PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU ŚLĄSKIEGO W KATOWICACH NR 2
PRACE MATEMATYCZNE I, 1969

MIECZYSŁAW KUCHARZEWSKI

Kovariante Ableitung der Skalare und Dichten.

EINLEITUNG. Es ist wohl bekannt, daß das Gradient jedes Skalarfeldes

$$\sigma(\xi^\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

kovarianter Vektor

$$\sigma_{,\nu} = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi^\nu}, \tag{2}$$

ist und als kovariante Ableitung des Skalarfeldes angenommen werden kann.

Es entstehen jetzt zwei Fragen: 1. Welche Axiome die kovariante Ableitung des Skalarfeldes eindeutig bestimmen? 2. Ist das Gradient (2) die einzige mögliche kovariante Ableitung des Skalarfeldes (1)?

In dieser Note gebe ich die Antwort auf diese Fragen. Insbesondere werden die Axiome für die kovariante Ableitung der Skalarfelder dargestellt (§ 1) und es wird bewiesen, daß das Gradient die einzige mögliche kovariante Ableitung der Skalarfelder ist (§ 2). In den Pragraphen 3, 4, wird das ähnliche Problem für die Dichten gelöst. Der Paragraph 5 enthält gewisse Zusammenhänge, die zwischen den kovarianten Ableitungen der Dichten verschiedener Gewichte auftreten.

Mit Hilfe ähnlicher Axiome kann man die kovariante Ableitung der Vektoren und Tensordichten beliebiger Valenz definieren. Mit diesen Pıoblemen werde ich mich in einer anderen Arbeit beschäftigen. Dann werden diese Betrachtungen auf die beliebigen linearen geometrischen Objekte verallgemeinert werden.

Der Begriff der kovarianten Ableitung ist mit demjenigen der linearen Übertragung eng verbunden. Die lineare Übertragung wurde zum ersten Mal von T. LEVI-CIVITA [4] und unabhängig von J. A. SCHOUTEN [8] eingeführt. Die Axiome für das kovariante Differential wurden von J. A. SCHOUTEN und V. HLAVATY [3] im Jahre 1929 gegeben. Auf eine andere Weise definierte S. GOŁĄB [1] die absolute Ableitung der geometrischen Objekte. Die Definition von S. GOŁĄB wurde dann von A. MOÓR weiter entwickelt und angewandt, [5], [6], [7]. A. SZYBIAK bestimmte die kovariante Ableitung der geometrischen Objekte erster Klasse [10], [11], [12]. Die kovariante Ableitung der Pseudoobjekte wurde von E. SIWEK [9] definiert.

Obwohl beschäftigten sich viele Autoren mit der kovarianten Ableitung der Tensordichten und diese wurde auf verschiedene Objekte und auf verschiedene Räume verallgemeinert, wird doch die kovariante Ableitung der Skalare bisher nicht untersucht worden. Die kovariante Ableitung der Dichten bestimmte S. Gołąb in seinem Buch [2], s. 169. Die dort dargestellte Methode ist nicht axiomatisch. Die vorliegende Note soll also die Betrachtungen der Tensoranalysis hinsichtlich der kovarianten Ableitung etwas erklären und ergänzen.

§ 1. Kovariante Ableitung der Skalarfelder. Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C_r, $r \geqslant 1$. Bezeichnen wir mit ξ^ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, die lokalen Koordinaten eines Punktes $x \in X_r^n$ und mit

$$\sigma(\xi^\nu) \tag{1.1}$$

ein Skalarfeld, das im Gebiet $D \subset X_r^n$ definiert und der Klasse C_1 ist. Die partiellen Ableitungen

$$\sigma_{,\nu} = \frac{\partial\sigma}{\partial\xi^\nu}, \tag{1.2}$$

stellen die Komponenten eines kovarianten Vektors dar, der Gradient genannt ist.

Es wird gezeigt werden, daß (1.2) unter gewissen Bedingungen die einzige kovariante Ableitung des Skalarfeldes (1.1) ist. Zu diesem Zwecke führe ich zuerst die Definition der kovarianten Ableitung des Skalarfeldes ein.

