Title: O pewnych równaniach funkcyjnych ze złożeniami funkcji niewiadomej

Author: Marcin Balcerowski

Rozprawa doktorska
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach
Katowice, luty 2014

Marcin Balcerowski

O pewnych równaniach funkcyjnych ze złożeniami funkcji niewiadomej

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
Prof. dra hab. Witolda Jarczyka

Spis treści

Wstęp

Rozprawa doktorska „O pewnych równaniach funkcyjnych ze złożeniami funkcji niewiadomej” jest poświęcona czterem równaniom funkcyjnym i równaniom z nimi stowarzyszonym. Praca jest podzielona na cztery rozdziały. W rozdziale pierwszym omawiamy ogólne własności oraz rozwiązania regularne i nieregularne równania Brillouët–Belluot. Rozdział drugi poświęcamy (uogólnionemu) równaniu Brzdęka. W rozdziale trzecim przedstawiamy wyniki dotyczące równania Cuculière i jego uogólnionych wersji. Czwarty rozdział poświęcamy równaniu Borosa–Daróczyego i związanym z nim równaniom.

Wspólną cechą prawie wszystkich omawianych w pracy równań jest ich związek z funkcjami addytywnymi. W odpowiednich klasach funkcji rozwiązania czterech tytułowych równań są addytywne. Ponadto, równanie Brzdęka i symetryczne równanie Cuculière uogólniają równanie Cauchy'ego. Przenosimy pewne wyniki dotyczące funkcji addytywnych na ogólniejsze równania, ewentualnie przy dodatkowych założeniach. Przytaczamy także przykłady pokazujące istotność założeń w twierdzeniach.

Podamy teraz definicję pewnych pojęć użytych w rozprawie.

Jeśli G jest dowolnym zbiorem oraz $+\colon G \times G \to G$ jest funkcją, to parę $(G,+)$ nazywamy *grupoidem*, a funkcję $+$ nazywamy *działaniem* w grupoidzie. Mówimy, że grupoid $(G,+)$ jest *prawostronnie* [*lewostronnie*] *skracalny*, gdy dla wszystkich elementów $x, y, z \in G$ zachodzi implikacja

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y \quad [z + x = z + y \Rightarrow x = y].$$

Jeśli grupoid $(G,+)$ zawiera zero, to definiujemy mnożenie dowolnego elementu $x \in G$ przez liczbę zero wzorem $0x = 0$. Jeśli zbiór S jest niepusty i para $(S,+)$ jest grupoidem, oraz działanie $+$ jest łączne, to grupoid $(S,+)$ nazywamy *półgrupą* (w tekście struktury oznaczamy zazwyczaj tylko przez podanie zbioru, na którym określone jest działanie). Niech $(S,+)$ będzie półgrupą. Dzięki założonej łączności działania, można mówić o sumie dowolnej skończonej liczby elementów zbioru S. Korzystając z tego, definiujemy mnożenie dowolnego elementu x półgrupy S przez liczbę naturalną n wzorami $1x = x$ oraz $nx = (n-1)x + x$, gdy $n \geq 2$.

Jeśli zbiór $(G,+)$ jest grupą, to określamy także mnożenie elementów zbioru G przez ujemne liczby całkowite wzorem $mx = (-m)(-x)$ dla każdego punktu $x \in G$ i dla każdej ujemnej liczby całkowitej m. Jeśli $(G,+)$ jest grupoidem, m jest liczbą całkowitą i mnożenie przez m jest określone w grupoidzie G, to dla każdego zbioru $A \subset G$ definiujemy zbiór $mA = \{mx : x \in A\}$.

Niech $(S,+)$ będzie półgrupą i niech $A \subset S$. Zbiór A nazywamy *pochłaniającym*, gdy dla każdego punktu $x \in S$ istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że $x \in nA$.

Niech X będzie zbiorem i niech $f\colon X \to X$ będzie funkcją.

Symbolem $\mathrm{Fix} f$ oznaczamy zbiór wszystkich punktów stałych funkcji f. Ponadto, dla każdej liczby $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ symbolem f^n będziemy oznaczać n-tą iteratę funkcji f, to znaczy $f^0 = \mathrm{id}$ i $f^n = f^{n-1} \circ f$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Niech $(X, \| \ \|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Funkcję $f\colon X \to X$ nazywamy *izometrią*, gdy $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ dla wszystkich elementów $x, y \in X$.

Jeśli X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ [grupą], oraz $f\colon X \to X$ jest funkcją, to dla każdej liczby $c \in K$ [$c \in \mathbb{Z}$] definiujemy zbiór

$$A_f(c) = \{x \in X : f(x) = cx\}.$$

Niech $(G,+)$ będzie grupoidem i niech $f\colon G \to G$ będzie funkcją.

Mówimy, że funkcja f jest *addytywna na swoim wykresie*, jeśli dla każdego $x \in G$ spełniona jest równość

$$f(x + f(x)) = f(x) + f^2(x).$$

Funkcję f nazywamy *afiniczną*, jeśli istnieje punkt $x_0 \in G$ i taka funkcja addytywna $a\colon G \to G$, że $f = a + x_0$.

Jeśli X jest zbiorem, to symbolem $\mathrm{card} X$ oznaczamy moc zbioru X.

Rozdział 1

Równanie Brillouët-Belluot

W pierwszym rozdziale zajmiemy się równaniem

$$x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y)). \tag{1.1}$$

Problem istnienia ciągłych rozwiązań $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ równania (1.1) został postawiony przez N. Brillouët–Belluot [8] w związku z zagadnieniem istnienia dodatnich ciągłych rozwiązań $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ równania

$$x + f^2(x) = f(x + a), \tag{1.2}$$

gdzie $a > 0$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Jeśli funkcja f przekształca grupoid z zerem w siebie i spełnia równanie (1.1), to podstawiając $y = 0$ w równości (1.1) widzimy, że f spełnia równanie (1.2) z parametrem $a = f(0)$. W pracy [18] J. Jarczyk i W. Jarczyk wykazali, że równanie (1.1) nie ma ciągłych rozwiązań $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a jednocześnie postawili problem rozwiązania (1.1) w klasie funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Następnie Yingying Zeng i Weinian Zhang w artykule [38] udowodnili, że dla żadnej liczby $a \in \mathbb{R}$ równanie (1.2) nie ma ciągłego rozwiązania przekształcającego zbiór liczb rzeczywistych w siebie. Równanie (1.1) było rozpatrywane także przez J. Rätza (zob. [29], [30]). W twierdzeniach zawartych w bieżącym rozdziale dowodzimy pewnych ogólnych własności rozwiązań równania (1.1), a przy ich pomocy wyznaczamy regularne rozwiązania tego równania lub stwierdzamy ich nieistnienie. Wyniki te zostały częściowo opublikowane w pracy [2].

