1, I(x, 0)) = I(x, 0) = N_I(x) \leqslant N(x),\ x \in [0, 1].$$

(iv). Jest to natychmiastowe z (i) oraz z określenia negacji N_T danej wzorem (1.21).
(v). Skoro $N \neq N_{\mathbf{D_1}}$, to istnieje taki $x \in (0, 1)$, że $N(x) > 0$, co oznacza, że T ma dzielnika zera, gdyż (T, N) spełnia (LC).
(vi). Skoro $N_I(x) > 0$ dla $x \in [0, 1)$, to każdy taki x jest dzielnikiem zera T, a jedyną taką t-normą ciągłą, że zbiór dzielników zera jest równy $(0, 1)$ jest $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$ dla pewnego $\varphi \in \Phi$.
(vii). Wystarczy zapisać następującą nierówność

$$C_2(N(y), I_1(x, y)) \leqslant C_2(N(y), I(x, y)) \leqslant C(N(y), I(x, y)) \leqslant N(x), \quad x, y \in [0, 1].$$

□

Uwaga 5.2. Założenie różnowartościowości N w Stwierdzeniu 5.1 w (ii) jest ważne. Istotnie, niech

$$I(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \vee y = 1 \vee (x, y) \in [0, 0.5] \times [0.3, 1], \\ 0.5, & (x, y) \in (0, 0.5] \times [0, 0.3) \vee (x, y) \in (0.5, 1] \times [0.3, 1], \\ 0, & (x, y) \in (0.5, 1] \times [0, 0.3). \end{cases}$$

Wtedy

$$N_I(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0.5, & 0 < x \leqslant 0.5, \\ 0, & x > 0.5. \end{cases}$$

Wówczas (T, I, N_I) spełnia (MT) dla dowolnej t-normy T mimo, iż istnieją takie $x, y \in (0, 1)$, że $x > y$ oraz $I(x, y) = 1$.

Stwierdzenie 5.3. *Jeżeli* $N = N_{\mathbf{D_1}}$*, to* (C, I, N) *spełnia* (MT) *dla dowolnej semikopuły* C *i* $I \in \mathcal{FI}$*.*

Wiemy, że jeżeli pewna trójka (T, I, N) spełnia (CRI-GMT), to spełnia także (MT). Implikacja odwrotna zachodzi przy pewnym dodatkowym warunku.

Stwierdzenie 5.4. *Niech* T *będzie t-normą, niech* $I \in \mathcal{FI}$ *spełnia* (IP) *oraz niech* N *będzie negacją rozmytą. Jeżeli* (T, I, N) *spełnia* (MT)*, to trójka ta spełnia także* (CRI-GMT)*.*

Dowód. Ustalmy dowolnie $x, z \in [0,1]$. Z założenia mamy, iż $T(N(z), I(x,z)) \leqslant N(x)$, więc

$$\sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(x,y)) \leqslant N(x).$$

Z drugiej strony, zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(x,y)) &\geqslant T(N(x), I(x,x)) \\ &= T(N(x), 1) = N(x), \end{aligned}$$

stąd $\sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(x,y)) = N(x)$. □

5.1.1 (MT) i (CRI-GMT) dla R-implikacji

Podobne twierdzenie jak dla (MP) można podać też tutaj, jednak przy dodatkowych założeniach.

Twierdzenie 5.5. *Niech* N *będzie negacją,* T *t-normą oraz niech* I_T *spełnia* (CP) *ze względu na* N*. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) (T, I_T, N) *spełnia* (MT)*.*

(ii) (T, I_T, N) *spełnia* (CRI-GMT)*.*

(iii) T *jest lewostronnie ciągła.*

Dowód. Przypomnijmy najpierw, że jeżeli jeżeli I_T spełnia (CP) ze względu na negację N, to $N = N_{I_T}$ oraz N jest silna ([5, Proposition 2.5.26]). Teraz dowód staje się analogiczny do dowodu Twierdzenia 3.17:
$(iii) \Rightarrow (i)$. Skoro I_T spełnia (CP), to N jest silna. Wystarczy skorzystać z własności (RP). Dla ustalonych $x, y, z \in [0,1]$ mamy

$$I_T(N(y), N(x)) \leqslant I_T(N(y), N(x)) = I_T(x,y) \Leftrightarrow T(N(y), I_T(x,y)) \leqslant N(x).$$

$(i) \Rightarrow (iii)$. Ponownie skorzystamy z własności (RP). Przypuśćmy, że istnieją takie $x, y, z \in [0,1]$, że $I_T(y,x) \geqslant z$ i $T(y,z) > x$. Wtedy

$$x < T(y,z) \leqslant T(y, I_T(y,x)) = T(y, I_T(N(x), N(y))) = T(N(N(y)), I_T(N(x), N(y))) \\ \leqslant N(N(x)) = x,$$

co daje sprzeczność.
$(i) \Leftrightarrow (ii)$ - na podstawie Stwierdzenia 5.4. □

Przypomnijmy teraz twierdzenie, które łączy się z omawianą tu nierównością.

Twierdzenie 5.6 ([5, Proposition 2.5.28]). *Niech T będzie t-normą lewostronnie ciągłą. Wówczas*

(i) I_T spełnia (R-CP) *z pewną negacją $N \Leftrightarrow N = N_{I_T}$,*

(ii) I_T spełnia (L-CP) *z pewną negacją $N \Leftrightarrow N = N_{I_T}$ oraz N jest silna,*

(iii) I_T spełnia (CP) *z pewną negacją $N \Leftrightarrow N = N_{I_T}$ oraz N jest silna.*

Przypomnijmy też, że odwrotna implikacja nie zachodzi, tzn. istnieją R-implikacje indukowane z t-normy T nieciągłej lewostronnie, a mimo to spełniające (CP) ([5, Remark 2.5.29]). Zauważmy teraz, że spełnianie (MT) może stanowić tu uzupełniające założenie, dzięki któremu wspomniana implikacja będzie zachodzić.

5.1.2 (MT) i (CRI-GMT) dla (S, N)-implikacji

Podamy teraz poniższe twierdzenie, w którym wbrew założeniom w [37] negacja N nie musi być silna.

Twierdzenie 5.7 (cf. [37, Theorem 5]). *Niech I_{S,N_1} będzie (S, N_1)-implikacją otrzymaną z negacji silnej N_1 i t-konormy ciągłej S, T niech będzie t-normą ciągłą, a N dowolną negacją. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) (T, I_{S,N_1}, N) spełnia (MT).