Definition 1.1. Die kovariante Ableitung des Skalarfeldes (1.1) ist jedes System von n Funktionen

$$F_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n,$$

das die folgenden Bedingungen erfullt:

1°. F ist nur von σ ind $\sigma_{,\nu}$ abhängig,

$$F_\lambda = F_\lambda(\sigma, \sigma_{,\nu}). \tag{1.3}$$

2°. F ist hinsichtlich σ linear, d.h. für zwei beliebige Skalarfelder $\underset{1}{\sigma}, \underset{2}{\sigma}$ und für zwei beliebige reelle Zahlen $\underset{1}{\alpha}, \underset{2}{\alpha}$ gilt die Identität

$$F_\lambda\big(\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\sigma} + \underset{2}{\alpha}\underset{2}{\sigma}, (\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\sigma} + \underset{2}{\alpha}\underset{2}{\sigma})_{,\nu}\big) = \underset{1}{\alpha} F_\lambda(\underset{1}{\sigma}, \underset{1}{\sigma}_{,\nu}) + \underset{2}{\alpha} F_\lambda(\underset{2}{\sigma}, \underset{2}{\sigma}_{,\nu}). \tag{1.4}$$

3°. Für das Produkt von zwei beliebigen Skalarfelder $\underset{1}{\sigma}$ und $\underset{2}{\sigma}$ ist die s.g. Leibnizsche Formel

$$F_\lambda\big(\underset{1}{\sigma}\underset{2}{\sigma}, (\underset{1}{\sigma}\underset{2}{\sigma})_{,\nu}\big) = \underset{1}{\sigma} F_\lambda(\underset{2}{\sigma}, \underset{2}{\sigma}_{,\nu}) + \underset{2}{\sigma} F_\lambda(\underset{1}{\sigma}, \underset{1}{\sigma}_{,\nu}), \tag{1.5}$$

erfüllt.

4°. F ist ein kovarianter Vektor. F_λ hat also die nachstehende Transformationsformel

$$F_{\lambda'}(\sigma', \sigma'_{,\nu'}) = A^\lambda_{\lambda'} F_\lambda(\sigma, \sigma_{,\nu}) \tag{1.6}$$

bei der Koordinatentransformation

$$\xi^{\nu'} = \xi^{\nu'}(\xi^{\nu}),$$

wo $A^{\lambda}_{\lambda'} = \dfrac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial \xi^{\lambda'}}$ die ersten partiellen Ableitungen der ursprünglichen Koordianten (ξ^{λ}) hinsichtlich der neuen $(\xi^{\lambda'})$ sind.

5°. Für die n Skalarfelder, die durch lokale Koordinaten folgendermaßen $\overset{\varkappa}{\sigma}=\xi^{\varkappa}$ definiert sind, ist F_{λ} gleich 0 bzw. 1, wenn $\lambda\neq\varkappa$ bzw. $\lambda=\varkappa$ ist:

$$F_{\lambda}(\overset{\varkappa}{\sigma}, \overset{\varkappa}{\sigma}_{,\nu}) = \delta^{\varkappa}_{\lambda}. \tag{1.7}$$

Es ist zu bemerken, daß die kovariante Ableitung (1.3) keine Differentialkomitante des Skalarfeldes (1.1) ist, weil wir nichts über die Form der Funktion (1.3) in einem anderen Koordinatensystem voraussetzen (vgl. [13], S. 57).

§ 2. Die Existenz und Eindeutigkeit der kovarianten Ableitung der Skalarfelder sind durch den folgenden Satz erledigt.

Satz 2.1. *Die einzige kovariante Ableitung des Skalarfeldes* (1.1), *die den Bedingungen* 1°—5° *genügt, ist das Gradient* (1.2) *von* σ:

$$F_{\lambda}(\sigma, \sigma_{,\nu}) = \sigma_{,\lambda} \tag{2.1}$$

Beweis. Aus 1°. und 2°. folgt, daß F_{λ} in σ und $\sigma_{,\nu}$ linear homogen ist, d.h. die Form

$$F_{\lambda}(\sigma, \sigma_{,\nu}) = C_{\lambda}\sigma + C^{\nu}_{\lambda}\sigma_{,\nu} \tag{2.2}$$

hat, webei C_{λ} und C^{ν}_{λ} beliebige Konstanten sind.