Uogólnieniem równania (1.1) jest równanie funkcyjne

$$x + g(y + f(x)) = y + g(x + f(y)). \tag{1.3}$$

Równanie (1.3) pojawiło się w pracy M.E.Kuczmy (zob. [23, Lemma 1]) w związku z problemem kompatybilności średnich, który można przedstawić następująco. Funkcję $M\colon (0,\infty)^n \to (0,\infty)$ nazywamy *średnią*, gdy jest symetryczna ze względu na permutacje wszystkich współrzędnych argumentu, rosnąca ze względu na każdą ze zmiennych oraz $M(t(1,\ldots,1)) = t$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Średnią M nazywamy *jednorodną*, gdy $M(tx) = tM(x)$ dla wszystkich punktów $x \in (0,\infty)^n$ i liczb $t \in (0,\infty)$. Średnie $M\colon (0,\infty)^n \to (0,\infty)$ oraz $N\colon (0,\infty)^k \to (0,\infty)$, gdzie $k > n$ nazywamy *kompatybilnymi*, gdy dla każdego punktu $(x_1,\ldots,x_k)\in(0,\infty)^k$ zachodzi równość $N(x_1,\ldots,x_k)=N(y,\ldots,y,x_{n+1},\ldots,x_k)$, gdzie $y=M(x_1,\ldots,x_n)$. Załóżmy teraz, że średnie $M\colon(0,\infty)^n\to(0,\infty)$ i $N\colon(0,\infty)^{n+1}\to(0,\infty)$, (gdzie $n\geq 2$) są kompatybilne i jednorodne. Sprawdzimy, że wtedy (co zauważył M. E. Kuczma w pracy [23]) funkcje $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dane wzorami $f(x)=\ln M(1,\ldots,1,1/\mathrm{e}^x)$ i $g(x)=\ln N(\mathrm{e}^x,\ldots,\mathrm{e}^x,1)$, spełniają równanie (1.3). Ustalmy dowolne punkty $x,y\in\mathbb{R}$. Zachodzą równości

$$\begin{aligned}
x+g(y+f(x)) &= x+\ln N(\mathrm{e}^{y+\ln M(1,\ldots,1,1/\mathrm{e}^x)},\ldots,\mathrm{e}^{y+\ln M(1,\ldots,1,1/\mathrm{e}^x)},1)= \\
&= x+\ln N(\mathrm{e}^y M(1,\ldots,1,1/e^x),\ldots,\mathrm{e}^y M(1,\ldots,1,1/e^x),1)= \\
&= \ln\mathrm{e}^x+\ln N(\mathrm{e}^y M(1,\ldots,1,1/\mathrm{e}^x),\ldots,\mathrm{e}^y M(1,\ldots,1,1/\mathrm{e}^x),1)= \\
&= \ln(\mathrm{e}^x N(\mathrm{e}^y M(1,\ldots,1,1/\mathrm{e}^x),\ldots,\mathrm{e}^y M(1,\ldots,1,1/\mathrm{e}^x),1)= \\
&= \ln N(M(\mathrm{e}^{x+y},\ldots,\mathrm{e}^{x+y},\mathrm{e}^y),\ldots,M(\mathrm{e}^{x+y},\ldots,\mathrm{e}^{x+y},\mathrm{e}^y),\mathrm{e}^x).
\end{aligned}$$

Stąd i z kompatybilności średnich wynika, że

$$x+g(y+f(x))=\ln N(\mathrm{e}^{x+y},\ldots,\mathrm{e}^{x+y},\mathrm{e}^y,\mathrm{e}^x).$$

Prawa strona ostatniej równości jest symetryczna ze względu na zamianę zmiennych x i y. Zatem tę własność ma też jej lewa strona, a więc funkcje f i g spełniają równanie (1.3).

W pracy [21] M.E Kuczma rozwiązał równanie (1.3) w klasie par (f,g) szeregów formalnych o wyrazach zespolonych. J. Sikorska w artykule [34] znalazła postać wszystkich par (f,g) dwukrotnie różniczkowalnych funkcji $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniających równanie (1.3), a następnie N. Brillouët–Belluot otrzymała identyczną postać rozwiązań zakładając różniczkowalność funkcji $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (zob. [9]). J. Sikorska rozwiązała równanie (1.3) także w przypadku, gdy $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są monotonicznymi funkcjami wypukłymi w sensie Jensena lub monotonicznymi funkcjami wklęsłymi w sensie Jensena (zob. Theorem 6 w pracy [35]).

1.1 Ogólne własności rozwiązań

Przedstawimy teraz podstawowe własności rozwiązań równania (1.1). Zaczynamy od następującego lematu, który dla funkcji $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ został udowodniony przez J. Jarczyk i W. Jarczyka w pracy [5]. Poniższy dowód jest podobny; różnica polega tylko na uniknięciu wykonywania dzielenia.

Lemat 1.1 *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G\to G$ będzie rozwiązaniem równania* (1.1)*. Wtedy funkcja f jest różnowartościowa.*

Dowód. Wykażemy najpierw, że jeśli $x,y\in G$ i $f(x)-f(y)=x-y$, to $x=y$. Ustalmy punkty $x,y\in G$ i załóżmy, że $f(x)-f(y)=x-y$. Wtedy $x+f(y)=y+f(x)$, a zatem $f(x+f(y))=f(y+f(x))$, co wobec równania (1.1) daje $x=y$.

Ustalmy teraz dowolne elementy $x, y \in G$ i załóżmy, że $f(x) = f(y)$. Wtedy oczywiście $x + f(x) = x + f(y)$ i, korzystając z równości (1.1), otrzymujemy

$$f(y + f(x)) - f(x + f(x)) = f(y + f(x)) - f(x + f(y)) = y - x.$$

Definiując $x' = x + f(x)$ oraz $y' = y + f(x)$ i korzystając z powyższej równości widzimy, że $f(y') - f(x') = y' - x'$. Stąd, na mocy pierwszej części dowodu, dostajemy $y' = x'$, a zatem $y = x$. $\square$

Z lematu 1.1 wyprowadzamy następujący wniosek.

Wniosek 1.2 *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (1.1). *Wtedy funkcja f zeruje się w pewnym punkcie. Dokładniej, $f(-f(-f(0))) = 0$.*

Dowód. Podstawiając $y = -f(x)$ w równości (1.1) otrzymujemy

$$x + f(0) = -f(x) + f(x + f(-f(x))) \tag{1.4}$$

dla każdego elementu $x \in G$. Stosując teraz warunek (1.4) dla $x = -f(0)$ dostajemy

$$f(-f(0)) = f(-f(0) + f(-f(-f(0)))).$$

Na mocy lematu 1.1 funkcja f jest różnowartościowa. Zatem $-f(0) = -f(0) + f(-f(-f(0)))$, a więc $f(-f(-f(0))) = 0$. $\square$

Uwaga 1.3 *Niech G będzie grupoidem z zerem i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (1.1). *Jeśli $f(0) = 0$, to funkcja f spełnia równanie*

$$x + f^2(x) = f(x). \tag{1.5}$$

Dowód. Wystarczy podstawić $y = 0$ w równości (1.1). $\square$

Poniższa uwaga przedstawia pewne własności rozwiązań równania (1.5).