(ii) $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$ dla pewnego $\varphi \in \Phi$, $N_1 \leqslant N \leqslant (N_C)_\varphi$ oraz

$$S(x,y) \leqslant (S_{\mathbf{LK}})_\varphi(N \circ N_1(x), (N_C)_\varphi \circ N(y)), \quad x, y \in [0,1].$$

Dowód. $(i) \Rightarrow (ii)$. Dla I_{S,N_1} mamy $N_{I_{S,N_1}} = N_1$, dlatego ze Stwierdzenia 5.1 (vi) widzimy, że $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$ dla pewnego $\varphi \in \Phi$, a z własności (iii) $N_1 \leqslant N$, z kolei z Twierdzenia 1.39 mamy $N \leqslant (N_{\mathbf{C}})_\varphi$. Zatem otrzymujemy $N_1 \leqslant N \leqslant (N_{\mathbf{C}})_\varphi$. Pozostaje wyznaczyć postać t-konormy S. Dla ustalonych $x, y \in [0,1]$ mamy

$$\begin{aligned} T(N(y), I_{S,N_1}(N_1(x), y)) &\leqslant N(N_1(x)) \\ \varphi^{-1}(\max\{0, \varphi(N(y)) + \varphi(I_{S,N_1}(N_1(x), y)) - 1\}) &\leqslant N(N_1(x)) \\ \varphi^{-1}(\max\{0, \varphi(N(y)) + \varphi(S(x,y)) - 1\}) &\leqslant N(N_1(x)). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \varphi(N(y)) + \varphi(S(x,y)) - 1 \leqslant 0 \\ S(x,y) \leqslant \varphi^{-1}(1 - \varphi(N(y))) = (N_C)_\varphi \circ N(y) \end{aligned}$$

albo

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \varphi(N(y)) + \varphi(S(x,y)) - 1 \leqslant \varphi(N(N_1(x))) \\ \varphi(S(x,y)) &\leqslant \varphi(N(N_1(x))) + 1 - \varphi(N(y)) \\ S(x,y) &\leqslant \min\{1, \varphi^{-1}(\varphi(N(N_1(x))) + 1 - \varphi(N(y)))\} \\ S(x,y) &\leqslant \varphi^{-1}(\min\{1, \varphi(N(N_1(x))) + 1 - \varphi(N(y))\}) \\ S(x,y) &\leqslant (S_{\mathbf{LK}})_\varphi(N \circ N_1(x), (N_C)_\varphi \circ N(y)). \end{aligned}$$

Dla dowodu $(ii) \Rightarrow (i)$ wystarczy sprawdzić, że tak określona trójka (T, I_{S,N_1}, N) spełnia (MT). □

Tutaj ponownie możemy zastanowić się, czy podobny fakt jest prawdziwy w przypadku (CRI-GMT). Mając na uwadze Stwierdzenie 5.4, a także Twierdzenie 3.53 wiemy, jaką postać może mieć (S,N)-implikacja z własnością (IP). Mianowicie, jest to

$$I_{S,N}(x,y) = \varphi^{-1}(\min\{\varphi(\psi^{-1}(1-\psi(x))) + \varphi(y), 1\}), \quad x, y \in [0,1],$$

gdzie $\varphi, \psi \in \Phi$. Jeżeli $\psi = \varphi$, to $I_{S,N}$ jest Φ-sprzeżona z $I_{\mathbf{LK}}$. Poniższy przykład pokazuje, że gdy $\psi \neq \varphi$, to trójka $(T, I_{S,N}, N)$ nie spełnia (CRI-GMT) dla $T = T_{\mathbf{LK}}$.

Przykład 5.8. Rozważmy $\varphi(x) = x$ oraz $\psi(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Ponadto, niech $I(x,y) = \min\{\sqrt{1-x^2} + y, 1\}$, $T = T_{\mathbf{LK}}$ oraz $N(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,1]$. Ustalmy $x = 0.8$. Wtedy mamy $N(x) = 0.6$, z drugiej strony

$$\sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(0.8, y)) \geqslant T(N(0.4), I(0.8, 0.4)) = T(\sqrt{0.84}, 1) = \sqrt{0.84} > 0.6,$$

co oznacza, że dla tak wybrana trójka (T, I, N) nie spełnia (CRI-GMT).

Podamy teraz proste zależności między (MP) i (MT).

Stwierdzenie 5.9. *Niech S będzie t-konormą, a N negacją ścisłą. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $(T, I_{S,N})$ *spełnia* (MP).

(ii) $(T, I_{S,N^{-1}}, N^{-1})$ *spełnia* (MT).

Dowód. Z faktu, iż N jest ścisła, zatem różnowartościowa otrzymujemy to, iż dla wszystkich $x, y \in [0,1]$ istnieją takie $x_1, y_1 \in [0,1]$, że $x = N^{-1}(y_1)$, $y = N^{-1}(x_1)$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} T(x, I_{S,N}(x,y)) \leqslant y &\Leftrightarrow \\ T(N^{-1}(y_1), S(N(N^{-1}(y_1)), N^{-1}(x_1))) \leqslant N^{-1}(x_1) &\Leftrightarrow \\ T(N^{-1}(y_1), S(y_1, N^{-1}(x_1))) \leqslant N^{-1}(x_1) &\Leftrightarrow \\ T(N^{-1}(y_1), S(N^{-1}(x_1), y_1)) \leqslant N^{-1}(x_1) &\Leftrightarrow \\ T(N^{-1}(y_1), I_{S,N^{-1}}(x_1, y_1)) \leqslant N^{-1}(x_1) & \end{aligned}$$

□

Podobne, ogólniejsze twierdzenie, ale t-norm ciągłych zostało już pokazane w [39].

Twierdzenie 5.10 ([39, Theorem 1]). *Niech T będzie t-normą ciągłą, N negacją silną, a $I, I^N \colon [0,1]^2 \to [0,1]$ takimi funkcjami, że $I^N(x,y) = N(I(N(y), N(x)))$, $x, y \in [0,1]$. Wtedy*

(i) (T, I^N) *spełnia* (MP) $\Leftrightarrow$ (T, I, N) *spełnia* (MT),

(ii) (T, I^N, N) *spełnia* (MT) $\Leftrightarrow$ (T, I) *spełnia* (MP).

5.1.3 (MT) dla innych rodzin implikacji

Tutaj podamy jedynie kilka faktów na temat innych rodzin implikacji rozmytych.

Wniosek 5.11. Jeżeli I jest taką implikacją Yagera, że $N_I = N_{\mathbf{D_1}}$, to (C, I, N_I) spełnia (MT), gdzie C jest semikopułą.

Stwierdzenie 5.12. *Niech T będzie t-normą, a N taką negacją rozmytą, że (T, N) spełnia* (LC)*. Wówczas, jeżeli I_C jest implikacją probabilistyczną opartą na kopule C spełniającej warunek*

$$C(x,y) \leqslant xy, \quad x, y \in [0,1],$$

to (T, I_C, N) spełnia (MT).

Dowód. Wystarczy że ustalimy $x > 0$. Wtedy mamy

$$T(N(y), I_C(x,y)) = T\left(N(y), \frac{C(x,y)}{x}\right) \leqslant T\left(N(y), \frac{xy}{x}\right) = T(N(y), y) = 0 \leqslant N(x),$$

dla wszystkich $y \in [0,1]$. □

5.2 Równanie (BK-GMT)

Zauważmy, że równanie (BK-GMT) nie ma rózwiązań. Istotnie,

$$0 \leqslant \inf_{y\in[0,1]} I(N(y), T(x,y)) \leqslant I(N(0), T(x,0)) = I(1,0) = 0 \neq N(x), \quad x \in [0,1].$$

W przypadku równań pochodzących od CRI korzystaliśmy ze złożenia $\overset{C}{\circ}$, gdzie najczęściej C było t-normą, zatem funkcją przemienną. Dlatego też tutaj przeanalizujmy inne równanie:

$$N_1(x) = \inf_{z\in[0,1]} I(T(x,y), N_2(y)), \quad x \in [0,1], \tag{5.1}$$

gdzie $I \in \mathcal{FI}$, T jest t-normą, a N_1, N_2 dowolnymi negacjami rozmytymi.

