PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU ŚLĄSKIEGO W KATOWICACH NR 12

PRACE MATEMATYCZNE II, 1972

M. KUCHARZEWSKI, S. MIDURA

Über eine Eigenschaft der Mengen von Transformationen

In der vorliegenden Note wird eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür gegeben, daß die Menge von Transformationen eine Gruppe hinsichtlich der Zusammensetzung bildet, (Satz 1.1). Dann wird eine Frage gestellt, (§ 2), die für die Betrachtungen der Arbeit [3] sehr wichtig ist. Im dritten Paragraphen geben wir ein Beispiel, daß nicht nur den Satz 1.1 ilustriert, sondern auch für sich selbst interessant ist. Der Anhang (§ 4) enthält die von Z. Moszner gegebene Antwort auf die im § 2 gestellte Frage. Die Antwort ist bejahend. Gleichzeitig hat Z. Moszner einen Satz (Satz 4.1) bewiesen, der zeigt, daß die Antwort auf diese Frage unter gewissen zusätzlichen Bedingungen verneinend ist. Alle Betrachtunge im Anhang stammen von Z. Moszner ab und dadurch wurden sie unabhängig von den anderen Paragraphen der Arbeit dargestellt.

§ 1. In jeder Gruppe ist die folgende Bedingung erfüllt:

(1.1) für jede $f_1 \in G$ und $f_2 \in G$ gibt es ein $g \in G$ derart, daß $f_2 = g \, . \, f_1$ ist.

Es sei M eine Menge von Transformationen. Die Elemente von M werden mit kleinen lateinischen Buchstaben f, g, h u. s. w. bezeichnet. Unter dem Produkt von Transformationen $f \in M$ und $g \in M$ werden wir ihre Zusammensetzung verstehen und mit dem Punkt bezeichnen,

$$g \cdot f = g\,(f(x)). \tag{1.2}$$

Überdies werden wir voraussetzen, daß die Zusammensetzung (1.2) dann und nur dann definiert ist, wenn die Gleichheit

$$W(f) = D(g) \tag{1.3}$$

besteht, wo $W(f)$ der Wertebereich von f und $D(g)$ der Definitionsbereich von g bedeuten.

Wir zeigen, daß die Bedingung (1.1) hinreichend dafür ist, daß M eine Transformationsgruppe bildet. Nämlich wird der folgende Satz bewiesen.

SATZ 1.1. *Erfüllt die Menge M die Bedingung (1.1), wobei die Zusammensetzung der Transformationen gemäß (1.2) definiert ist, so bildet M eine Transformationsgruppe.*

Beweis. Es sei f_1 in (1.1) eine angegebene Transformation von M. Ist dagegen f_2 in (1.1) eine beliebige, so erhalten wird die Relation

$$D(f) = D(f_1), f \in M, \tag{1.4}$$

die bedeutet, daß alle Transformationen f aus M den gleichen Definitionsbereich $D(f_1)$ haben. Wir werden diesen kurz mit D bezeichnen. Wird jetzt für f_1 in (1.1) eine beliebige Transformation aus M eingesetzt, so ergibt sich, daß auch der Wertebereich jeder Transformation von M gleich D ist,

$$W(f) = D, \ f \in M \tag{1.5}$$

Wir setzen jetzt $f_1 = f_2 = f$ in (1.1) ein. Die Beziehung (1.1) nimmt dann die Form

$$f = g \cdot f, \ f \in M, \tag{1.6}$$

an. Aus (1.6) folgt, daß g die Identität auf D ist,

$$g(x) = x, \ x \in D. \tag{1.7}$$

In der Tat, es sei x ein beliebiges Element von D. Dann existiert ein $\bar{x}$ aus D derart, daß

$$f(\bar{x}) = x \tag{1.8}$$

ist. Aus (1.6) und (1.8) erhalten wir (1.7).

Die Identität auf D wird mit i bezeichnet. Aus (1.1), (1.6) und (1.7) folgt es, daß sie zur Menge M gehört.

Im weiteren wird gezeigt, daß die Transformationen von M ein-eindeutig sind. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit x_0 und x_1 zwei Elemente von D, die der Relation

$$f(x_0) = f(x_1) = y_0 \tag{1.9}$$

genügen, wo f eine beliebige Transformation von M ist. Für f und i gibt es, gemäß (1.1), eine Transformation g derart, daß die Beziehung

$$i = g \cdot f \tag{1.10}$$

gilt. Aus (1.9) und (1.10) ergibt sich die Reihe von Gleichheiten: $x_0 = i(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0) = g(f(x_1)) = i(x_1) = x_1$, welche zeigt, daß f ein-eindeutig ist.

Die Transformation g, welche (1.10) erfüllt, ist zur f invers. Wir haben also gleichzeitig bewiesen, daß die Menge M die zur f inverse Transformation $g = f^{-1}$ enthält.