Uwaga 1.4 *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (1.5). *Wtedy $f^3 = -\mathrm{id}$; w szczególności funkcja f jest nieparzystą bijekcją oraz $f(0) = 0$.*

Dowód. Podstawiając $f(x)$ w miejsce x w równości (1.5), otrzymujemy warunek $f^3(x) = f^2(x) - f(x) = -x$ dla każdego $x \in G$, a stąd $f^3 = -\mathrm{id}$. W szczególności funkcja f jest bijekcją. Ponadto dla każdego elementu $x \in G$ zachodzą równości

$$f(-x) = f(f^3(x)) = f^3(f(x)) = -f(x),$$

a zatem funkcja f jest nieparzysta. Podstawiając $x = 0$ w równości (1.5) otrzymujemy równość $f^2(0) = f(0)$, a stąd i z różnowartościowości funkcji f wynika, że $f(0) = 0$. $\square$

Z uwag 1.3 i 1.4 wyprowadzamy następujący wniosek.

Wniosek 1.5 *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (1.1)*. Załóżmy, że $f(0) = 0$. Wtedy $f^3 = -\mathrm{id}$ oraz funkcja f jest nieparzysta.*

Uwaga 1.6 *Niech G będzie skracalną półgrupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (1.1)*. Wtedy dla każdego punktu $x_0 \in G$ funkcja $h\colon G \to G$, określona wzorem $h(x) = f(x + x_0)$, także spełnia równanie* (1.1)*.*

Dowód. Ustalmy punkt $x_0 \in G$ i dowolne elementy $x, y \in G$. Podstawiając $x + x_0$ w miejsce x oraz $y + x_0$ w miejsce y w równości (1.1) otrzymujemy

$$x + x_0 + f(y + x_0 + f(x + x_0)) = y + x_0 + f(x + x_0 + f(y + x_0)).$$

Stąd $x + h(y + h(x)) = y + h(x + h(y))$, a zatem funkcja h spełnia równanie (1.1). □

Lemat 1.7 *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie funkcją addytywną. Funkcja f spełnia równanie* (1.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia równanie* (1.5)*.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (1.5). Ustalmy dowolne elementy $x, y \in G$. Podstawiając $x - y$ w miejsce x w równości (1.5) i korzystając z addytywności funkcji f otrzymujemy $x - y + f^2(x) - f^2(y) = f(x) - f(y)$, a stąd $x + f(y) + f^2(x) = y + f(x) + f^2(y)$. Korzystając ponownie z addytywności f widzimy, że funkcja f spełnia równanie (1.1). Implikacja przeciwna wynika z uwagi 1.3 i z tego, że każde addytywne przekształcenie grupy w siebie zeruje się w zerze. □

Sformułujemy teraz najważniejsze twierdzenie tego rozdziału.

Twierdzenie 1.8 *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (1.1)*. Jeśli $f(0) = 0$, to funkcja $2f$ jest addytywna.*

Dowód. Załóżmy, że $f(0) = 0$. Z wniosku 1.5 wynika, że $f^3 = -\mathrm{id}$ oraz funkcja f jest nieparzysta. Stąd $f(-f^2(y)) = y$ dla każdego $y \in G$. Podstawiając $-f^2(y)$ w miejsce y w równości (1.1) otrzymujemy

$$x + f(-f^2(y) + f(x)) = -f^2(y) + f(x + y)$$

dla wszystkich $x, y \in G$, a zatem

$$f(x + y) = f^2(y) + x + f(-f^2(y) + f(x)) \tag{1.6}$$

dla wszystkich $x, y \in G$. Ponieważ G jest grupą abelową, więc $f(x + y) = f(y + x)$ dla wszystkich $x, y \in G$. Stąd i z warunku (1.6) wynika, że dla wszystkich $x, y \in G$ zachodzi równość

$$f(x + y) = f^2(x) + y + f(-f^2(x) + f(y)). \tag{1.7}$$

Dodając wyrażenia stojące odpowiednio po lewych i prawych stronach równości (1.6) i (1.7) otrzymujemy

$$2f(x+y) = x + f^2(x) + y + f^2(y) + f(-f^2(y) + f(x)) + f(-f^2(x) + f(y))$$

dla wszystkich $x, y \in G$. Ustalmy punkty $x, y \in G$. Korzystając z uwagi 1.3 powyższy warunek można zapisać w postaci

$$2f(x+y) = f(x) + f(y) + f(-f^2(y) + f(x)) + f(-f^2(x) + f(y)).$$

Ponieważ funkcja f jest nieparzysta, więc z ostatniej równości wynika, że

$$2f(x+y) = f(x) + f(y) - f(f^2(y) - f(x)) + f(-f^2(x) + f(y)). \tag{1.8}$$

Podstawiając teraz $-f(x)$ w miejsce x i $f(y)$ w miejsce y w równości (1.1) oraz korzystając ponownie z nieparzystości funkcji f dostajemy

$$-f(f^2(y) - f(x)) + f(-f^2(x) + f(y)) = f(y) + f(x)$$

dla wszystkich $x, y \in G$. Uwzględniając powyższy związek w równości (1.8) otrzymujemy warunek

$$2f(x+y) = f(x) + f(y) + f(y) + f(x) = 2f(x) + 2f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in G$. Kończy to dowód twierdzenia. □

Uwaga 1.9 Z lematu 1.7 i uwagi 1.6 wynika, że jeśli G jest grupą abelową, x_0 elementem grupy G oraz $a\colon G \to G$ jest addytywnym rozwiązaniem równania (1.5), to funkcja $f\colon G \to G$, dana wzorem $f(x) = a(x - x_0)$ spełnia równanie (1.1). W szczególności istnienie addytywnych rozwiązań równania (1.5) w klasie funkcji przekształcających grupę abelową G w siebie implikuje istnienie rozwiązań $f\colon G \to G$ równania (1.1). Korzystając z Proposition 1 z pracy [11] stwierdzamy, że równanie (1.5) ma addytywne rozwiązanie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Z twierdzenia 1.8 wyprowadzamy wniosek opisujący rozwiązania równania (1.1) w grupach abelowych bez elementów rzędu 2.