Stwierdzenie 5.13. *Niech T będzie t-normą, niech $I \in \mathcal{FI}$, a N_1, N_2 niech będą dowolnymi negacjami rozmytymi. Wówczas następujace warunki są równoważne:*

(i) (T, I, N_1, N_2) *spełnia* (5.1).

(ii) $N_1 = N_I$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

$$\inf_{y\in[0,1]} I(T(x,y), N_2(y)) = I(T(x,1), N(1)) = I(x,0) = N_I(x).$$

□

ROZDZIAŁ 6

Prawo redukcji do absurdu

W rozdziale tym zajmiemy sie poniższą nierównością oraz równaniami funkcyjnymi:

$$T(N(y), I(N(x), y)) \leqslant x, \quad x, y \in [0, 1], \tag{RA}$$

$$x = \sup_{y \in [0,1]} T(N(y), I(N(x), y)), \quad x \in [0, 1], \tag{CRI-GRA}$$

$$x = \inf_{y \in [0,1]} I(N(y), T(N(x), y)), \quad x \in [0, 1]. \tag{BK-GRA}$$

6.1 Nierówność (RA)

Podobnie jak w poprzednim paragrafie, tutaj możemy podać większość analogicznych własności jak w Stwierdzeniu 5.1, które można udowodnić w podobny sposób.

Stwierdzenie 6.1. *Niech C będzie semikopułą oraz niech $I \in \mathcal{FI}$. Jeżeli (C, I, N) spełnia* (RA)*, to*

(i) jeżeli I spełnia (NP)*, to (C, N) spełnia* (LC)*,*

(ii) jeżeli N_I jest bijekcją, to $N_I^{-1} \leqslant N$,

(iii) jeżeli $C = T$ jest t-normą, a I spełnia (NP)*, to $N \leqslant N_T$,*

(iv) jeżeli $C = T$ jest t-normą oraz $N \neq N_{\mathbf{D_1}}$, to T ma dzielniki zera,

(v) jeżeli $N_I(x) \neq 0$, $x \in [0, 1)$, a $C = T$ jest ciągłą t-normą, to $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$ dla pewnego $\varphi \in \Phi$,

(vi) jeżeli $I_1 \in \mathcal{FI}$, a C_2 jest taką koniunkcją rozmytą, że $C_2 \leqslant C$ oraz $I_1 \leqslant I$, to (C_2, I_1) spełnia (RA)*.*

Stwierdzenie 6.2. *Niech C będzie semikopułą, niech $I \in \mathcal{FI}$ oraz niech $N = N_{\mathbf{D_1}}$. Wówczas $(C, I, N_{\mathbf{D_1}})$ nie spełnia* (RA).

Dowód. Weźmy $y = 0, x < 1$. Wówczas

$$C(N(0), I(N(x), 0)) = C(1, I(0, 0)) = C(1, 1) = 1 > x.$$

□

Podamy teraz wynik dla nierówności (RA) przy założeniach ciągłości dla t-normy T oraz tego, by negacja N była silna.

Twierdzenie 6.3 ([38, Proposition 6.3])**.** *Niech T będzie t-normą ciągłą, a N negacją silną oraz niech $I \in \mathcal{FI}$ spełnia* (NP)*. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) (T, I, N) *spełnia* (RA).

(ii) $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi$, $N(x) \leqslant (N_{\mathbf{C}})_\varphi(x)$ *oraz*

$$\varphi(I(x, y)) \leqslant 1 - \varphi(N(y)) + \varphi(N(x)), \; x, y \in [0, 1],$$

dla pewnego $\varphi \in \Phi$.

6.1.1 (RA) dla R-implikacji

Tutaj podobnie jak dla nierówności (MP) i (MT) możemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.4. *Niech N będzie negacją silną, T t-normą oraz niech I_T spełnia* (L-CP) *ze względu na N. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) (T, I_T, N) *spełnia* (RA).

(ii) T jest lewostronnie ciągła.

Dowód. $(ii) \Rightarrow (i)$. Jeżeli T jest lewostronnie ciągła, to korzystając z własności (RP) dla dowolnych $x, y, z \in [0, 1]$ otrzymujemy

$$I_T(N(y), x) = I_T(N(x), y) \geqslant I_T(N(x), y) \Leftrightarrow T(N(y), I(N(x), y)) \leqslant x.$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Ta cześć jest analogiczna to dowodów Twierdzeń 3.17 i 5.5. Aby wykazać lewostronną ciągłość T wystarczy pokazać implikację

$$I_T(x, y) \geqslant z \Rightarrow T(x, z) \leqslant y, \quad x, y, z \in [0, 1].$$

Ustalmy zatem takie $x, y, z \in [0, 1]$, że $I_T(x, y) \geqslant z$. Zauważmy, że jeżeli N jest silna to $x = N(x_1)$ dla pewnego $x_1 \in [0, 1]$. Wówczas

$$T(x, z) \leqslant T(x, I_T(x, y)) = T(N(x_1), I_T(N(x_1), y)) = T(N(x_1), I_T(N(y), x_1)) \leqslant y,$$

co oznacza, że T jest t-normą lewostronnie ciągłą. □

Uwaga 6.5. Wiemy, że jeżeli I_T spełnia (L-CP) z negacją N, to $N = N_{I_T}$ jest silna. Jednak nie jest to warunek równoważny z lewostronną ciągłością T. Istotnie, implikacja Fodora $I_{\mathbf{FD}}$, która spełnia (L-CP) z $N_{\mathbf{C}}$ może być indukowana z t-normy $T_{\mathbf{nM}^*}$ (nielewostronnie ciągłej) danej wzorem

$$T_{\mathbf{nM}^*}(x,y) = \begin{cases} 0, & x+y<1, \\ \min(x,y), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dlatego też jednym z warunków wystarczających na to, aby T była lewostronnie ciągła może być spełnianie nierówności (RA) przez trójkę (T, I_T, N_{I_T}).

6.1.2 (RA) dla (S,N)-implikacji

W poprzednim paragrafie istotne było założenie lewostronnej ciągłości t-normy oraz tego, aby negacja była silna. Zauważmy, że dla takiej negacji N (S,N)-implikacja $I_{S,N}$ spełnia (L-CP):

$$I_{S,N}(N(x),y) = S(N(N(x)),y) = S(x,y) = S(N(N(y)),x) = I_{S,N}(N(y),x),$$

dla $x, y \in [0,1]$. Jeśli jednak rozważymy te (S,N)-implikacje $I_{S,N}$, które należą także do rodziny R-implikacji indukowanych z lewostronnie ciągłych t-norm, okaże się, że $I_{S,N} = (I_{\mathbf{LK}})_\varphi$ dla ustalonego $\varphi \in \Phi$. Jak widać, to dość uboga klasa implikacji.

Możemy jednak podać pewną równoważność dotycząca kilku nierówności opierając się na Stwierdzeniu 5.9.

Wniosek 6.6. Niech T będzie t-normą, S t-konormą, a N negacją silną. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $(T, I_{S,N})$ spełnia (MP).