Setzen wir die rechte Seite von (2.2) in (1.5) ein, so erhalten wir die Gleichheit

$$C_{\lambda}\underset{1}{\sigma}\underset{2}{\sigma} + C^{\nu}_{\lambda}(\underset{1}{\sigma}\underset{2}{\sigma})_{,\nu} = \underset{1}{\sigma}(C_{\lambda}\underset{2}{\sigma} + C^{\nu}_{\lambda}\underset{2}{\sigma}_{,\nu}) + \underset{2}{\sigma}(C_{\lambda}\underset{1}{\sigma} + C^{\nu}_{\lambda}\underset{1}{\sigma}_{,\nu}),$$

aus der ergibt sich

$$C_{\lambda}\underset{1}{\sigma}\underset{2}{\sigma} = 0.$$

Da aber $\underset{1}{\sigma}, \underset{2}{\sigma}$ beliebig sind, folgt sofort

$$C_{\lambda} = 0 \tag{2.3}$$

daraus.

Wegen (2.3) nimmt (2.2) die folgende Gestalt

$$F_{\lambda}(\sigma, \sigma_{,\nu}) = C^{\nu}_{\lambda}\sigma_{,\nu} \tag{2.4}$$

an.

Wenn wir voraussetzen, daß (2.4) ein kovarianter Vektor sein soll, so müßen C^{ν}_{λ} die nachstehende Transformationsregel

$$C^{\nu'}_{\lambda'} = A^{\nu'}_{\nu} A^{\lambda}_{\lambda'} C^{\nu}_{\lambda} \tag{2.5}$$

bei der Koordinatentransformation haben. C_λ^ν ist also ein gemischter Tensor der Valenz (1,1).

Es ist leicht nachzuprüfen, daß (2.4) alle Bedingungen 1°—4° der Definition 1.1 erfüllt. Diese Bedingungen bestimmen also die kovariante Ableitung nicht eindeutig. Diese hängt nämlich von einem beliebigen Tensorfeld C_λ^ν ab. Um die Eindeutigkeit zu erhalten, müßen wir noch die zusätzliche Bedingung 5° annehmen. Jetzt wird diese Bedingung ausgenutzt. Zu diesem Zwecke setzen wir (2.4) in (1.7) ein. Dann erhält man

$$C_\lambda^\nu \xi^\varkappa_{,\nu} = \delta_\lambda^\varkappa .$$

Da aber $\xi^\varkappa_{,\nu} = \delta_\nu^\varkappa$ ist, haben wir davon

$$C_\lambda^\nu \delta_\nu^\varkappa = \delta_\lambda^\varkappa ,$$

und endlich

$$C_\lambda^\varkappa = \delta_\lambda^\varkappa . \tag{2.6}$$

Wird (2.6) in (2.4) eingesetzt, so nimmt es die im Satz 2.1 erforderte Form an. Der Satz 2.1 ist auf diese Weise bewiesen.

§ 3. Die kovariante Ableitung der Dichten. In diesem Paragraphen werden die Bedingungen gegeben, welche die kovariante Ableitung der Dichten eindeutig bestimmen. Wir nehmen hier an, daß die kovariante Ableitung der Skalare schon bestimmt und mit dem Gradient identisch ist.

Es sei $\mathfrak{G}(\xi^\nu)$ ein Dichtenfeld auf X_r^n. Um die Unterscheidung zwischen den W- und G-Dichten vermeiden zu können, werden wir die Transformationsformel von $\mathfrak{G}$ in der Form

$$\mathfrak{G}' = \varphi(J)\,\mathfrak{G} \tag{3.1}$$

schreiben, wo

$$\varphi(J) = |J|^\alpha \tag{3.2}$$

für W-Dichten (Weylsche Dichten) und

$$\varphi(J) = (\operatorname{sgn} J)\,|J|^\alpha \tag{3.3}$$

für G-Dichten (gewöhnliche Dichten) gleich ist. J bedeutet die Jacobische Determinante der Transformation, die von Koordinaten (ξ^ν) zu den $(\xi^{\nu'})$ führt:

$$J = |A_\nu^{\nu'}| .$$

Die Funktion φ erfüllt die multiplikative Funktionalgleichung

$$\varphi(\varrho)\,\varphi(\sigma) = \varphi(\varrho\sigma), \qquad \varrho, \sigma \neq 0, \tag{3.4}$$

für alle von Null verschiedene reelle Zahlen ϱ, σ.

