**Title:** Kształcenie geometryczne w klasach początkowych

**Author:** Pelagia Morejko

**Citation style:** Morejko Pelagia. (1997). Kształcenie geometryczne w klasach początkowych. "Nauczyciel i Szkoła" (1997, nr 1, s. 35-42).

Pelagia MOREJKO

# Kształcenie geometryczne w klasach początkowych

Każdy z nas wyniósł ze szkoły pewien zasób wiedzy matematycznej. Na wiedzę tą składają się wiadomości i umiejętności pogrupowane według dyscyplin wiedzy matematycznej, a więc z arytmetyki, algebry, geometrii czy rachunku prawdopodobieństwa. Niektóre terminy matematyczne funkcjonują w języku naturalnym. Na co dzień opisując różne sytuacje używamy zwrotów typu: „są równoległe", „jest większy", „nieograniczony", „nieskończony", „mało prawdopodobne", „kwadratowe", „sześcienne" itp.; czynimy to jednak nie zawsze w sposób adekwatny do opisywanej sytuacji. Wykorzystujemy w życiu nabyte umiejętności w zakresie działań arytmetycznych, obliczeń procentowych, proporcji, zagadnień miarowych i innych. Wiemy również, że matematyka jest nauką abstrakcyjną i być może słyszeliśmy, że także aksjomatyczno-dedukcyjną. Poniżej postaramy się zasygnalizować pewne aspekty pojęć matematycznych i zwrócić uwagę na prawidłowości procesu przyswajania pojęć związanych z rozwojem intelektualnym dziecka.

## Matematyka jako nauka abstrakcyjna i aksjomatyczno-dedukcyjna

Specjalny sposób konstrukcji wiedzy matematycznej decyduje o tym, że nazywamy ją nauką aksjomatyczno-dedukcyjną. Oznacza to, że u jej podstaw leżą, tzw. pojęcia pierwotne, które nie są definiowane i własności pojęć pierwotnych, tzw. aksjomaty, które nie są dowodzone. Aksjomaty opisują pojęcia pierwotne i decydują, o naszym ich rozumieniu. Przykładowo, proste i punkty to takie obiekty, przez których dwa punkty przechodzi dokładnie jedna prosta, a przez jeden punkt – nieskończenie wiele prostych. Proste i punkty należą do pojęć pierwotnych, a wymienione ich dwie własności są aksjomatami. Matematyk przyjmując pewien zestaw pojęć pierwotnych i aksjomatów oraz dołączając do nich logikę buduje nowe własności – twierdzenia, a następnie nowe pojęcia i ich definicje, z kolei – nowe twierdzenia i kolejne nowe pojęcia itd. Matematyka ma więc wyraźną strukturę hierarchiczną, a jej pojęcia zarówno pierwotne, jak i te definiowane są abstrakcyjne.

Abstrakcyjność pojęć matematycznych oznacza, że nie mają one desygnatów w realnej rzeczywistości. Nie ma więc w realnej rzeczywistości desygnatów liczb, trójkątów, sześcianów, wielomianów, funkcji kwadratowej itp. Pójście więc przez dziecko siedmioletnie drogą, jaką wskazuje matematyka jako gotowa dyscyplina wiedzy jest niemożliwe[1]. Szansą dla edukacji jest możliwość wyłonienia z matematyki pojęć dających się wyabstrahować z otaczającej rzeczywistości, ściślej z czynności wykonywanych na obiektach materialnych (szerzej ten temat opisuje strategia czynnościowego nauczania matematyki). Pojęcia te w dydaktyce matematyki zostały zaliczone do tzw. pojęć elementarnych (Krygowska, 1977). Inne pojęcia dadzą się już na nich zbudować w sposób hierarchiczny. Kształcenie w zakresie geometrii nie zacznie się więc od punktów, prostych i płaszczyzn, jak to pamiętamy z pewnego etapu własnej nauki szkolnej i jak to wynika z charakteru matematyki, lecz od tych pojęć, które w pierwszej kolejności podsunie dziecku otaczająca rzeczywistość materialna.

Badanie rzeczywistości, jej opisywanie i przekształcanie w zakresie dostępnym w edukacji wczesnoszkolnej, to początek długiej drogi prowadzącej do abstrakcyjnych pojęć matematycznych, wśród których ważne miejsce zajmują pojęcia geometryczne. Geometria bowiem i jej język są dobrymi łącznikami między rzeczywistością a matematyczną abstrakcją.