(ii) $(T, I_{S,N}, N)$ spełnia (MT).

(iii) $(T, I_{S,N}, N)$ spełnia (RA).

Dowód. Pokażemy jedynie, że $(ii) \Leftrightarrow (iii)$, gdyż równoważność $(i) \Leftrightarrow (ii)$ jest jasna ze Stwierdzenia 5.9, gdzie wystarczyło, by N była negacją ścisłą. Zatem ustalmy $x, y \in [0,1]$. Skoro N jest silna, to dla x mamy $z = N(x)$ dla pewnego $z \in [0,1]$. Zatem

$$T(N(y), I_{S,N}(x,y)) \leqslant N(x) \Leftrightarrow T(N(y), I_{S,N}(N(z),y)) \leqslant z.$$

Z faktu, iż N jest silna - nierówności zachodzą dla dowolnych $y, z \in [0,1]$. $\square$

6.1.3 (RA) dla implikacji Yagera

Rozważmy tutaj przypadek, gdy N jest negacją indukowaną z I_f.

Uwaga 6.7. Jeżeli I_f jest taką implikacją, że $f(0) = \infty$, to (T, I_f, N_{I_f}) nie spełnia (RA) dla żadnej semikopuły T.

Dowód. Jest to oczywiste na mocy Stwierdzenia 6.2. □

Niech zatem $f(x) < \infty$ oraz niech będzie f będzie negacją silną. Jest to równoważne z faktem, iż f_1 jest negacją silną ([5, Proposition 3.1.6]), gdzie f_1 jest dana wzorem

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{f(0)}, \quad x \in [0, 1].$$

Ponadto, bez straty ogólności, możemy tu ograniczyć się do rozważania takiej I_f, że $f(0) = 1$ ([5, Proposition 3.1.4]).

Twierdzenie 6.8. *Niech I_f będzie taką f-implikacją, że f jst negacją silną oraz niech T będzie t-normą, której generatorem addytywnym jest f. Wówczas następujace warunki są równoważne:*

(i) (T, I_f, N_{I_f}) *spełnia* (RA).

(ii) $f(x) \geqslant 1 - x,\ x \in [0, 1]$.

Dowód. *(i)* ⇒ *(ii)*. Ustalmy $x, y \in [0, 1]$. Skoro f jest negacją silną, to $f = f^{-1}$, a z założenia mamy:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\min\{1, f(f(y)) + f(f(f(x)f(y)))\}) &\leqslant x \\ f^{-1}(\min\{1, y + f(x)f(y)\}) &\leqslant x, \end{aligned}$$

dla $y + f(x)f(y) \leqslant 1$ mamy $f^{-1}(1) = 0 \leqslant x$, w przeciwnym przypadku otrzymujemy

$$\begin{aligned} f^{-1}(y + f(x)f(y)) &\leqslant x \\ y + f(x)f(y) &\geqslant f(x), \end{aligned}$$

zatem przyjmując $x = 0$, otrzymujemy $f(y) \geqslant 1 - y$.
(ii) ⇒ *(i)*. Dla ustalonych $x, y \in [0, 1]$ mamy

$$f^{-1}(y + f(x)f(y)) \leqslant f^{-1}(y + f(x)(1 - y)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

oraz oczywiście $f^{-1}(1) = 0 \leqslant x$, zatem

$$\begin{aligned} f^{-1}(\min\{1, f(f(y)) + f(f(f(x)f(y)))\}) &\leqslant x \\ T(N_{I_f}(y), I_f(N_{I_f}(x), y)) &\leqslant x. \end{aligned}$$

□

6.2 Równanie (CRI-GRA)

Twierdzenie 6.9. *Niech T będzie semikopułą, niech $I \in \mathcal{FI}$ oraz niech N będzie negacją ścisłą. Jeżeli (T, I, N) spełnia* (RA), *a $N = N_I^{-1}$, to (T, I, N) spełnia* (CRI-GRA).

Dowód. Skoro (T, I, N) spełnia (RA), to wystarczy, jeśli pokażemy, że istnieje taki $y_0 \in [0, 1]$, że $T(N(y_0), I(N(x), y_0)) = x$. Dla $y = 0$ mamy:

$$T(1, I(N(x), 0)) = I(N(x), 0) = N_I(N(x)) = N_I(N_I^{-1})(x) = x,$$

co kończy dowód. □

6.2.1 (CRI-GRA) dla R-implikacji

Opierając się na podobnych faktach wykazanych w przypadku (CRI-GHS), tutaj także wykazujemy analogiczne twierdzene.

Wniosek 6.10. Niech T^* będzie dowolną t-normą, T t-normą lewostronnie ciągłą, a N_{I_T} negacją silną. Wówczas następujące warunki sa równoważne:

(i) (T^*, I_T, N_{I_T}) spełnia (CRI-GRA).

(ii) $T^* \leqslant T$.

Dowód. $(i) \implies (ii)$. Skoro T jest t-normą lewostronnie ciągłą, to zachodzi poniższa równoważność (RP):

$$T(x, y) \leqslant T(x, y) \iff I_T(x, T(x, y)) \geqslant y,$$

dla $x, y, z \in [0, 1]$. Przypomnijmy, że jeżeli $N = N_{I_T}$ jest negacją silną, to I_T spełnia (L-CP) z N ([5, Proposition 2.5.28]). Stąd, dla dowolnie ustalonych $x, y \in [0, 1]$, mamy

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \sup_{z\in[0,1]} T^*(I_T(N(T(x, y)), z), N(z)) \\ &= \sup_{z\in[0,1]} T^*(I_T(N(z), T(x, y)), N(z)) \\ &\geqslant T^*(I_T(N(N^{-1}(x)), T(x, y)), N(N^{-1}(x))) \\ &= T^*(I_T(x, T(x, y)), x) \geqslant T^*(x, y). \end{aligned}$$

$(ii) \implies (i)$. Jeżeli $T^* \leqslant T$, to na mocy Twierdzenia 3.18 wiemy, iż para (T^*, I_T) spełnia (CRI-GHS). Dlatego też na podstawie Twierdzenia 3.12 otrzymujemy, że (T^*, I_T, N_{I_T}) spełnia (CRI-GRA). □

Ponownie korzystając w wykazanych faktów - Twierdzeń 6.4 oraz 6.9 otrzymujemy poniższy wniosek.

Wniosek 6.11. Niech N będzie negacją silną, T niech będzie t-normą oraz niech I_T spełnia (L-CP) ze względu na N. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) (T, I_T, N) spełnia (CRI-GRA).

(ii) T jest lewostronnie ciągła.

6.2.2 (CRI-GRA) dla (S, N)-impikacji

Korzystając z powyższych twierdzeń możemy otrzymać poniższy wniosek.

Wniosek 6.12 (por. [29, Theorem 3.18])**.** Niech T będzie t-normą ciągłą, a N negacją silną oraz niech I będzie S-implikacją. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) (T, I, N) spełnia (CRI-GRA).

(ii) $T = (T_{\mathbf{LK}})_\varphi, N(x) \leqslant (N_{\mathbf{C}})_\varphi(x)$ oraz

$$\varphi(I(x, y)) \leqslant 1 - \varphi(N(y)) + \varphi(N(x)), \; x, y \in [0, 1],$$

dla pewnego $\varphi \in \Phi$.