Wniosek 1.10 *Niech G będzie grupą abelową bez elementów rzędu 2 i niech $f\colon G \to G$. Funkcja f spełnia równanie (1.1) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt $x_0 \in G$ i takie addytywne rozwiązanie $a\colon G \to G$ równania (1.5), że $f(x) = a(x - x_0)$ dla każdego $x \in G$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (1.1). Przyjmijmy $x_0 = -f(-f(0))$. Korzystając z wniosku 1.2 otrzymujemy równość $f(x_0) = 0$. Zdefiniujmy funkcję $a\colon G \to G$ wzorem $a(x) = f(x + x_0)$. Na podstawie uwagi 1.6 funkcja a spełnia równanie (1.1), a ponadto $a(0) = f(x_0) = 0$. Na mocy twierdzenia 1.8 funkcja $2a$

jest addytywna, a stąd wobec założenia o grupie G wynika, że a jest addytywna. Korzystając z uwagi 1.3 wnioskujemy, że funkcja a spełnia równanie (1.5). Implikacja przeciwna wynika z uwagi 1.9. $\square$

Przedstawimy teraz podany przez J. Rätza [32] przykład nieaddytywnego rozwiązania równania (1.1). Pokazuje on, że teza wniosku 1.10 może nie zachodzić w grupach abelowych mających elementy rzędu 2.

Przykład R1 Dla każdego $i \in \{1, \ldots, 6\}$ niech $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2{}^6$ będzie skończonym ciągiem, w którym jedynka występuje na i-tym miejscu. Oczywiście zbiór $\{e_1, \ldots, e_6\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{Z}_2{}^6$ nad ciałem $\mathbb{Z}_2$. Poniższa tabela przedstawia szukaną funkcję.

x	$f(x)$	$f^2(x)$
0	0	0
e_1	e_2	$e_1 + e_2$
e_3	e_4	$e_3 + e_4$
$e_1 + e_3$	e_5	$e_1 + e_3 + e_5$
$e_2 + e_4$	e_6	$e_2 + e_4 + e_6$
$e_1 + e_2 + e_4$	$e_1 + e_2 + e_3 + e_5$	$e_3 + e_4 + e_5$
$e_2 + e_3 + e_4$	$e_1 + e_3 + e_4 + e_5$	$e_1 + e_2 + e_5$
$e_1 + e_6$	$e_1 + e_2 + e_3$	$e_2 + e_3 + e_6$
$e_3 + e_6$	$e_1 + e_3 + e_4$	$e_1 + e_4 + e_6$
$e_3 + e_5$	$e_4 + e_6$	$e_3 + e_4 + e_5 + e_6$
$e_1 + e_5$	$e_2 + e_6$	$e_1 + e_2 + e_5 + e_6$
$e_2 + e_5$	$e_1 + e_4 + e_5 + e_6$	$e_1 + e_2 + e_4 + e_6$
$e_4 + e_5$	$e_2 + e_3 + e_5 + e_6$	$e_2 + e_3 + e_4 + e_6$
$e_1 + e_2 + e_6$	$e_2 + e_3 + e_4 + e_5$	$e_1 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6$
$e_1 + e_3 + e_6$	$e_2 + e_4 + e_5 + e_6$	$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$
$e_2 + e_3$	$e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6$	$e_4 + e_5 + e_6$
$e_5 + e_6$	$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6$	$e_1 + e_2 + e_3 + e_4$
$e_1 + e_4$	$e_1 + e_2 + e_4 + e_5 + e_6$	$e_2 + e_5 + e_6$
$e_2 + e_4 + e_5$	$e_1 + e_3 + e_5 + e_6$	$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_6$
$e_1 + e_4 + e_5$	$e_3 + e_5 + e_6$	$e_1 + e_3 + e_4 + e_6$
$e_1 + e_2 + e_3 + e_6$	$e_2 + e_3 + e_5$	$e_1 + e_5 + e_6$
$e_3 + e_4 + e_6$	$e_1 + e_2 + e_4 + e_5$	$e_1 + e_2 + e_3 + e_5 + e_6$

Tabelę należy odczytywać w ten sposób, że wartość funkcji f dla danego argumentu z kolumny „x” (odpowiednio, „$f(x)$”) jest podana w tym samym wierszu kolumny „$f(x)$” (odpowiednio, „$f^2(x)$”). Natomiast wartość funkcji f dla argumentu z kolumny „$f^2(x)$” jest równa elementowi stojącemu w kolumnie „x” w tym samym wierszu, co argument.

Aby udowodnić, że funkcja f nie jest addytywna, wystarczy zauważyć, że $f(e_2) + f(e_4) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = (1, 1, 1, 1, 0, 0)$, natomiast $f(e_2 + e_4) = e_6$. Zatem $f(e_2 + e_4) \neq f(e_2) + f(e_4)$.

1.2 Addytywne rozwiązania równania stowarzyszonego z równaniem Brillouët-Belluot

Wniosek 1.10 sprowadza rozwiązanie równania (1.1) w grupach abelowych bez elementów rzędu 2 do rozwiązania równania (1.5) w klasie wszystkich funkcji addytywnych. Che Tat Ng i Wenian Zhang udowodnili rezultat (zob. [11; Proposition 2]), z którego wynika poniższe twierdzenie, wyznaczające rozwiązanie równania (1.5) w klasie odwzorowań liniowych przekształcających przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ w siebie.

Twierdzenie NZ *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ i niech $a\colon X \to X$ będzie odwzorowaniem liniowym. Funkcja a spełnia równanie* (1.5) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza H przestrzeni X, zbiór $J \subset X$ i taka rodzina $\{B_j : j \in J\}$ parami rozłącznych podzbiorów bazy H, że $\bigcup_{j\in J} B_j = H$ i dla każdego $j \in J$ zachodzi równość $B_j = \{x_{j,1}, x_{j,2}\}$ dla pewnych różnych punktów $x_{j,1}, x_{j,2} \in H$ spełniających warunki $a(x_{j,1}) = x_{j,2}$ i $a(x_{j,2}) = x_{j,2} - x_{j,1}$.*

W poniższym wniosku 1.11, który można traktować jako wniosek z twierdzenia NZ, implikacja ,, $\Leftarrow$ '' została zauważona przez M. Sablika w uwadze [33].

Wniosek 1.11 *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ i niech $a\colon X \to X$ będzie odwzorowaniem liniowym. Funkcja a spełnia równanie* (1.5) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza H przestrzeni X, rozłączne zbiory $H_1, H_2 \subset H$ o własności $H_1 \cup H_2 = H$ i taka bijekcja $g\colon H_1 \to H_2$, że a jest liniowym rozszerzeniem funkcji $f_0\colon H \to X$ danej wzorem $f_0(x) = g(x)$ dla $x \in H_1$ oraz $f_0(x) = x - g^{-1}(x)$ dla $x \in H_2$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja a jest addytywnym rozszerzeniem funkcji f_0, o której mówi teza wniosku. Sprawdzimy, że funkcja a spełnia równanie (1.5) na zbiorze H, skąd już wynika, że a spełnia (1.5) na całej przestrzeni. Ustalmy dowolny element $x \in H$. Załóżmy najpierw, że $x \in H_1$. Wtedy

$$a^2(x) = a(f_0(x)) = a(g(x)) = f_0(g(x)) = g(x) - g^{-1}(g(x)) = g(x) - x = a(x) - x.$$