## Założenia i cele kształcenia geometrycznego na etapie wczesnoszkolnym

Jako punkt wyjścia w edukacji wczesnoszkolnej w zakresie geometrii przyjmuje się kompetencje dziecka nabyte w okresie przedszkolnym. Należą do nich: umiejętność rozróżniania obiektów materialnego świata, dzięki spontanicznej klasyfikacji; umiejętności językowe, dzięki którym istnieje możliwość opisu materialnych obiektów; umiejętność przekształcania rzeczywistości (rzecz jasna, w pewnym ograniczonym zakresie) oraz pewne umiejętności techniczne, pozwalające na graficzne ujmowanie kształtów przedmiotów.

Celem edukacji wczesnoszkolnej w zakresie geometrii jest rozwój posiadanych przez dziecko kompetencji i nabycie nowych. Oznacza to dalsze badanie obiektów materialnych i manipulowanie nimi ukierunkowane nie tylko na coraz bardziej ich adekwatny opis, ale także na ujmowanie stosunków przestrzennych świata rzeczywistego, przygotowanie do posługiwania się językiem matematyki w formie werbalnej (słowa i specyficzne terminy matematyczne) i niewerbalnej

[1] Porównaj z piagetowską teorią rozwoju, teorią reprezentacji Brunera i poziomami myślenia van Hiele'a.

(rysunki, schematy itp.), kształcenie wyobraźni i intuicji geometrycznej. W szczególności celem jest:

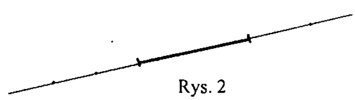
- intuicyjne ukształtowanie pojęcia odcinka, wielokąta (kwadratu, prostokąta, trójkąta itp.), koła, łamanej;
- nabycie umiejętności mierzenia odcinków i obwodu prostokąta;
- rozpoznawanie odcinków prostopadłych i równoległych oraz praktyczne stosowanie tych pojęć w łatwych przypadkach;
- rozwijanie umiejętności opisywania i nazywania znanych i nowo poznawanych figur, a także relacji zachodzących między nimi w terminach matematycznych;
- wiązanie treści arytmetycznych z geometrycznymi.

## Kształcenie matematyczne w aspekcie pojęć geometrycznych

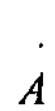
### a) Figury geometryczne jako zbiory punktów i niektóre ich własności

Jednym z najważniejszych pojęć organizujących matematykę jako przedmiot szkolny jest zbiór i jego elementy. W geometrii rozważamy w pierwszym rzędzie zbiory punktów. Każdy *zbiór punktów* będziemy nazywać *figurą geometryczną*. Powszechnie znane figury: odcinek, prosta, trójkąt, kwadrat, koło, sześcian, ostrosłup itp., to pewne, wyróżnione zbiory punktów. Figurami geometrycznymi są także figury przedstawione na Rys. 1–4.

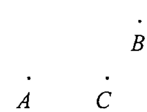

Rys. 1



Rys. 2




Rys. 3




Rys. 4

Rys. 1 przedstawia figurę, do której należą dwa punkty. Na rys. 2 wyróżniona figura została zaznaczona ciemniejszym akcentem; należą do niej trzy punkty izolowane i punkty odcinka. Figura ta zawarta jest w prostej. Rys. 3 przedstawia figurę, do której należy jeden punkt, a rys. 4 – figurę, do której należą trzy punkty. Figury te nie mają swoich nazw, bowiem nie są interesujące z punktu widzenia kształcenia matematycznego. Można także rozważać figurę, do której nie należy żaden punkt. Taką figurę będziemy nazywali pustą – przez analogię do zbioru pustego. Jeżeli nasze rozważania ograniczymy do jednej prostej i jej podzbiorów (np. odcinek, półprosta), to mówimy wtedy o przestrzeni jednowymiarowej. Analogicznie, jedna płaszczyzna i jej podzbiory (np. kwadrat, okrąg, odcinek), to przestrzeń dwuwymiarowa. Przestrzeń trójwymiarowa nazywana jest w praktyce szkolnej a także w życiu codziennym przestrzenią. Podzbiorami tej przestrzeni są, np. sześcian, kula, kwadrat, odcinek itp. W geometrii rozważa się także zbiory nie będące zbiorami punktów, lecz zbiorami figur. Zbiór prostych przechodzących przez jeden punkt to zbiór, którego elementami są proste. Jeśli rozważymy zbiór wszystkich takich prostych, to *mówimy wówczas o pęku prostych*. Rozważamy także zbiory kwadratów, trójkątów, okręgów itp.