Dowód. Zauważmy, że jeśli I jest S-implikacją, to $N_I = N_I^{-1} = N$, a z założenia N jest silna. Stąd i z Twierdzeń 6.3 oraz 6.9 otrzymujemy żądaną równoważność. □

Uwaga 6.13. Możemy znaleźć wiele przykładów S-implikacji spełniających założenia poprzedniego twierdzenia: $I_{\mathbf{LK}}, I_{\mathbf{RC}}, I_{\mathbf{KD}}$.

6.2.3 (CRI-GRA) dla implikacji Yagera

Korzystając z Twierdzeń 6.8 oraz 6.9 możemy sformułować analogiczny wniosek.

Wniosek 6.14. Niech I_f będzie taką f-implikacją, że f jest negacją silną oraz niech T będzie t-normą, której generatorem addytywnym jest f. Wówczas następujace warunki są równoważne:

(i) (T, I_f, N_{I_f}) spełnia (CRI-GRA).

(ii) $f(x) \geqslant 1 - x, \; x \in [0, 1]$.

6.3 Równanie (BK-GRA)

Tutaj zauważmy, że przypadek jest analogiczny do równania (BK-GMT).

Uwaga 6.15. Niech T będzie t-normą oraz niech $I \in \mathcal{FI}$, a N niech będzie negacją. Wówczas nie istnieje trójka (T, I, N) spełniająca (BK-GRA).

Dowód. Ustalmy $x \in [0,1]$. Wówczas

$$0 \leqslant \inf_{y\in[0,1]} I(N(y), T(N(x), y)) \leqslant I(N(0), T(N(x), 0)) = I(1,0) = 0 \neq x$$

dla dowolnego $x > 0$. □

Dlatego też (podobnie jak dla (BK-GMT)) przy innym zapisie schematu prawa redukcji do absurdu można otrzymać poniższe równanie:

$$x = \inf_{y\in[0,1]} I(T(N(x), y), N(y)), \quad x \in [0,1]. \tag{6.1}$$

Stwierdzenie 6.16. *Niech $I \in \mathcal{FI}$ będzie taka, że N_I jest ścisła, T niech będzie t-normą, a N negacją. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) (T, I, N) *spełnia* (6.1).

(ii) $N_I^{-1} = N$.

Dowód. Ustalmy $x \in [0,1]$. Wówczas

$$\inf_{y\in[0,1]} I(T(N(x), y), N(y)) = I(T(N(x), 1), N(1)) = I(N(x), 0),$$

zatem z dowolności x mamy

$$x = N_I(N(x)) \Leftrightarrow N_I^{-1}(x) = N(x),$$

z faktu, iż N_I jest ścisła. □

ROZDZIAŁ 7

Inne równania

Oczywiście, z teoretycznego punktu widzenia, możemy rozważyć także inne postaci równania utworzonego dla schematu sylogizmu hipotetycznego, a przy pomocy dwóch wspomnianych reguł wnioskowania - reguły złożeniowej Zadeha oraz iloczynu Bandlera Kohouta. W złożeniu

$$R_3 = R_1 \overset{I}{\triangleleft} R_2,$$

gdzie R_1, R_2, R_3 są relacjami rozmytymi, możemy użyć innego modelu tych relacji, tak by otrzymać poniższe równanie funkcyjne:

$$I_2(A(x), C(y)) = \inf_{z \in Z} I_1(I_2(A(x), B(z)), I_2(B(z), C(y))),$$

gdzie $A \in \mathcal{F}(X), B \in \mathcal{F}(Y), C \in \mathcal{F}(Z)$ (przy założeniu własności interpolacji).
Zatem możemy je zapisać następująco

$$I_2(x, y) = \inf_{z \in [0,1]} I_1(I_2(x, z), I_2(z, y)), \quad x, y \in [0, 1], \tag{7.1}$$

gdzie $I_1, I_2 \in \mathcal{FI}$. Zauważmy jednak, że takie równanie nie ma rozwiązań.

Stwierdzenie 7.1. *Niech $I_1, I_2 \in \mathcal{FI}$. Wówczas żadna para (I_1, I_2) nie spełnia równanie* (7.1).

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje para (I_1, I_2) spełniająca (7.1). Wówczas mielibyśmy

$$\begin{aligned} 1 = I_2(0,0) &= \inf_{z \in [0,1]} I_1(I_2(0,z), I_2(z,0)) = \inf_{z \in [0,1]} I_1(1, I_2(z,0)) = I_1(1, I_2(1,0)) \\ &= I_1(1,0) = 0, \end{aligned}$$

co daje sprzeczność. □

Powróćmy też do wspomnianego w Rozdziale 2 wzoru (2.6). Przy założeniu własności interpolacji otrzymujemy poniższe równanie:

$$y = \sup_{x \in [0,1]} C(x, C(x, y)), \quad y \in [0, 1],$$

gdzie C jest semikopułą. Wtedy jednak dowolna taka funkcja C jest rozwiązaniem tego równania:

$$\sup_{x\in[0,1]} C(x, C(x,y)) = C(1, C(1,y)) = y, \quad y \in [0,1].$$

Interesującym równaniem jest poniższe - otrzymane dla iloczynu Bandlera-Kohouta i różnych modeli relacji:

$$\inf_{z\in[0,1]} I_1(I_2(x,z), C(z,y)) = S(x,y), \quad x,y \in [0,1], \tag{7.2}$$

gdzie $I_1, I_2 \in \mathcal{FI}$, C jest semikopułą, a S pewną funkcją agregującą (jeśli to równanie zachodzi dla tak ustalonych funkcji, będziemy pisać, że (I_1, I_2, C, S) spełnia (7.2)). Okazuje się, że ma ono pewne rozwiązania. Rozważmy następujące przykłady.

Przykład 7.2. Niech C będzie semikopułą.

(i) Przyjmijmy, że $I_1, I_2 \in \mathcal{FI}$ oraz niech I_1 spełnia (IP) oraz (NP). Ponadto, niech S będzie dana wzorem

$$S(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 1, y = 1, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas (I_1, I_2, C, S) spełnia (7.2).

(ii) Jeśli $I_2 = I_{\mathbf{RS}}, I_2 \in \mathcal{FI}$, to (I_C, I_2, C, C) spełnia (7.2).

(iii) Niech $I_1 = I_{\mathbf{LK}},\ I_2 = I_{\mathbf{GD}}, C = T_{\mathbf{M}}$. Wówczas (I_1, I_2, C, C) spełnia (7.2).

Ponadto, dla R-implikacji prawdziwy jest następujący fakt.

Stwierdzenie 7.3. *Niech T^* będzie t-normą lewostronnie ciągłą, a T taką t-normą, że $T^* \leqslant T$. Wówczas (I_{T^*}, I_T, T, T) spełnia* (7.2).

Zauważmy, że w podobny sposób możemy uzyskać jeszcze inne równania funkcyjne. Zapewne, niektóre z nich nie będą mieć rozwiązań jak równanie (7.1). Temat ten wymaga jednak dalszych badań, które powinny dotyczyć przynajmniej schematu sylogizmu hipotetycznego, gdyż jak widzieliśmy (Twierdzenie 3.12) jest najbardziej ogólny z innych tu omawianych.