Die Funktionen (3.2) und (3.3) sind nur für $J \neq 0$ definiert. Im Definitionsbereich sind sie also differenzierbar. Ihre Ableitungen genügen den folgenden Bedingungen

$$\varphi'(1) = \alpha , \tag{3.5}$$

und

$$\varphi'(\varrho) = \alpha \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}. \tag{3.6}$$

Die erste Bedingung folgt ohne weiteres aus der Definition von φ. Die zweite erhält man, wenn wir (3.4) nach σ differenzieren und dann $\sigma = 1$ einsetzen.

$$\varphi(\varrho)\,\varphi'(\sigma) = \varrho\varphi'(\varrho\sigma),$$

$$\varphi(\varrho)\,\varphi'(1) = \varrho\varphi'(\varrho),$$

$$\varphi'(\varrho) = \frac{\varphi'(1)\,\varphi(\varrho)}{\varrho}.$$

Nach diesen Bemerkungen stellen wir die folgende Definition der kovarianten Ableitung der Dichten ein.

Definition 3.1. Die kovariante Ableitung der Dichten ist jedes Funktionensystem

$$F_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, n,$$

welches die nachstehenden Bedingungen erfüllt:

1°. F_λ ist nur von $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{,\nu}$ abhängig

$$F_\lambda = F_\lambda(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{,\nu}).$$

2°. F_λ ist hinsichtlich $\mathfrak{G}$ additiv, d.h. für beliebige Dichten $\underset{1}{\mathfrak{G}}, \underset{2}{\mathfrak{G}}$ gilt die Relation

$$F_\lambda\big(\underset{2}{\mathfrak{G}} + \underset{1}{\mathfrak{G}}, (\underset{2}{\mathfrak{G}} + \underset{1}{\mathfrak{G}})_{,\nu}\underset{2}{\big)} = F_\lambda(\underset{1}{\mathfrak{G}}, \underset{1}{\mathfrak{G}}_{,\nu}) + F_\lambda(\underset{2}{\mathfrak{G}}, \underset{2}{\mathfrak{G}}_{,\nu}). \tag{3.7}$$

3°. Für das Produkt von beliebigen Skalaren σ und Dichten $\mathfrak{G}$ ist die so genannte Leibnizsche Regel

$$F_\lambda\big(\sigma\mathfrak{G}, (\sigma\mathfrak{G})_{,\nu}\big) = \sigma F_\lambda(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{,\nu}) + \mathfrak{G}\sigma_{,\lambda}, \tag{3.8}$$

erfüllt.

4°. F_λ ist eine kovariante Vektordichte derselben Art und desselben Gwichtes wie $\mathfrak{G}$, d.h. F_λ hat die folgende Transformationsformel

$$F_{\lambda'} = \varphi(J)\, A^{\lambda}_{\lambda'} F_\lambda \tag{3.9}$$

bei der Koordinatentransformation.

B e m e r k u n g 3.1. F_λ ist keine Differentialkomitante von $\mathfrak{G}$, weil wir nicht voraussetzen, daß $F_{\lambda'}$ mit F_λ identisch ist (vgl. [13], S. 57).

§ 4. Jetzt wird es gezeigt, daß die Bedingungen 1°—4° der Definition 3.1 die kovariante Ableitung der Dichten eindeutig bestimmen. Ich beweise nämlich den folgenden Satz.

Satz 4.1. *Jede kovariante Ableitung der Dichten, im Sinne der Definition* 3.1., *hat die Form*

$$F_\lambda(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{,\nu}) = \mathfrak{G}_{,\lambda} + C_\lambda \mathfrak{G}, \tag{4.1}$$

wo C_λ, $\lambda=1, \dots, n$, Konstanten sind, die sich bei der Koordinatentransformation folgendermaßen

$$C_{\lambda'} = A^{\lambda}_{\lambda'} C_\lambda - \alpha A^{\lambda}_{\lambda'} \partial_\lambda \ln |J| , \tag{4.2}$$