Wśród licznych własności, jakie posiadają figury zwrócimy uwagę na te, które opisane są terminami: „skończony", „nieskończony", „ograniczony", „nieograniczony". Z terminologią tą związanych jest kilka nieporozumień. Używamy ich dość niefrasobliwie, stosując niektóre z nich zamiennie. W języku codziennym zazwyczaj nie odróżniamy słów „nieskończony" i „nieograniczony". Mówimy: prosta jest nieskończona lub – rzadziej – nieograniczona. Popełniamy błąd nieadekwatności. W matematyce przyjmujemy następujące definicje tych pojęć.

Figurę nazywamy o g r a n i c z o n ą, jeżeli istnieje koło, w którym ta figura się zawiera. W przeciwnym wypadku mówimy, że figura jest nieograniczona. Definicja ta dotyczy przestrzeni dwuwymiarowej. Dla przestrzeni trój- i jednowymiarowej koło zastępujemy odpowiednio kulą i odcinkiem. Figury przedstawione na rys. 1–4 są figurami ograniczonymi. Prosta jest figurą nieograniczoną, nie istnieje bowiem żadne koło, w którym mogłaby się zawrzeć. A co z terminami „skończony" i „nieskończony"? Odcinek jest figurą ograniczoną, lecz należy do niego nieskończenie wiele punktów, choć trudno to sobie wyobrazić, szczególnie wtedy, gdy punkt kojarzy się z materialną (atramentową) kropką postawioną na kartce papieru. Do figur na rysunkach 1, 3, 4 należy skończona liczba punktów, do figury na rys. 2 – nieskończenie wiele punktów.

Podsumowując, powiemy: odcinek jest ograniczony, lecz należy do niego nieskończenie wiele punktów; prosta jest nieograniczona i należy do niej nieskończenie wiele punktów. Analogicznie: kwadrat jest figurą ograniczoną i należy do niego nieskończenie wiele punktów; półpłaszczyzna jest figurą nieograniczoną i należy do niej nieskończenie wiele punktów.

### b) R e l a c j e (s t o s u n k i) m i ę d z y f i g u r a m i

Dzieci dość wcześnie spotykają się na co dzień z różnymi stosunkami przestrzennymi, których opis dokonuje się za pomocą takich zwrotów, jak: „za", „przed", „między", „wyżej", „na lewo" itp. Opisy te wprawdzie dotyczą obiektów materialnych, niemniej będą stanowiły punkt wyjścia do opisu stosunków (relacji) między figurami. W nauczaniu początkowym ograniczymy się do relacji równoległości, prostopadłości i przecinania się odcinków. W klasach starszych relacje te rozszerzymy na proste. Zauważmy, że definicje prostych równoległych czy przecinających się łatwo akceptowalne w sytuacji, gdy pojęcie prostej jest w pełni przyswojone, nie dadzą się przenieść na odcinki. Proste nie mające punktu wspólnego, to proste równoległe. Natomiast odcinki nie mające punktu wspólnego mogą, ale nie muszą być równoległe. Proste, które nie są równoległe muszą się przeciąć, odcinki niekoniecznie (rys.5).

Rys. 5

c) Przyporządkowania (funkcje)

Choć nazwy „funkcja” (czy zamiennie „przyporządkowanie”), a także specyficznej symboliki związanej z funkcją, dziecko-uczeń użyje dopiero w starszych klasach szkoły podstawowej, to z samym pojęciem spotyka się od pierwszych niemal kroków w szkole. W tym miejscu zasygnalizujemy pewne funkcje występujące w geometrii. Długość odcinka, długość łamanej (szczególny przypadek – obwód wielokąta), pole figury płaskiej (np. pole prostokąta), to funkcje przyporządkowujące figurom (odcinkom, łamanym, prostokątom itp.) liczby rzeczywiste (w nauczaniu początkowym będą to tylko liczby naturalne). Sam proces praktycznego wymierzania, np. długości stołu, narysowanej kreski (będącej materialną i graficzną reprezentacją odcinka), może nam dać w wyniku kilkakrotnego mierzenia tego samego odcinka różne liczby. Nie należy jednak w związku z tym mylić praktycznego procesu mierzenia obarczonego licznymi błędami o bardzo różnym pochodzeniu z abstrakcyjnym pojęciem długości odcinka, zgodnie z którym każdemu odcinkowi odpowiada dokładnie jedna liczba, jako jego długość dla z góry danego odcinka jednostkowego.