Der Beweis unseres Satzes wird beendet, wenn wir zeigen, daß die Zusammensetzung zweier Transformation $f_1 \in M$ und $f_2 \in M$ zur M gehört. Da f_1^{-1} existiert und zur M gehört, muß also eine Transformation $g \in M$ existieren, die der Relation

$$f_2 = g \cdot f_1^{-1}$$

genügt. In diesem Falle ist g gleich $f_2 \cdot f_1$ und der Beweis ist beendet.

§ 2. In der Arbeit [3] untersuchten Autoren die Mengen von Transformationen, die die Bedingung (1.1) erfüllen. Wie es aus dem Satz 1.1 folgt, ist jede solche Menge eine Transformationsgruppe, wenn nur die Zusammensetzung der Transformationen die Bedingung (1.3) erfüllt. Jetzt ensteht die Frage, ob es die Menge von Transformationen gibt, welche (1.1) erfüllt und keine Gruppe ist. Die Antwort auf diese Frage ist bejahend. Das von Z. Moszner angegebene Beispiel einer solchen Menge ist im Anhang, (§ 4), enthalten. Es ist klar, daß die Zusammensetzung der Transformationen in diesem Beispiel die Bedingung (1.3) nicht erfüllen kann.

§ 3. Jetzt geben wir noch ein Beispiel des Gruppoids im Sinne von H. BRANDT (Definition des Gruppoids kann man in [1], S. 10—11, oder in [2], S.14, finden. Diese letzte enthält ein Fehler. Nämlich soll „*e (b) · c*" stat „*c e* (*b*)" im Axiom 4 [2], S. 14, geschrieben werden).

Mit $Z = \{f_{a,\delta}\}$ wird die folgende Menge von Transformatione bezeichnet:

$$f_{a,\delta}(x) = a\,x,\ a > 0,\ -\delta < x < \delta,\ \delta > 0, \tag{3.1}$$

bezeichnet. Es seien (3.1) und f_{b,δ_1} zwei Transformation aus Z. Die Zusammensetzung dieser definieren wir folgendermaßen: $f_{b,\delta_1} \cdot f_{a,\delta} = f_{ba,\delta}$

Sie soll nur dann existieren, wenn die Identität $D(f_{b,\delta_1}) = W(f_{a,\delta})$ besteht. Durch Nachprüfen der Axiome kann man zeigen, daß die Menge Z mit der so definierten Zusammensetzung ein Gruppoid im Sinne von H. BRANDT bildet. Z ist aber keine Gruppe. Gemäß des Satzes 1.1 erfüllt Z die Bedingung (1.1) nicht. Das kann unmittelbar festgestellt werden. Z.B. für die Transformationen $f_{1,1}$ und $f_{1,1/2}$ gibt es keine Transformation von Z, die der Bedingung (1.1) erfüllt.

Es ist bemerkenswert, daß das Gruppoid Z mit dem Gruppoid, das aus den positiven reellen Zahlen auf bekante Weise gebildet werden kann, isomorph ist. Der Isomorphismus hat die Form: $f_{a,\delta} \to \left(a, \frac{a\delta}{2}\right)$

§ 4. ANHANG. Ein Beispiel der in § 2 erwähnten Menge von Transformationen hat Z. MOSZNER neuerdings gegeben. Es hat die folgende Gestalt.

Es sei G eine Halbgruppe, die aber keine Gruppe ist, mit der Eigenschaft, daß die Gleichung $b = x \cdot a$ für jede zwei Elemente a und b aus G eine und nur eine Lösung x in G besitzt. Unter einer Halbgruppe verstehen wir eine Menge von Elementen, in der ein assoziatives Produkt definiert ist. Als Beispiel einer solchen Halbgruppe kann die Menge von zwei Elementen $\{a, b\}$ dienen, in der das Produkt folgendremaßen $a = a \cdot a = a \cdot b$, $b = b \cdot a = b \cdot b$ erklärt ist. Mit M bezeichnen wir die Menge der Transformationen der Form

$$f_a = a \cdot x, \quad a \in G.$$

M ist mit G isomorph. Sie ist also keine Gruppe. M erfüllt offensichtlich die Bedingung (1.1).

Dieses Beispiel zeigt, daß die Antwort auf die in § 2 gestellte Frage bejahend ist.

Überdies hat Z. MOSZNER einen Satz bewiesen, der zeigt, daß die Antwort auf unsere Frage unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen verneinend ist. Diese Voraussetzungen sind insbesondere für die Mengen von Koordinatentransformationen erfüllt, die in der Geometrie auftreten. Dieser Satz ist also für die Geometrie besonders wichtig.

In der Geometrie treten nämlich die Mengen von Transformationen der lokalen Koordinatensystemen (vgl. [2], S. 8) auf. Sie haben zwei folgende Eigenschaften.

(4.1) Jede Transformation f aus M ist ein-eindeutig.

(4.2) Inverse Transformation zu jeder Transformation aus M gehört zur M.