ändern

B e w e i s. Setzen wir in (3.8) für σ eine konstante Funktion, $\sigma_{,\nu}=0$, ein, so erhalten wir die Relation

$$F_\lambda\big(\sigma\mathfrak{G}, (\sigma\mathfrak{G})_{,\nu}\big) = \sigma F_\lambda(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{,\nu}) , \tag{4.3}$$

welche zeigt, daß F_λ hinsichtlich $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{,\nu}$ homogen erster Ordnung ist. Aus (4.3) und (3.7) ergibt sich dann, daß F_λ linear ist, d.h. für beliebige reelle Zahlen $\underset{1}{\alpha}, \underset{2}{\alpha}$ und für beliebige Dichten die Identität

$$F_\lambda\big(\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\mathfrak{G}} + \underset{2}{\alpha}\underset{2}{\mathfrak{G}}, (\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\mathfrak{G}} + \underset{2}{\alpha}\underset{2}{\mathfrak{G}})_{,\nu}\big) = \underset{1}{\alpha} F_\lambda(\underset{1}{\mathfrak{G}}, \underset{1}{\mathfrak{G}}_{,\nu}) + \underset{2}{\alpha} F_\lambda(\underset{2}{\mathfrak{G}}, \underset{2}{\mathfrak{G}}_{,\nu}) , \tag{4.4}$$

gilt. F_λ muß also die Form

$$F_\lambda(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{,\nu}) = C^{\nu}_{\lambda} \mathfrak{G}_{,\nu} + C_\lambda \mathfrak{G} , \tag{4.5}$$

haben, wobei C^{ν}_{λ} und C_λ beliebige Konstanten sind.

Mit Hilfe von (4.5) kann man die linke Seite von (3.8) so

$$F_\lambda\big(\sigma\mathfrak{G}, (\sigma\mathfrak{G})_{,\nu}\big) = C^{\nu}_{\lambda} \sigma_{,\nu} \mathfrak{G} + C^{\nu}_{\lambda} \sigma \mathfrak{G}_{,\nu} + C_\lambda \sigma \mathfrak{G} \tag{4.6}$$

darstellen. Die rechte Seite von (3.8) hat gleichfalls die Form

$$\sigma F_\lambda(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{,\nu}) + \mathfrak{G}\sigma_{,\lambda} = C^{\nu}_{\lambda} \sigma \mathfrak{G}_{,\nu} + C_\lambda \sigma \mathfrak{G} + \mathfrak{G}\sigma_{,\lambda} . \tag{4.7}$$

Durch Vergleichen der rechten Seiten von (4.6) und (4.7) erhält man die Gleichheit

$$C^{\nu}_{\lambda} \sigma_{,\nu} \mathfrak{G} = \mathfrak{G}\sigma_{,\lambda} ,$$

aus derer folgt

$$(C^{\nu}_{\lambda} - \delta^{\nu}_{\lambda}) \mathfrak{G}\sigma_{,\nu} = 0 .$$

Da aber $\mathfrak{G}\sigma_{,\nu}$, beliebig sind, folgen davon die Beziehungen

$$C^{\nu}_{\lambda} = \delta^{\nu}_{\lambda} . \tag{4.8}$$

Aus (4.8) und (4.5) erhalten wir die Form (4.1) von F_λ.

Die Transformationsformel (4.2) für C_λ folgt aus der Bedingung 4°. der Definition 3.1. Entsprechende Rechnungen sind unten zusammengestellt. In diesen wird die Form der kovarianten Ableitung (4.1), ihre Transformationsregel (3.9) und die Beziehung (3.6) ausgenutzt.

$$F_{\lambda'} = \varphi(J) A^{\lambda}_{\lambda'} (\mathfrak{G}_{,\lambda} + C_\lambda \mathfrak{G}) . \tag{4.9}$$

$$F_{\lambda'} = \mathfrak{G}'_{,\lambda'} + C_{\lambda'} \mathfrak{G}' = \left(\frac{d\varphi}{dJ} \mathfrak{G} J_{,\lambda} + \varphi(J) \mathfrak{G}_{,\lambda}\right) A^{\lambda}_{\lambda'} + C_{\lambda'} \varphi(J) \mathfrak{G} ,$$

$$F_{\lambda'} = \varphi(J) \mathfrak{G} \left[\alpha A^{\lambda}_{\lambda'} \partial_\lambda \ln |J| + C_{\lambda'}\right] + \varphi(J) \mathfrak{G}_{,\lambda} A^{\lambda}_{\lambda'} .$$

Das Vergleichen der rechten Seiten von (4.9) und (4.10) gibt (4.2). Somit ist der Satz 4.1 vollständig bewiesen.