Jeśli natomiast $x \in H_2$, to

$$\begin{aligned} a^2(x) &= a(f_0(x)) = a(x - g^{-1}(x)) = a(x) - a(g^{-1}(x)) = a(x) - f_0(g^{-1}(x)) = \\ &= a(x) - g(g^{-1}(x)) = a(x) - x. \end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że funkcja a spełnia równanie (1.5). Na mocy twierdzenia NZ istnieje baza H przestrzeni X, zbiór $J \subset X$ i taka rodzina $\{B_j : j \in J\}$ parami rozłącznych podzbiorów bazy H, że $\bigcup_{j\in J} B_j = H$ oraz dla każdego $j \in J$ zachodzi równość $B_j = \{x_{j,1}, x_{j,2}\}$ dla pewnych różnych punktów $x_{j,1}, x_{j,2} \in H$ spełniających warunki $a(x_{j,1}) = x_{j,2}$ i $a(x_{j,2}) = x_{j,2} - x_{j,1}$. Z uwagi 1.4 wynika, że $a^3 = -\mathrm{id}$, funkcja a jest różnowartościowa i nieparzysta, oraz $a(G) = G$. Przyjmijmy $H_1 = \bigcup_{j\in J}\{x_{j,1}\}$,

$H_2 = \bigcup_{j\in J}\{x_{j,2}\}$ oraz $g = a|_{H_1}$. Oczywiście $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ i $H_1 \cup H_2 = H$. Ponadto funkcja g jest różnowartościowa oraz

$$g(H_1) = a(H_1) = a\Bigg(\bigcup_{j\in J}\{x_{j,1}\}\Bigg) = \bigcup_{j\in J}\{a(x_{j,1})\} = \bigcup_{j\in J}\{x_{j,2}\} = H_2.$$

Dla zakończenia dowodu pokażemy, że $a|_H = f_0$. Ustalmy dowolny punkt $x \in H$. Jeśli $x \in H_1$, to $a(x) = g(x) = f_0(x)$. Załóżmy teraz, że $x \in H_2$. Ponieważ $a^3 = -\mathrm{id}$, więc

$$g^{-1} = \big(a|_{H_1}\big)^{-1} = a^{-1}|_{H_2} = -a^2|_{H_2},$$

a zatem $a(x) = x + a^2(x) = x - g^{-1}(x) = f_0(x)$. □

Przyjmując $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ w twierdzeniu NZ i wniosku 1.11 otrzymujemy postać addytywnych rozwiązań równania (1.5).

1.3 Rozwiązania regularne i rozwiązania nieregularne

Z wniosku 1.11 wynika, jeśli $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ jest ciałem, a X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, to istnienie liniowych rozwiązań równania (1.5) jest równoważne istnieniu dwóch rozłącznych równolicznych podzbiorów pewnej bazy przestrzeni X sumujących się do tej bazy. Jeśli $\dim X < \infty$ i $\dim X$ jest liczbą nieparzystą, to podział bazy na takie zbiory oczywiście nie istnieje. Możemy zatem sformułować następujący wynik.

Twierdzenie 1.12 *Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie liczbą nieparzystą i niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie rozwiązaniem równania* (1.1). *Wtedy funkcja f nie jest ograniczona na żadnym zbiorze mierzalnym w sensie Lebesgue'a miary dodatniej, ani na żadnym zbiorze drugiej kategorii o własności Baire'a. W szczególności funkcja f nie jest ciągła w żadnym punkcie i jest niemierzalna w sensie Lebesgue'a i w sensie Baire'a.*

Dowód. Na podstawie wniosku 1.10 istnieje punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i takie addytywne rozwiązanie $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ równania (1.5), że $f(x) = a(x - x_0)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$. Przypuśćmy nie wprost, że funkcja f ma co najmniej jedną własność wymienioną w twierdzeniu. Wtedy tę samą własność ma funkcja a, co wobec twierdzeń Ostrowskiego i Mehdiego (zob. [21, Theorem 9.3.1 i Theorem 9.3.2]) implikuje jej ciągłość. Zatem a jest liniowym odwzorowaniem przestrzeni wymiaru nieparzystego w siebie spełniającym równanie (1.5), co jest niemożliwe. □

Zajmiemy się teraz opisem regularnych rozwiązań równania (1.1) w pewnych klasach funkcji.

Twierdzenie 1.13 *Niech $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ograniczoną na pewnym zbiorze mierzalnym w sensie Lebesgue'a miary dodatniej, lub drugiej kategorii o własności*

Baire'a. Funkcja f spełnia równanie (1.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby z_0,$d \in \mathbb{C}$, że albo*

$$f(z) = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4} + |d|^2}\right)(z - z_0) + d(\overline{z} - \overline{z_0}) \tag{1.9}$$

dla każdego $z \in \mathbb{C}$, albo

$$f(z) = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4} + |d|^2}\right)(z - z_0) + d(\overline{z} - \overline{z_0}) \tag{1.10}$$

dla każdego $z \in \mathbb{C}$. W szczególności wzory (1.9) *i* (1.10) *przedstawiają ogólne rozwiązanie równania* (1.1) *w klasie wszystkich funkcji $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ciągłych w co najmniej jednym punkcie.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (1.1). Na podstawie wniosku 1.10 istnieje punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ i takie addytywne rozwiązanie $a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ równania (1.5), że $f(z) = a(z - z_0)$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Funkcja f jest ograniczona na zbiorze mierzalnym w sensie Lebesgue'a miary dodatniej lub drugiej kategorii o własności Baire'a, a zatem ten sam warunek spełnia funkcja a. W konsekwencji spełniają go również funkcje $\mathfrak{Re}\,a$ oraz $\mathfrak{Im}\,a$, skąd, na mocy twierdzeń Ostrowskiego i Mehdiego (zob. [21, Theorem 9.3.1 i Theorem 9.3.2]) wnioskujemy, że są to funkcje ciągłe. Zatem a jest ciągłą funkcją addytywną, a więc (zob. [21, Theorem 5.6.2])) istnieją takie liczby $c, d \in \mathbb{C}$, że $a(z) = cz + d\overline{z}$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Równanie (1.5) przyjmuje teraz postać $z + a(cz + d\overline{z}) = cz + d\overline{z}$, a więc

$$(c^2 - c + 1 + |d|^2)z = -d(c + \overline{c} - 1)\overline{z}.$$

Wstawiając do powyższej równości $z = 1$, a następnie $z = \mathrm{i}$, otrzymujemy $c^2 - c + 1 + |d|^2 = -d(c + \overline{c} - 1) = 0$. Stąd $c = 1/2 - \sqrt{-3 - 4|d|^2}/2$ lub $c = 1/2 + \sqrt{-3 - 4|d|^2}/2$, a zatem

$$c \in \left\{\frac{1}{2} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4} + |d|^2}, \frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4} + |d|^2}\right\}.$$