Do przyporządkowań będą także należały znane nam przekształcenia geometryczne: odbicia lustrzane, przesunięcia równoległe itp.

## Poziomy myślenia według van Hiele'a

Zrozumienie, a więc także odpowiednie przyswojenie treści matematycznych wymaga, aby uczeń znalazł się na poziomie myślenia adekwatnym do aktualnego sposobu przedstawiania treści i posługiwał się stosownym do tego sposobu językiem. Ta teza van Hiele'a znalazła odbicie w wyróżnionych przez niego poziomach myślenia:

1. Poziom zerowy – przedmioty geometryczne są spostrzegane globalnie, rozróżnianie ich następuje na podstawie różnic w wyglądzie zewnętrznym; język charakteryzuje spontaniczność w używaniu wyrażeń bądź przez podobieństwo do znanych z otoczenia przedmiotów, bądź zapamiętanie nazwy użytej przez kogoś innego. Ten poziom myślenia charakteryzuje głównie myślenie dzieci w wieku przedszkolnym.

2. Poziom pierwszy – charakteryzuje go utworzenie się pewnej struktury w wysokim stopniu wzrokowej, dlatego też bywa nazywany poziomem wzrokowym.

W otaczającym świecie dostrzegane są już twory geometryczne, a także następuje rozpoznawanie pewnej regularności. Dziecko potrafi wskazać w otoczeniu przedmiot o kształcie koła, prostokąta itp. a także nazywać wskazywane przedmioty terminami matematycznymi, choć w języku wciąż przeważają terminy języka codziennego.

3. Poziom drugi (zwany też opisowym) – obiekty geometryczne są przyswajane jako niosące pewne własności; własności tworów geometrycznych są rozpoznawane i opisywane; ustalane są relacje między częściami składowymi, jak również między różnymi obiektami geometrycznymi. Na tym etapie globalne ujęcie figury ulega przekształceniu. Uczeń dostrzega już tak charakterystyczne podzbiory prostokąta, jak boki, wierzchołki, przekątne. Ustala także relacje między figurami: prostopadłość, równoległość odcinków. Język jest już wyraźnie nasycony terminologią matematyczną. Jednak na tym etapie nie są jeszcze ustalane relacje logiczne między różnymi opisami.

Dalszy poziom myślenia nazywany logicznym lub też teoretycznym będzie dotyczył dzieci starszych.

## Teoria reprezentacji w ujęciu Brunera

Przeobrażanie myślenia konkretno-obrazkowego w abstrakcyjno-pojęciowe towarzyszące przyswajaniu pojęć matematycznych wiąże Bruner ze sposobami przedstawiania pojęć, zwanych reprezentacjami. Rozróżnia trzy zasadnicze reprezentacje: enaktywną, ikoniczną i symboliczną.

Reprezentacja enaktywna związana jest z aktywnością manualną dziecka i obejmuje reguły pozwalające na robienie czegoś z możliwością powtarzania tego aktu.

Reprezentacja ikoniczna podsumowuje działania poprzedniego etapu w postaci wyobrażeń, rysunków, schematów.

Reprezentacja symboliczna reprezentuje rzeczy w sposób odległy i arbitralny. Związana jest z kodem symbolicznym i oznacza opis za pomocą słów, specyficznych symboli i formuł.

Kolejność pojawiania się reprezentacji w rozwoju jednostki nie jest przypadkiem, lecz następstwem dojrzewania intelektualnego. Przechodzenie od reprezentacji enaktywnej do symbolicznej odbywa się przez szereg etapów pośrednich. Zasadnicze znaczenie dla rozwoju ma interakcja trzech rodzajów reprezentacji, wyrażająca się możliwością przekładu każdej z nich na pozostałe.