§ 5. In der Formel (4.1) abhängt die Konstante C_λ im allgemeinen von Gewicht der Dichte und von ihrer Art (W-oder G-Dichte). C_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, sind also Funktionen, die sich folgendermaßen

$$C_\lambda = C_\lambda(\alpha, \varepsilon) \tag{5.1}$$

ausdrücken, wo α das Gewicht der Dichte bedeutet und $\varepsilon = 1$ für W-Dichten bzw. $\varepsilon = -1$ für G-Dichten ist.

Jetzt kann man die folgende Frage stellen. Welche Form müssen die Funktionen C_λ haben dafür, daß die kovariante Ableitung des Produktes von zwei beliebigen Dichten der Leibnizschen Regel genügt. Im weiteren gebe ich die Antwort auf diese Frage. Zuerst wird der folgende Satz bewiesen.

SATZ 5.1. *Genügt die durch* (4.1) *definierte kovariante Ableitung der Leibnizschen Regel für Produkte von zwei beliebigen Dichten, so hängt* (5.1) *von* ε *nicht ab*:

$$C_\lambda(\alpha, \varepsilon) = C_\lambda(\alpha, 1) = C_\lambda(\alpha). \tag{5.2}$$

B e w e i s. Es seien $\underset{1}{\mathfrak{G}}$ und $\underset{2}{\mathfrak{G}}$ zwei Dichten mit den Gewichten $\underset{1}{\alpha}$ und $\underset{2}{\alpha}$. Die kovarianten Ableitungen von $\underset{1}{\mathfrak{G}}$ und $\underset{2}{\mathfrak{G}}$ haben die Formen

$$F_{;\lambda}(\underset{1}{\mathfrak{G}}, \underset{1}{\mathfrak{G}}_{,\lambda}) = \underset{1}{\mathfrak{G}}_{,\lambda} + C_\lambda(\underset{1}{\alpha}, \underset{1}{\varepsilon})\,\underset{1}{\mathfrak{G}}, \tag{5.3}$$

$$F_{;\lambda}(\underset{2}{\mathfrak{G}}, \underset{2}{\mathfrak{G}}_{,\lambda}) = \underset{2}{\mathfrak{G}}_{,\lambda} + C_\lambda(\underset{2}{\alpha}, \underset{2}{\varepsilon})\,\underset{2}{\mathfrak{G}}. \tag{5.4}$$

Da das Produkt $\underset{1}{\mathfrak{G}}\underset{2}{\mathfrak{G}}$ die Dichte mit dem Gewicht $\underset{1}{\alpha}+\underset{2}{\alpha}$ ist, sieht seine kovariante Ableitung folgendermaßen

$$F_{;\lambda}(\underset{1}{\mathfrak{G}}\underset{2}{\mathfrak{G}}, (\underset{1}{\mathfrak{G}}\underset{2}{\mathfrak{G}})_{,\nu}) = (\underset{1}{\mathfrak{G}}\underset{2}{\mathfrak{G}})_{,\lambda} + C_\lambda(\underset{1}{\alpha}+\underset{2}{\alpha}, \underset{12}{\varepsilon\varepsilon})\,\underset{1}{\mathfrak{G}}\underset{2}{\mathfrak{G}}, \tag{5.5}$$

aus. Aus der Voraussetzung, daß die Leibnizesche Produktregel gilt, erhalten wir die Relation

$$(\underset{1}{\mathfrak{G}}\underset{2}{\mathfrak{G}})_{,\lambda} + C_\lambda(\underset{1}{\alpha}+\underset{2}{\alpha}, \underset{12}{\varepsilon\varepsilon})\,\underset{1}{\mathfrak{G}}\underset{2}{\mathfrak{G}} = [\underset{1}{\mathfrak{G}}_{,\lambda} + C_\lambda(\underset{1}{\alpha}, \underset{1}{\varepsilon})\,\underset{1}{\mathfrak{G}}]\,\underset{2}{\mathfrak{G}} + \underset{1}{\mathfrak{G}}\,[\underset{2}{\mathfrak{G}}_{,\lambda} + C_\lambda(\underset{2}{\alpha}, \underset{2}{\varepsilon})\,\underset{2}{\mathfrak{G}}].$$