Otrzymujemy w ten sposób żądaną postać funkcji f. Z wniosku 1.10 (lub z bezpośredniego przeliczenia) wynika, że funkcje postaci (1.9) i (1.10) są rozwiązaniami równania (1.1). □

Wniosek 1.14 *Niech $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją różniczkowalną w co najmniej jednym punkcie. Funkcja f spełnia równanie* (1.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ i taka liczba $c \in \left\{\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, że $f(z) = c(z - z_0)$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$.*

Dowód. Wystarczy skorzystać z twierdzenia 1.13 i zauważyć, że sprzężenie nie jest funkcją różniczkowalną w żadnym punkcie, a zatem we wzorach (1.9) i (1.10) parametr d jest równy zeru. □

Twierdzenie 1.15 *Niech X będzie przestrzenią unormowaną i niech $f\colon X \to X$. Załóżmy istnienie takiej liczby $\beta > 0$, że spełniony jest jeden z następujących warunków:*
(a) $\quad \|f(x) - f(y)\| \le \|x - y\|^\beta$ *dla wszystkich $x, y \in X$;*
(b) $\quad \|f(x) - f(y)\| \ge \|x - y\|^\beta$ *dla wszystkich $x, y \in X$;*
(c) *istnieje liczba $c \in (0, \infty)$ o własności*

$$\|f(x) - f(y)\| = c\|x - y\|^\beta \quad \text{dla wszystkich } x, y \in X. \tag{1.11}$$

Funkcja f spełnia równanie (1.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt $x_0 \in X$ i taka addytywna izometria $a\colon X \to X$, że $f(x) = a(x - x_0)$ dla każdego $x \in X$. W szczególności, każde rozwiązanie równania* (1.1) *przekształcające zbiór X w siebie i spełniające jeden z warunków* (a)–(c)*, jest izometrią.*

Dowód. Jeśli $X = \{0\}$, to $f = 0$ i przyjmując $x_0 = 0$ i $a = 0$ widzimy, że równoważność zachodzi. Zatem w dalszym ciągu dowodu zakładamy, że $X \neq \{0\}$. Załóżmy, że f jest rozwiązaniem równania (1.1). Na podstawie wniosku 1.10 istnieje punkt $x_0 \in X$ i takie addytywne rozwiązanie $a\colon X \to X$ równania (1.5), że $f(x) = a(x - x_0)$ dla każdego $x \in X$. Na podstawie uwagi 1.4 funkcja a spełnia równanie $a^3 = -\mathrm{id}$.

Wykażemy, że funkcja a jest izometrią. Jeśli f spełnia warunek (a), to dla każdego $x \in X$ zachodzą nierówności $\|a(x)\| = \|f(x + x_0)\| = \|f(x + x_0) - f(x_0)\| \le \|x\|^\beta$. Stąd

$$\|x\| = \|a^3(x)\| \le \|a^2(x)\|^\beta \le \|a(x)\|^{\beta^2} \le \|x\|^{\beta^3} \tag{1.12}$$

dla każdego $x \in X$. Zatem $\|x\|^{\beta^3 - 1} \ge 1$ dla każdego elementu $x \in X \setminus \{0\}$. Ponieważ przestrzeń X jest niezerowa, więc ostatni warunek oznacza, że $\beta^3 = 1$, skąd $\beta = 1$. Korzystając ponownie z warunku (1.12) stwierdzamy, że $\|a(x)\| = \|x\|$ dla każdego $x \in X$, a więc a jest izometrią. Analogicznie przeprowadzamy dowód w przypadku, gdy funkcja f spełnia warunek (b). Załóżmy teraz, że istnieje liczba $c \in (0, \infty)$, spełniająca warunek (1.11). Wtedy

$$\|a(x)\| = \|f(x + x_0)\| = \|f(x + x_0) - f(x_0)\| = c\|x\|^\beta \tag{1.13}$$

dla każdego $x \in X$. Zatem

$$\|x\| = \|a^3(x)\| = c\|a^2(x)\|^\beta = c^{\beta+1}\|a(x)\|^{\beta^2} = c^{\beta^2+\beta+1}\|x\|^{\beta^3}$$

dla każdego $x \in X$, a stąd

$$c^{\beta^2+\beta+1}\|x\|^{\beta^3-1} = 1 \quad \text{dla każdego } x \in X \setminus \{0\}.$$

Ponieważ $X \neq \{0\}$, więc widzimy, że $\beta^3 = 1$, a zatem $\beta = 1$ i $c = 1$. Wobec warunku (1.13) oznacza to, że a jest izometrią. Implikacja przeciwna jest konsekwencją wniosku 1.10. □

Wniosek 1.16 *Niech* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *będzie funkcją spełniającą jeden z warunków* (a)–(c). *Funkcja* f *spełnia równanie* (1.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt* $z_0 \in \mathbb{C}$ *i taka liczba* $c \in \left\{\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, *że* $f(z) = c(z - z_0)$ *dla każdego* $z \in \mathbb{C}$.

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (1.1). Na podstawie twierdzenia 1.15 istnieje punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ i taka addytywna izometria $a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spełniająca równanie (1.5), że $f(z) = a(z - z_0)$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Ustalmy liczbę $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Funkcja a jest izometrią, a zatem

$$\left|\frac{a^2(z)}{z}\right| = \frac{|a^2(z)|}{|z|} = \frac{|a(z)|}{|z|} = 1.$$

Jednocześnie a spełnia równanie (1.5), a więc

$$\left|\frac{a(z)}{z} - 1\right| = \left|\frac{a(z) - z}{z}\right| = \left|\frac{a^2(z)}{z}\right| = 1.$$

Zatem $a(z)/z \in \left\{\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ dla każdego $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Ponieważ a jest funkcją ciągłą oraz zbiór $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ jest spójny, więc istnieje taka liczba $c \in \left\{\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, że $a(z) = cz$ dla każdego $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ (a także, oczywiście, dla $z = 0$). Stąd otrzymujemy żądaną postać funkcji f. Implikacja przeciwna jest konsekwencją wniosku 1.10. $\square$