ROZDZIAŁ 8

Uwagi o innych metodach

Do tej pory rozważaliśmy sytuację, gdy można było posłużyć się jednym zdaniem warunkowym JEŻELI - TO. Odnosząc się jednak do bazy wiedzy z rozmytych systemów wnioskowania łatwo domyślić się, że takich zdań mamy do dyspozycji znacznie więcej. Rozważmy zatem następującą bazę:

$$\text{JEŻELI } x \text{ jest } A_i, \text{ TO } y \text{ jest } B_i, \qquad i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{8.1}$$

dla pewnego ustalonego $n \in \mathbb{N}$ oraz $A_i \in \mathcal{F}(X), B_i \in \mathcal{F}(Y)$.
Oczywistym staje się teraz, że przy różnych złożeniach (CRI/iloczyn BK) oraz różnych modelach relacji R możemy otrzymać schemat wnioskowania o innych własnościach. Dwa takie modele zostały już przedstawione, oddają one inny charakter reguł wykorzystywanych w procesie wnioskowania. Model relacji $\overset{I}{\hat{R}}$ (1.58) posiada naturalny warunkowy charakter zdań (8.1). Drugi z kolei, $\overset{C}{\check{R}}$ (1.59) jest zupełnie inny. Semantycznie możemy go zdefiniować następująco: $C(A_i(x), B_i(y))$ - są poszczególnymi danymi, dla których operacja max jest ich gromadzeniem (agregacją).
Powróćmy teraz do schematu uogólnionego modus ponens, który zapiszmy jako:

$$A' \star R = B', \tag{8.2}$$

gdzie $\star \in \{\overset{C}{\circ}, \overset{I}{\triangleleft}\}$ oraz C jest semikopułą, a $I \in \mathcal{FI}$.
Opierając się na omawianej już własności interpolacji, możemy rozważyć poniższy układ równań:

$$A_i \star R = B_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{8.3}$$

Dla złożenia $\overset{C}{\circ}$ mamy

$$A_i \overset{C}{\circ} R = B_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{8.4}$$

a dla $\overset{I}{\triangleleft}$

$$A_i \overset{I}{\triangleleft} R = B_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{8.5}$$

Zaznaczmy, że oba te złożenia spełniają te same ważne własności, dlatego też schematy powstałe przez $\stackrel{I}{\triangleleft}$ mogą być używane w rozmytych systemach wnioskowania (M. Štěpnička, B. Jayaram [42]). Poniższe twierdzenia dają odpowiedź, kiedy takie układy mają rozwiązania.

Twierdzenie 8.1 ([33]). *Układ* (8.4) *ma rozwiązanie* $\Leftrightarrow$ $\hat{R}$ *jest jego rozwiązaniem. Ponadto, jest to największe rozwiązanie tego układu równań.*

Twierdzenie 8.2 ([34]). *Układ* (8.5) *ma rozwiązanie* $\Leftrightarrow$ $\check{R}$ *jest jego rozwiązaniem. Ponadto, jest to najmniejsze rozwiązanie tego układu równań.*

Dlatego też przy złożeniu $\stackrel{C}{\circ}$ zajmowaliśmy się głównie przypadkiem, gdy $R = \hat{R}$. W przypadku wielu zdań (8.1) trzeba wziąć pod uwagę także kolejność wnioskowania. Dlatego wyróżnia się dwa podejścia:

(i) FITA (ang. *First Infer Then Aggregate*) - polegające na tym, że najpierw tworzymy złożenie $B'_i = A' \star R_i$, a później agregujemy poszczególne B'_i, aby otrzymać B'.

(ii) FATI (ang. *First Aggregate Then Infer*) - tutaj najpierw agregujemy relacje R_i, a następnie obliczamy $B' = A' \star R$.

W przypadku uogólnionego modus ponens dla CRI (CRI-GMP), te dwie strategie rozumiemy w poniższy sposób ([5]):

(i) FITA:

$$B'(y) = \hat{T}_{i=1}^{m}(\sup_{x \in X} T(A'(x), I(A_i(x), B_i(y)))), \quad y \in Y,$$

(ii) FATI:

$$B'(y) = \sup_{x \in X} T(A'(x), \hat{T}_{i=1}^{m}(I(A_i(x), B_i(y)))), \quad y \in Y,$$

gdzie $T, \hat{T}$ są t-normami, a $I \in \mathcal{FI}$.

Nie zawsze jednak $\hat{T}$ musi być t-normą.

Przykład 8.3. Rozważmy następujący przykład, który pokaże, jak bardzo istotna jest metoda użyta na etapie agregacji (funkcja $\hat{T}$) w przypadku strategii FITA. Niech dane, które rozważamy będą obrazem, który chcemy przetworzyć zgodnie z pewnymi preferencjami użytkownika. Dla uproszczenia niech będzie to mały obraz składający się z 8 pikseli, które w formacie RGB mają poniższe wartości.

255	166	127
230	124	85
255	193	39
197	122	0
167	61	22
255	173	134
255	191	37
223	148	0

Wnioskowanie opiera się tu ma CRI. Wykorzystujemy wzór (2.5) dla pary $(T_{\mathbf{LK}}, I_{\mathbf{LK}})$ (wiemy, że ta para spełnia (CRI-GMP)). Rozważmy 2 reguły JEŻELI-TO, które przedstawimy jako:

$$\text{IF } (102, 204, 0), \text{ THEN } (128, 255, 0),$$
$$\text{IF } (255, 0, 0), \text{ THEN } (255, 51, 153),$$

co oznacza, że chcemy zmienić odcień koloru zielonego na jaśniejszy, a czerwony na różowy. Po przeprowadzeniu wnioskowania (dla danych przeskalowanych na $[0, 1]$) otrzymujemy nastepujące wyniki:

- dla średniej arytmetycznej:

255	211	160
230	177	128
255	224	173
197	160	109
167	114	65
255	214	163
255	223	172
223	186	135

- dla średniej harmonicznej:

255	201	159
230	161	128
255	220	171
197	151	107
167	89	65
255	206	162
255	218	170
223	178	133

- dla t-normy Łukasiewicza:

255	166	64
205	99	1
255	193	91
139	64	0
79	0	0
255	173	71
255	191	89
191	116	14

- dla t-normy minimum:

255	166	153
230	124	128
255	193	153
197	122	95
167	61	65
255	173	153
255	191	153
223	148	121

Zauważmy, że w tym przypadku wybór $\hat{T} = T_{\mathbf{LK}}$ nie jest najlepszy, ponieważ wartości dla poszczególnych pikselów są najmniejsze ze względu na to, iż $T_{\mathbf{LK}}$ jest nilpotentna, co w wyjściowym obrazie da ciemne kolory. Dlatego lepszym rozwiązaniem jest wybór którejś ze średnich.

8.1 Wnioskowanie oparte na podobieństwie

We wnioskowaniu przybliżonym oprócz reguł wnioskowania takich jak reguła złożeniowa Zadeha czy iloczyn Bandlera-Kohouta stosuje się też inne metody. Jedną z nich jest wnioskowanie oparte na podobieństwie (ang. *similarity based reasoning* - SBR). Przeanalizujmy wspomniane już reguły IF - THEN. Dla danego zdania *x jest A'* oraz przesłanki *x jest A* obliczamy wartość funkcji dopasowania, a następnie obliczamy B' korzystając z funkcji modyfikacji. Poniżej podamy kilka definicji potrzebnych do formalnego opisu tej metody a także przykład ją obrazujący.