Da $\underset{1}{\mathfrak{G}}$ und $\underset{2}{\mathfrak{G}}$ beliebige Werte annehmen können, folgt daraus die Gleichung

$$C_\lambda(\underset{1}{\alpha}+\underset{2}{\alpha}, \underset{12}{\varepsilon\varepsilon}) = C_\lambda(\underset{1}{\alpha}, \underset{1}{\varepsilon}) + C_\lambda(\underset{2}{\alpha}, \underset{2}{\varepsilon}). \tag{5.6}$$

Jetzt zeige ich, daß die Lösung von (5.6) von ε nicht abhängt. Zu diesem Zwecke setzen wir zuerst $\underset{1}{\alpha} = \underset{2}{\alpha} = 0$ in (5.6) ein:

$$C_\lambda(0, \underset{12}{\varepsilon\varepsilon}) = C_\lambda(0, \underset{1}{\varepsilon}) + C_\lambda(0, \underset{2}{\varepsilon}). \tag{5.7}$$

Ist $\underset{1}{\varepsilon}=\underset{2}{\varepsilon}=1$ in (5.7), so ergibt sich

$$C_\lambda(0, 1) = 2C_\lambda(0, 1),$$

und endlich

$$C_\lambda(0, +1) = 0. \tag{5.8}$$

Ganz leicht kann auch die die Relation

$$C_\lambda(0, -1), \tag{5.9}$$

gezeigt werden, wenn man $\underset{1}{\varepsilon}=\underset{2}{\varepsilon}=-1$ in (5.7) einsetzt.

Aus (5.8) und (5.9) erhalten wir

$$C_\lambda(0, \varepsilon) = 0. \tag{5.10}$$

Nehmen wir jetzt in (5.6), $\underset{2}{\alpha}=0$ $\underset{1}{\varepsilon}=1$ an, so geht (5.6), wegen (5.10), in die folgende Gleichung

$$C_\lambda(\underset{1}{\alpha}, \underset{2}{\varepsilon}) = C_\lambda(\underset{1}{\alpha}, 1) \tag{5.11}$$

über, aus deren (5.2) folgt, weil $\underset{1}{\alpha}$ und $\underset{2}{\varepsilon}$ beliebig sind. Der Satz 5.1 ist somit bewiesen.

Jetzt geben wir die Antwort auf die obengestellte Frage. Diese ist im folgenden Satz enthalten.

SATZ 5.2. *Genügt die durch* (4.1) *definierte kovariante Ableitung der Leibnizsche Produktregel für zwei beliebige Dichten und ist die Funktion* (5.1) *hinsichtlich* α *meßbar, so muß* (5.1) *die Form*

$$C_\lambda(\alpha, \varepsilon) = A_\lambda \alpha, \tag{5.12}$$

haben, wo A_λ *eine von* α *and* ε *unabhängige Konstante ist.*

Beweis. Aus dem Satz 5.1 und aus der Relation (5.6) ergibt sich, daß die kovariante Ableitung dann und nur dann die Leibnizsche Regel erfüllt, wenn die Funktion $C_\lambda(\alpha)$ der Cauchyschen Funktionalgleichung

$$C_\lambda(\alpha+\beta) = C_\lambda(\alpha)+C_\lambda(\beta) \tag{5.13}$$

genügt. Unter der Meßbarkeitsvoraussetzung sind die Funktionen (5.12) die einzigen Lösungen der Gleichung (5.13). Der Satz 5.2 ist also bewiesen.

Die obigen Betrachtungen zeigen, daß die kovariante Ableitung der Dichten, welche die Bedingungen 1°.—4°. der Definition 4.1 und die Voraussetzungen des Satzes 5.2 erfüllt, die Form

$$F_\lambda(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{,\nu}) = \mathfrak{G}_{,\lambda}+\alpha A_\lambda \mathfrak{G},$$

hat, wobei A_λ Konstanten sind, die nur von den Punkten x der Mannigfaltigkeiten X^n_r abhängen können. A_λ haben die folgende Transformationsformel

$$A_{\lambda'} = A_\lambda A^\lambda_{\lambda'} - A^\lambda_{\lambda'}\partial_\lambda \ln|J|.$$

Wir bemerken noch, daß es viele Formen der kovarianten, Ableitungen der Dichten gibt, die nicht nur die Bedingungen der Definition 3.1 sondern auch die

Leibnizsche Produktregel erfüllen. Um diese zu konstruieren, genügt es eine der nichtmeßbaren Lösungen von (5.7) auszuwählen und dann diese in (4.1) für C_λ einzusetzen. Die kovarianten Ableitungen dieser Art haben natürlich nur den theoretischen Sinn aber keine praktische Bedeutung.