Rozdział 2

Równanie Brzdęka

W bieżącym rozdziale przedstawimy wyniki dotyczące równania

$$f(x) + f^2(y) + f(y + f(x)) = f(y) + f^2(x) + f(x + f(y)). \tag{2.1}$$

Zaczniemy od opisania związku powyższego równania z pewnymi innymi równaniami funkcyjnymi. W poniższej uwadze 2.2 dowodzimy, że równanie (2.1) jest uogólnieniem równania

$$f(x) + f(y + f(y)) = f(y) + f(x + f(y)). \tag{2.2}$$

Równanie (2.2) pojawiło się w badaniach A. Najdeckiego [28], a problem rozwiązania tego równania w klasie przekształceń dowolnej półgrupy abelowej w siebie został postawiony przez J. Brzdęka podczas The Forty–fourth International Symposium on Functional Equations [10]. J. Brzdęk zauważył, między innymi, że jeśli $(S,+)$ jest półgrupą abelową, a $f\colon S \to S$ jest funkcją addytywną (lub, jak spostrzegł W. Jarczyk, funkcją afiniczną), lub spełnia równanie $f(x+f(y)) = f(x)+f(y)$, to f jest rozwiązaniem równania (2.2). Ponadto K. Baron zaobserwował, że każde odwzorowanie f półgrupy abelowej w siebie, którego każda wartość jest jego okresem, jest rozwiązaniem równania (2.2). Związek równania (2.2) z warunkowym równaniem Cauchy'ego

$$f(x + f(y)) = f(x) + f^2(y) \tag{2.3}$$

został odkryty przez A. Najdeckiego. Na tej podstawie wykazał on, że jeśli niestałe odwzorowanie f przestrzeni liniowo-topologicznej X w siebie ma własność $0 \in \operatorname{int}(f(X) - f(X))$ i f spełnia równanie (2.2), to funkcja f jest afiniczna (patrz [28, Theorem 1.13 i jego dowód]).

W klasie takich funkcji f przekształcających grupę abelową w siebie, że funkcja f^2 jest stała, równanie (2.1) jest równoważne równaniu

$$f(x) + f(y + f(x)) = f(y) + f(x + f(y)), \tag{2.4}$$

zwanemu równaniem Kampé de Feriét-Forte. Z. Baiaochci (w 1967r.) i Z. Daróczy (w 1969r.) znaleźli postać wszystkich ciągłych rozwiązań równania (2.4) przekształcających zbiór liczb rzeczywistych w siebie (zob. [14]). Problem rozwiązania równania (2.4) w klasie funkcji przekształcających zbiór $\mathbb{Z}$ w siebie oraz w klasie funkcji ciągłych $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ został postawiony przez Z. Daróczyego podczas The Forty–first International Symposium on Functional Equations (zob. [13]). Równanie (2.1) wiąże się także z omówionym w rozdziale pierwszym równaniem Brillouët–Belluot, co wykazujemy w poniższej uwadze 2.1.

Uwaga 2.1 *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie funkcją spełniającą równanie* (1.1)*. Wtedy istnieje taki punkt $x_0 \in G$, że funkcja $h\colon G \to G$, dana wzorem $h(x) = f(x + x_0)$, spełnia równanie* (2.1)*.*

Dowód. Na mocy wniosku 1.2 istnieje taki punkt $x_0 \in G$, że $f(x_0) = 0$. Niech $h(x) = f(x + x_0)$ dla każdego $x \in G$. Z uwagi 1.6 wynika, że funkcja h spełnia równanie (1.1), a ponadto $h(0) = f(x_0) = 0$. Stąd i z uwagi 1.3 wynika, że funkcja h spełnia równanie (1.5). Zatem dla wszystkich $x, y \in G$ zachodzą równości

$$\begin{aligned} h(x) - h^2(x) + h(y + h(x)) &= x + h(y + h(x)) = y + h(x + h(y)) = \\ &= h(y) - h^2(y) + h(x + h(y)). \end{aligned}$$

Stąd wynika, że funkcja h jest rozwiązaniem równania (2.1). □

Uwaga 2.2 *Niech S będzie skracalną półgrupą abelową i niech $f\colon S \to S$ będzie funkcją spełniającą równanie* (2.2)*. Wtedy f jest rozwiązaniem równania* (2.1)*.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (2.2). Podstawiając $f(x)$ w miejscu x w równości (2.2) otrzymujemy warunek

$$f^2(x) + f(y + f(y)) = f(y) + f(f(x) + f(y))$$

dla wszystkich $x, y \in S$. Zatem

$$f^2(x) + f(x) + f(y + f(y)) = f(x) + f(y) + f(f(x) + f(y))$$

dla wszystkich $x, y \in S$. Stąd na mocy równości (2.2) wynika, że

$$f^2(x) + f(y) + f(x + f(y)) = f(x) + f(y) + f(f(x) + f(y))$$

dla wszystkich $x, y \in S$. Wyrażenie stojące po prawej stronie ostatniej równości jest symetryczne ze względu na zamianę x i y, a więc lewa strona tej równości także ma tę własność. Zatem dla wszystkich $x, y \in S$ zachodzi równość

$$f(y) + f^2(x) + f(x + f(y)) = f(x) + f^2(y) + f(y + f(x)).$$

Oznacza to, że funkcja f spełnia równanie (2.1). □

Z uwagi 2.2 i spostrzeżenia W. Jarczyka wyprowadzamy następujący wniosek.

Wniosek 2.3 *Niech G będzie skracalną półgrupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie funkcją afiniczną. Wtedy funkcja f spełnia równanie* (2.1)*.*

Poniższe twierdzenie uogólnia spostrzeżenie A. Najdeckiego na struktury, w których nie zakładamy istnienia zera.

Twierdzenie 2.4 *Niech S będzie skracalną półgrupą abelową i niech $f\colon S \to S$. Załóżmy, że istnieje element $x_0 \in S$ spełniający warunek*

$$f(x_0 + f(y)) = f^2(y) \quad \text{dla każdego } x \in S. \tag{2.5}$$

Funkcja f spełnia równanie (2.2) *wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y \in S$ zachodzi równość*

$$f(x_0) + f(x + f(y)) = f(x) + f^2(y). \tag{2.6}$$

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (2.2). Stosując równość (2.2) dla punktu $x = x_0$ i dowolnego elementu $y \in S$ otrzymujemy warunek

$$f(x_0) + f(y + f(y)) = f(y) + f(x_0 + f(y)) = f(y) + f^2(y).$$

Stąd i ponownie z równości (2.2) wynika, że dla wszystkich $x, y \in S$ zachodzi warunek

$$f(x) + f(y) + f^2(y) = f(x) + f(x_0) + f(y + f(y)) = f(x_0) + f(y) + f(x + f(y)).$$

Na mocy skracalności działania w półgrupie S oznacza to, że dla wszystkich $x, y \in S$ zachodzi równość (2.6).

Załóżmy teraz, że równość (2.6) jest spełniona dla wszystkich $x, y \in S$. Przyjmując w niej $x = y$ otrzymujemy warunek

$$f(x_0) + f(y + f(y)) = f(y) + f^2(y)$$

dla każdego $y \in S$. Korzystając ponownie z równości (2.6) stwierdzamy, że dla wszystkich $x, y \in S$ zachodzą równości

$$f(x) + f(x_0) + f(y + f(y)) = f(x) + f(y) + f^2(y) = f(y) + f(x_0) + f(x + f(y)).$$

Z ostatniej równości i ze skracalności działania w półgrupie S wynika, że funkcja f spełnia równanie (2.2). □

Przedstawimy teraz podstawowe własności rozwiązań równania (2.1).