Aus (4.2) folgt, daß es eine Transformation f^* in M gibt, welche die Inklusion

$$D(f^*) \subset W(f^*) \tag{4.3}$$

erfüllt. In der Tat erfüllt wenigstens eine der Tarnsformationen f und f^{-1} die Bedingung (4.3).

Der Satz von Z. MOSZNER hat die folgende Gestalt

SATZ 4.1. *Jede Menge M von Transformationen, die* (1.1), (4.1) *und* *(4.3) erfüllt, ist eine Transformationsgruppe.*

B e w e i s. Aus (1.1) ergibt sich, daß der Definitionsbereich von f_2 in demjenigen von f_1 enthalten ist,

$$D(f_2) \subset D(f_1). \tag{4.4}$$

Da wir in (4.4) f_2 mit f_1 umtauschen können, erhalten wir daraus die Gleichheit

$$D(f) = D, \; f \in M, \tag{4.5}$$

wo D eine konstante Menge ist. Jetzt zeigen wir, daß auch der Wertebereich $W(f)$ jeder Transformation f aus M gleich D ist,

$$W(f) = D, \ f \in M. \tag{4.6}$$

Zuerst ist es zu bemerken, daß der Wertebereich jeder Transformation f aus M in D enthalten ist,

$$W(f) \subset D, f \in M. \tag{4.7}$$

Andernfalls könnte die Beziehung (1.1) nicht gelten, wenn wir in dieser f_1 durch f ersetzen.

Um (4.6) zu zeigen, nehmen wir an, daß es eine Transformation f_1 in M gibt, die (4.6) nicht erfüllt. Diese muß also die Inklusion (4.7) und die Relation

$$W(f_1) \neq D, \tag{4.8}$$

erfüllen. Der Voraussetzung (1.1) nach gibt es in M eine Transformation g, welche der Identität

$$f^* = g \cdot f_1, \tag{4.9}$$

genügt, wo f^* bzw. f_1 die in (4.3) bzw. in (4.8) auftretende Transformation ist. Mit Hilfe von (4.3) und (4.5) erhalten wir aus (4.9) die folgende Reihe von Inklusionen

$$D = D(f^*) \subset W(f^*) = W(g \cdot f_1) \subset W(g). \tag{4.10}$$

Aus (4.8) und aus der Eineindeutigkeit von g folgt, daß

$$W(g \cdot f_1) \neq W(g) \tag{4.11}$$

ist. Die Beziehungen (4.11) und (4.10) haben

$$D \neq W(g), \ D \subset W(g),$$

als Folge, das aber der Relation (4.7) widerspricht.

Aus (4.6) und (4.5) ergibt sich, daß die Zusammensetzung der Transformationen in M die Bedingung (1.3) erfüllt. Auf Grund des Satzes 1.1 stellt M eine Transformationsgruppe dar und der Beweis ist beendet.

Der Satz 4.1 bleibt natürlich richtig, wenn man (4.3) durch (4.2) ersetzt. In diesem Falle ist der Beweis kürzer.

LITERATUR

[1] J. Aczel und S. Gołąb: *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte.* Monografie Mat. 39, Warszawa 1960.

[2] M. Kucharzewski and M. Kuczma: *Basic concepts of the theory of geometric objects,* Rozprawy Mat. 43, Warszawa 1964.

[3] S. Midura et Z. Moszner: *Quleques remarques au sujet de la notion de l'objet et de l'objet géométrique,* Ann. Polon. Math. 18 (1966), 323—338.

M. KUCHARZEWSKI, S. MIDURA

O PEWNEJ WŁASNOŚCI ZBIORÓW TRANSFORMACJI

Streszczenie

W pracy dowodzi się następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE. *Jeżeli zbiór transformacji M spełnia warunek:*

(1) *dla każdych dwu transformacji* $f_1 \in M$ *i* $f_2 \in M$ *istnieje transformacja* $g \in M$ *taka, że złożenie* f_1 i g *jest identyczne z* f_2,

$$f_2 = g \, . \, f_1,$$

gdzie istnienie złożenia $f_1 . g$ *oznacza, że pole* g *jest identyczne z zapasem* f_1, *to M jest grupą transformacji.*

W związku z tym twierdzeniem powstaje pytanie, czy istnieje taki zbiór transformacji, który spełnia warunek (1) i nie jest grupą. Przykład taki jest możliwy tylko w tym przypadku, gdy złożenie transformacji jest określone inaczej, niż w twierdzeniu 1. Pytanie to jest ważne ze względu na rozważania zawarte w pracy [3].

Twierdzenie zostało zilustrowane na przykładzie pewnego grupoidu BRANDTA.

Dodatek (§ 4) zawiera przykład i twierdzenie Z. MOSZNERA. Przykład wskazuje, że odpowiedź na wyżej postawione pytanie jest twierdząca. W twierdzeniu zawarte są pewne dodatkowe założenia, przy których odpowiedź jest już przecząca.

Oddano do Redakcji 7. 1. 1970.