Definicja 8.4 ([5, Definition 8.3.8])**.** Niech $X \neq \emptyset$. Dowolną funkcję $M\colon \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0, 1]$ nazywamy funkcją dopasowania.

Przykład 8.5. Niech $A, A' \in \mathcal{F}(X),\ X \neq \emptyset$. Poniższe funkcje są funkcjami dopasowania:

(i) max-min Zadeha: $M(A,A') = \max_{x\in X}\min\{A(x), A'(x)\}$,

(ii) miara podzbiorów (ang. *measure of subsethood*) [32]:

$$M(A,A') = \min_{x\in X} I(A'(x), A(x)).$$

Biorąc pod uwagę intuicję związaną z pojęciem dopasownia czy też podobieństwa, naturalne są następujące własności oczekiwane od funkcji dopasowania.
Niech $A_1, A_2, A \in \mathcal{F}(X)$ oraz niech M będzie funkcją dopasowania, wyróżniamy następujące własności:

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow M(A_1, A) \geqslant M(A_2, A), \tag{MF1}$$

$$M(A, A^c) = M(A^c, A) = 0, \tag{MF2}$$

$$M(A, A) = 1, \tag{MF3}$$

$$M(A_1, A_2) = M(A_2, A_1). \tag{MF4}$$

Zauważmy, że chociaż te własności wydają się być bardzo intuicyjne, nie jest możliwe, aby jednocześnie wszystkie były spełnione przez dowolną funkcję dopasowania.

Stwierdzenie 8.6. *Niech M będzie funkcją dopasowania. Wówczas wszystkie warunki* (MF1) - (MF4) *nie są spełnione - są ze sobą sprzeczne.*

Dowód. Przypuśćmy, że funkcja M spełnia warunki (MF1), (MF2) oraz (MF3), wówczas dla ustalonego $A \in \mathcal{F}(X)$ mamy:

$$\begin{aligned} A^c \subseteq X \Rightarrow 0 = M(A^c, A) &\geqslant M(X, A) \\ &\Rightarrow M(X, A) = 0, \end{aligned}$$

stąd

$$A \subseteq X \Rightarrow 0 = M(A, X) \geqslant M(X, X) = 1,$$

co daje sprzeczność. □

Kolejną funkcją potrzebną w tym wnioskowaniu jest funkcja modyfikacji.

Definicja 8.7 ([5])**.** Niech $X, Y \neq \emptyset$ oraz $A, A' \in \mathcal{F}(X), B \in \mathcal{F}(Y)$ a M funkcją dopasowania. Funkcję $J\colon [0,1] \times \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(Y)$ nazywamy funkcją modyfikacji. Zatem

$$J(M(A,A'), B(y)) = J(s, B(y)) = B'(y), \quad y \in Y,$$

gdzie $s = M(A, A')$,

Przykład 8.8. Przyjmujemy, że dla ustalonych zbiorów $A, A' \in \mathcal{F}(X)$, $s = M(A, A')$. Wówczas:

(i) (ang. *more or less*) $J_{\mathbf{ML}}(s, B(x)) = B'(x) = \min\{1, \frac{B(x)}{s}\}$,

(ii) (ang. *Membership Value Reduction*) $J_{\mathbf{MVB}}(s, B(x)) = B'(x) = B(x) \cdot s$ (zob. [40]), przy czym $\cdot$ może być zastąpione dowolną t-normą [5].

Rozważmy poniższy przykład porównujący dwie metody.

Przykład 8.9. Niech $A = [0.2, 0.4, 0.5]$, $B = [0.7, 0.1, 0.9]$ oraz $A' = [0.1, 0.3, 0.6]$.

(i) **SBR.** Niech funkcja M będzie dana wzorem

$$M(A, A') = \sup_{x \in X} T(N(S(A(x), A'(x))), I(A(x), N(A'(x)))),$$

gdzie T jest t-normą, N negacja rozmytą, S t-konormą, a I implikacją rozmytą. Wówczas spełnione są własności (MF1), (MF2), (MF4).
Przyjmijmy $(T, N, S, I) = (T_{\mathbf{LK}}, N_{\mathbf{C}}, S_{\mathbf{LK}}, I_{\mathbf{LK}})$. Wówczas

$$\begin{aligned} M(A, A') &= T(0.7, I(0.2, 0.9)) \vee T(0.3, I(0.4, 0.7)) \vee T(1, I(0.5, 0.4)) \\ &= T(0.7, 1) \vee T(0.3, 1) \vee T(1, 0.9) = 0.9. \end{aligned}$$

(a) Niech $J = J_{\mathbf{ML}}$, wtedy

$$\begin{aligned} B'_a(x_1) &= J_{\mathbf{ML}}(s, B(x_1)) = \frac{7}{9}, \\ B'_a(x_2) &= J_{\mathbf{ML}}(s, B(x_2)) = \frac{1}{9}, \\ B'_a(x_3) &= J_{\mathbf{ML}}(s, B(x_3)) = 1. \end{aligned}$$

(b) Niech $J = J_{\mathbf{MVB}}$, ale iloczyn zastąpmy t-normą $T_{\mathbf{LK}}$. Wówczas

$$\begin{aligned} B'_b(x_1) &= J_{\mathbf{MVB}}(s, B(x_1)) = 0.6, \\ B'_b(x_2) &= J_{\mathbf{MVB}}(s, B(x_2)) = 0, \\ B'_b(x_3) &= J_{\mathbf{MVB}}(s, B(x_3)) = 0.8. \end{aligned}$$

Zatem jak widzimy otrzymane zbiory B' różnią się, lecz zachowują pewne podobieństwo - $M(B'_a, B'_b) = \frac{8}{9}$.

(ii) **CRI.** Policzmy B' ze wzoru (2.5), korzystając z faktu, iż para $(T, I) = (T_{\mathbf{LK}}, I_{\mathbf{LK}})$ spełnia równanie (CRI-GMP). Otrzymujemy wówczas

$$I(A, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 1 \\ 1 & 0.7 & 1 \\ 1 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$B' = [0.6, 0.2, 0.6].$$

Ponadto, $M(B'_a, B') = \frac{31}{45}$ oraz $M(B'_b, B') = 0.8$.

Zakończenie

W pracy zostały zbadane 4 nierówności oraz 8 równań funkcyjnych, dla których zostały wskazane także inne możliwe poboczne równania. Największa część rozprawy została poświęcona sylogizmowi hipotetycznemu, a w konsekwencji równaniu (CRI-GHS). Ponadto, znaczna część wyników skupia się wokół R-implikacji oraz (S, N)-implikacji. Dla implikacji Yagera udało się podać częściowe rezultaty. Natomiast rodzina implikacji probabilistycznych została jedynie wspomniana. Dlatego też te rodziny wymagają uzupełnienia w trakcie dalszych badań nad analizowanymi w rozprawie równaniami funkcyjnymi.

Kolejny kierunek badań związany jest z samym iloczynem Bandlera-Kohouta, który dotychczas traktowany był nieco drugorzędnie w stosunku do reguły złożeniowej Zadeha.