## Elementy języka matematyki w kształceniu geometrycznym

Język matematyki jest kombinacją języka naturalnego, terminologii matematycznej i specyficznej symboliki. Język naturalny dziecka rozpoczynającego naukę szkolną zawiera wiele słów, pomagających mu opisywać otaczające go przedmioty i stosunki przestrzenne. Wśród nich znajdują się również terminy matematyczne; dość często jednak ich znaczenie jest zdominowane znaczeniem nadawanym im w życiu codziennym. Dziecko kupuje w sklepie „kwadratowy chleb" (gdy tymczasem nie chleb, a przekrój otrzymywany przy krojeniu kromek jest w przybliżeniu kwadratem), bawi się „prostokątnym pudełkiem" (co oznacza, że ściany pudełka są prostokątami), stwierdza, że gwóźdź jest wbity „krzywo", a nie „prosto" („krzywo" oznacza, że nie jest prostopadły do ściany; porównaj – krzywa wieża w Pizie).

Tego rodzaju terminologia może być źródłem trudności w uczeniu się dziecka. Zdarza się też, że dziecko pewne pojęcia utożsamia, np. obwód wielokąta, który jest liczbą, z łamaną, będącą brzegiem tego wielokąta, a więc figurą, gdy tymczasem liczba, o której mowa jest długością tej łamanej. Terminy pojawiające się po raz pierwszy dopiero w toku nauki szkolnej nie są obarczone wyżej wymienionymi błędami, co jednak nie oznacza, że ich przyswojenie wraz z odpowiadającymi im pojęciami, jest łatwe. Mówiąc o specyficznej symbolice matematycznej musimy zwrócić również uwagę na takie jej elementy, jak schematy graficzne (pętle, strzałki), rysunki, które w zależności od sytuacji, którą opisują, są albo zbliżone do obrazu konkretnego albo mają charakter bliższy symbolowi.

## Podsumowanie

Etapy kształtowania pojęć geometrycznych należy rozważyć w kilku aspektach: charakteru pojęć matematycznych, poziomów myślenia dziecka i kolejności reprezentowania pojęć na drodze ich przyswajania.. Droga, jaką będzie kroczyć dziecko musi prowadzić od prostych manipulacji dokonywanych na obiektach realnej rzeczywistości poprzez modelowanie rzeczywistości, początkowo prymitywne, przez naiwne schematyzowanie, by w dość odległej przyszłości dojść do abstrakcyjnego opisu.

Manipulowanie obiektami realnej rzeczywistości jest początkiem procesu abstrakcji, który ma dziecko doprowadzić do abstrakcyjnych pojęć. W przypadku jednych pojęć doświadczenie będzie wystarczającą bazą do ich utworzenia, inne będą wymagały wyjścia poza to doświadczenie. Przykładami takich pojęć mogą być odcinek i prosta. Zginanie kartki papieru i obserwowanie śladu zgięcia, przebieganie (najkrotszej) drogi od drzewa do drzewa i tym podobne ćwiczenia, prowadzą poprzez sporządzanie rysunków podsumowujących te zdarzenia do pojęcia odcinka, może jeszcze nie w formie czysto abstrakcyjnej, lecz tylko w postaci narysowanej kreski, ale jest to na tym etapie nauczania wystarczające. Natomiast wyabstrahowanie prostej z czynności na obiektach materialnych nie jest możliwe. Zauważmy, że nie ma takiej kartki papieru ze śladem zgięcia, ani drogi między dwoma drzewami, które dawałyby reprezentację prostej – enaktywną lub ikoniczną. Utworzenie pojęcia prostej wymaga bardziej wyrafinowanych sposobów. Działania w konkrecie będą jednak musiały stanowić podpórkę myśli, która w pewnym momencie musi uwolnić się od konkretnych doświadczeń i wyjść poza nie.

W kontekście tego, co zostało wyżej powiedziane, nie budzi zdziwienia fakt, że jednymi z pierwszych pojęć geometrycznych są: prostokąt, kwadrat, trójkąt, koło, odcinek, a dla prostej planujemy jedynie czynności wstępne.

## Literatura

Brunner J. S.: *Poza dostarczone informacje.* Warszawa 1978.
Krygowska Z.: *Zarys dydaktyki matematyki,* cz. I. Warszawa 1977.
Semadeni Z.: *Nauczanie początkowe matematyki,* t. 2. Warszawa 1981.