LITERATUR

[1] S. Gołąb: *Über den Begriff der kovarianten Ableitung*, Nieuw. Archief voor Wiskunde 2 (3) (1954), 90—96.

[2] S. Gołąb: *Rachunek tensorowy*, Warszawa, 1966.

[3] V. Hlavaty, J. A. Schouten: *Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung*, Math. Z. 30 (1929), 414—432.

[4] T. Levi-Civita: *Nozione di parallelizmo in una varieta qualcunque conseguente spezificazione geometrica della curvature riemanniana*, Rend. di Palermo 42 (1917). 173—205.

[5] A. Moór: *Über die kovariante Ableitung der Vektoren*, Acta Sci. Math. Szeged 19 (1958), 237—246.

[6] A. Moór: *Über die aus g_{ik} bestimmte kovariante Ableitung*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960), 175—186.

[7] A. Moór: *Untersuchungen über die kovariante Ableitung in Linienelementräumen*, Publ. Math. Debrecen 7 (1960), 41—53.

[8] J. A. Schouten: *Die direkte Analysis zur neuen Relativitätstheorie*, Amsterdam, 1918.

[9] E. Siwek: *Sur la dérivée covariante des pseudoobjets géométriques*, Ann. Polon. Math. 17 (1965), 219—222.

[10] A. Szybiak: *Covariant derivative of geometric objects of the first class*, Bull. Acad. Polon. Sci 11 (11) (1963), 687—690.

[11] A. Szybiak: *Covariant derivative of geometric objects*, Bull. Acad. Polon. Sci 11 (12) (1963), 751—755.

[12] A. Szybiak: *Covariant differentiation of geometric objects*, Dissertationes Math. 56, Warszawa, 1967.

[13] M. Kucharzewski, M. Kuczma: *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Dissertationes Math. 43, Warszawa 1964.

Mieczysław Kucharzewski

POCHODNA KOWARIANTNA SKALARÓW I GĘSTOŚCI

Streszczenie

Praca zawiera definicje aksjomatyczne pochodnej kowariantnej skalarów (Def. 1.1) i pochodnej kowariantnej gęstości (Def. 3.1). Istnienie i kształt wyżej wymienionych pochodnych określają twierdzenia następujące.

Twierdzenie. Pochodna kowariantna skalarów jest identyczna z gradientem, $\sigma_{,\nu} = \sigma_{;\nu}$, (Satz 2.1).

Twierdzenie. Każda pochodna kowariantna gęstości $\mathfrak{G}$ ma postać

$$\mathfrak{G}_{;\nu} = \mathfrak{G}_{,\nu} + C_\nu \mathfrak{G}\,, \tag{1}$$

gdzie $C_\nu, \nu = 1, 2, \ldots, n$, tworzą obiekt geometryczny o następującej regule transformacji

$$C_{\nu'} = A^{\nu}_{\nu'} C_\nu - \alpha A^{\nu}_{\nu'} \ln|J|\,.$$

C_ν nie zależą od $\mathfrak{G}$ i $\mathfrak{G}_{,\nu}$ natomiast mogą być funkcjami wagi $(-\alpha)$ i rodzaju r gęstości $\mathfrak{G}$,

$$C_\nu = C_\nu(\alpha, r), \text{ (Satz 4.2)} . \tag{2}$$

Postać funkcji (2) określają dwa twierdzenia.

Twierdzenie. Jeżeli pochodna kowariantna, określona przez wzór (1), spełnia regułę Leibniza dla iloczynu dwu dowolnych gęstości, to funkcje 2 nie zależą od r,

$$C_\nu = C_\nu(\alpha), \text{ (Satz 5.1)} . \tag{3}$$

Twierdzenie. Jeżeli pochodna kowariantna, określona przez wzór (1), spełnia regułę Leibniza dla iloczynu dwu dowolnych gęstości oraz funkcje (3) są mierzalne, to mają postać

$$C_\nu = \Lambda_\nu \cdot \alpha ,$$

gdzie Λ_ν są stałe nie zależne od α (Satz 5.2).

Oddano do Redakcji 20 maja 1969 r.