W dalszej kolejności można też badać strategie FITA i FATI w kontekście różnych schematów wnioskowania (nie tylko uogólnionego modus ponens) oraz różnych operatorów agregujących.

Skorowidz

Bibliografia

[1] C. Alsina and E. Trillas. When (S, N)-implications are (T, T_1)-conditional functions? *Fuzzy Sets and Systems*, 134:305–310, 2003.

[2] M. Baczyński, J. Drewniak, and J. Sobera. Semigroups of fuzzy implications. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 21:61–71, 2001.

[3] M. Baczyński, P. Grzegorzewski, P. Helbin, and W. Niemyska. Properties of the probabilistic implications and S-implications. *Information Sciences*, 331, 2016.

[4] M. Baczyński and B. Jayaram. Yager's classes of fuzzy implications: some properties and intersections. *Kybernetika*, 43:157–182, 2007.

[5] M. Baczyński and B. Jayaram. *Fuzzy Implications*, volume 231 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[6] M. Baczyński and **K. Miś**. Selected Properties of Generalized Hypothetical Syllogism Including the Case of R-implications. In J. Medina et al., editor, *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. Theory and Foundations*, volume 853, pages 673–684. Springer, 2018.

[7] B. De Baets. Analytical Solution Methods for Fuzzy Relational Equations. In D. Dubois and H. Prade, editors, *Fundamentals of Fuzzy Sets*, pages 291–340. Springer, Boston, MA, 2000.

[8] B. De Baets and E. Kerre. A revision of Bandler-Kohout compositions of relations. *Mathematica Pannonica*, 4:59–78, 1993.

[9] B. De Baets and E. Kerre. Fuzzy relational compositions. *Fuzzy Sets and Systems*, 60:109–120, 1993.

[10] W. Bandler and L. Kohout. Semantics of implication operators and fuzzy relational products. *Int. J. Man-Machines Studies*, pages 89–116, 1980.

[11] G. Birkhoff. *Lattice theory*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1967.

[12] T. Calvo, J. Martín, and G. Mayor. Aggregation of implication functions. In *8th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-13)*, pages 569–574. Atlantis Press, 2013/08.

[13] J. Drewniak. *Podstawy teorii zbiorów rozmytych.* Uniwersytet Śląski, Katowice, 1984.

[14] J. Drewniak and K. Kula. Generalized compositions of fuzzy relations. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 10:149–163, 2002.

[15] D. Driankov, H. Hellendoorn, and M. Reinfrank. *An Introduction to Fuzzy Control.* Springer, Berlin Heidelberg, 2 edition, 1993.

[16] F. Durante and C. Sempi. Semicopulae. *Kybernetika*, 41(3):315–328, 2005.

[17] J. Fodor and T. Keresztfalvi. Nonstandard conjunctions and implications in fuzzy logic. *International Journal of Approximate Reasoning*, 12(2):69–84, 1995.

[18] J. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[19] C. Genest, J.J. Quesada Molina, J.A. Rodríguez Lallena, and C. Sempi. A Characterization of Quasi-copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, 69(2):193–205, 1999.

[20] S. Gottwald. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: The Foundations of Application - from a Mathematical Point of View.* Braunschweig, 1993.

[21] M. Grabisch, J. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap. *Aggregation Functions.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[22] P. Grzegorzewski. Probabilistic Implications. In *Proceedings of the 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology*, pages 254–258, Amsterdam, 2011. Atlantis Press.

[23] P. Grzegorzewski. Probabilistic implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 226:53–66, 2013.

[24] P. Helbin, **K. Miś**, and M. Baczyński. Some Remarks on Generalized Hypothetical Syllogism and Yager's Implication. In R. Halaš, M. Gagolewski, and R. Mesiar, editors, *New Trends in Aggregation Theory*, pages 129–139. Springer International Publishing, 2019.

[25] C. Igel and K.-H. Temme. The Chaining Syllogism in Fuzzy Logic. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12(6):849–853, 2004.

[26] E. P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. *Triangular Norms.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[27] G. J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications.* Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[28] **K. Miś** and M. Baczyński. Different Forms of Generalized Hypothetical Syllogism with Regard to R-Implications. In L. Rutkowski et al., editor, *Artificial Intelligence and Soft Computing*, volume 11508, pages 304–313. Springer, 2019.

[29] **K. Miś**, M. Baczyński, and P. Helbin. Some Remarks on the Generalized Scheme of Reduction to Absurdity and Generalized Hypothetical Syllogism in Fuzzy Logic. In *2019 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2019)*, pages 423–429. Atlantis Press, 2019.

[30] A. Król. Dependencies between fuzzy conjunctions and implications. In S. Galichet, J. Montero, and G. Mauris, editors, *Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-2011) and LFA-2011*, volume 1, pages 230–237. Adv. Intell. Syst. Res., 2011.

[31] K. Menger. Statistical Metrics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 28(12):535–537, 1942.

[32] N. N. Morsi and A. A. Fahmy. On generalized modus ponens with multiple rules and a residuated implication. *Fuzzy Sets and Systems*, 129:267–274, 2002.

[33] A. Di Nola, S. Sessa, W. Pedrycz, and E. Sanchez. *Fuzzy Relation Equations and Their Applications to Knowledge Engineering.* Springer, Dordrecht, 1989.

[34] W. Pedrycz. Applications of fuzzy relational equations for methods of reasoning in presence of fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems*, 16:163–175, 1985.

[35] B. Schweizer and A. Sklar. Statistical metric spaces. *Pacific J. Math.*, 10(1):313–334, 1960.

[36] E. Trillas. Sobre funciones de negación en la teoria de conjuntos difusos. *Stochastica*, 3:47–60, 1979. English translation In: S. Barro, A. Bugarin and A. Sobrino, (eds.) Advances in fuzzy logic, Public. Univ. Santiago de Compostela, Spain, 31–45 (1998).

[37] E. Trillas, C. Alsina, and A. Pradera. On MPT-implication functions for fuzzy logic. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM.*, 98(1):259–271, 2004.

[38] E. Trillas, C. Alsina, and E. Renedo. On some schemes of reasoning in fuzzy logic. *New Math. Nat. Comput.*, 7(3):433–451, 2011.

[39] E. Trillas, C. Alsina, E. Renedo, and A. Pradera. On contra-symmetry and MPT conditionality in fuzzy logic. *Int. J. Intell. Syst.*, 20:313–326, 2005.

[40] I. B. Turksen and Z. Zhong. An approximate analogical reasoning approach based on similarity measures. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18(6):1049–1056, 1988.

[41] N. R. Vemuri. Investigations of fuzzy implications satisfying generalized hypothetical syllogism. *Fuzzy Sets and Systems*, 323:117–137, 2017.

[42] M. Štěpnička and B. Jayaram. On the Suitability of the Bandler-Kohout Subproduct as an Inference Mechanism. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(2):285–298, 2010.

[43] R. R. Yager. On some new classes of implication operators and their role in approximate reasoning. *Information Sciences*, 167:193–216, 2004.

[44] L. A. Zadeh. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

[45] L. A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. on Syst. Man and Cyber.*, 3:28–44, 1973.

[46] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. *Information Sciences*, 8:199–249, 1975.