Lemat 2.5 *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (2.1). *Wtedy zachodzi równość $(f - f(0))^2 = f^2 - f^2(0)$ oraz funkcja $f - f(0)$ spełnia równanie* (2.1).

Dowód. Przyjmijmy $g = f - f(0)$. Podstawiając $y = 0$ w równości (2.1) otrzymujemy warunek

$$f(x) = f(0) - f^2(0) + f(x + f(0))$$

dla każdego $x \in G$. Wstawiając $x - f(0)$ w miejsce x w powyższym warunku dostajemy równość

$$f(x - f(0)) = f(0) - f^2(0) + f(x) \tag{2.7}$$

dla każdego $x \in G$. Stąd $g^2(x) = f(f(x) - f(0)) - f(0) = f^2(x) - f^2(0)$ dla każdego $x \in G$. Zatem, na mocy warunku (2.7), dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzą równości

$$\begin{aligned} g(x) \ - \ g^2(x) + g(y + g(x)) = \\ &= f(x) - f(0) - f^2(x) + f^2(0) + f(y + f(x) - f(0)) - f(0) = \\ &= f(x) - f(0) - f^2(x) + f^2(0) + f(0) - f^2(0) + f(y + f(x)) - f(0) = \\ &= f(x) - f^2(x) + f(y + f(x)) - f(0). \end{aligned}$$

Funkcja f spełnia równanie (2.1), a więc ostatni człon w powyższym ciągu równości jest symetryczny względem zmiennych x i y. Zatem taką własność ma też pierwszy człon powyższych równości, a więc funkcja g spełnia równanie (2.1). □

Lemat 2.6 *Niech G będzie grupą abelową bez elementów rzędu 2 i niech $f\colon G \to G$ będzie funkcją nieparzystą spełniającą równanie (2.1). Wtedy funkcja $-f$ jest addytywna na swoim wykresie. Ponadto, dla każdego $x \in G$ zachodzi warunek*

$$f(x - f^2(x)) = f(x) - f^3(x). \tag{2.8}$$

W szczególności, funkcja $-f^2$ jest addytywna na swoim wykresie.

Dowód. Funkcja f jest nieparzysta i grupa G nie ma elementów rzędu 2, a więc $f(0) = 0$. Ustalmy dowolny element $x \in G$. Stosując równość (2.1) dla $y = -x$ i korzystając z nieparzystości funkcji f otrzymujemy warunek

$$f(x) - f^2(x) + f(-x + f(x)) = -f(x) + f^2(x) + f(x - f(x)).$$

Stąd $2f(x-f(x)) = 2f(x)-2f^2(x)$, co wobec założenia o grupie G implikuje równość

$$f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = f(x) + f(-f(x))$$

dla każdego $x \in G$. Z ostatniego warunku wynika addytywność funkcji $-f$ na swoim wykresie.

Dla dowodu drugiej tezy lematu ustalmy punkt $x \in G$. Ponieważ $f(0) = 0$, więc podstawiając $y = -f(x)$ w równości (2.1) otrzymujemy warunek

$$f(x) - f^2(x) = f(-f(x)) - f^2(-f(x)) + f(x + f(-f(x))).$$

Wobec nieparzystości funkcji f z ostatniego warunku wynika, że

$$f(x - f^2(x)) = f(x) - f^3(x),$$

a zatem wzór (2.8) zachodzi.

Wykażemy teraz addytywność funkcji $-f^2$ na swoim wykresie. Ustalmy ponownie punkt $x \in G$. Korzystając ze wzoru (2.8) otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} f^2(x - f^2(x)) &= f(f(x - f^2(x))) = f(f(x) - f^3(x)) = f^2(x) - f^4(x) = \\ &= f^2(x) + f^2(-f^2(x)). \end{aligned}$$

Zatem funkcja $-f^2$ jest addytywna na swoim wykresie. □

Lemat 2.7 *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie funkcją spełniającą układ równań $f^2 = -\mathrm{id}$ i (2.1). Wtedy funkcja $2f$ jest addytywna.*

Dowód. Wykażemy najpierw, że funkcja f jest nieparzysta. Ponieważ zachodzi równość $f^2 = -\mathrm{id}$, więc dla każdego $x \in G$ spełnione sa równości $f(-x) = f(f^2(x)) = f^2(f(x)) = -f(x)$. Oznacza to nieparzystość funkcji f.

Z równości (2.1) i warunku $f^2 = -\mathrm{id}$ wynika, że dla wszystkich $x, y \in G$ zachodzi równość

$$f(x) + x + f(y + f(x)) = f(y) + y + f(x + f(y)).$$

Podstawiając $f(y)$ w miejscu y w ostatnim warunku otrzymujemy równość

$$f(f(x) + f(y)) = f(y) - y + f(x - y) - f(x) - x$$

dla wszystkich $x, y \in G$. Wyrażenie stojące po lewej stronie ostatniej równości jest symetryczne ze względu na zamianę zmiennych x i y, a więc tę własność ma także jej prawa strona. Zatem

$$f(y) - f(x) + f(x - y) = f(x) - f(y) + f(y - x)$$

dla wszystkich $x, y \in G$. Stąd i z nieparzystości funkcji f wynika, że dla wszystkich $x, y \in G$ zachodzą równości

$$2f(x - y) = 2f(x) - 2f(y) = 2f(x) + 2f(-y).$$

Podstawiając $-y$ w miejscu y w ostatnim warunku otrzymujemy tezę lematu. □

Poniższe twierdzenie zostało udowodnione przez W. Jarczyka [19] i przedstawia postać wszystkich funkcji ciągłych $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ addytywnych na swoim wykresie.

Twierdzenie J *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją addytywną na swoim wykresie. Wtedy istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że $f(x) = ax$ dla każdego elementu $x \in \mathbb{R}$, lub istnieją takie liczby $b, c \in [0, \infty)$, że $f(x) = bx$ dla każdego $x \in (-\infty, 0)$ i $f(x) = cx$ dla każdego $x \in [0, \infty)$.*

Z lematów 2.5 i 2.6 oraz z twierdzenia J wyprowadzamy następujący wniosek.

Wniosek 2.8 *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie takim rozwiązaniem równanie* (2.1)*, że funkcja $f - f(0)$ jest nieparzysta. Załóżmy, że funkcja f^2 jest ciągła. Wtedy istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że $(f - f(0))^2(x) = ax$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. W szczególności jeśli funkcja f^2 jest niestała, to funkcja f jest różnowartościowa.*

Poniższe twierdzenie 2.9, pochodzące z pracy [3], będzie nam potrzebne jako narzędzie w dowodzie jednego z następnych twierdzeń. Szczególny przypadek twierdzenia 2.9 został udowodniony przez J. Matkowskiego (zob. Theorem 1 w pracy [24]).

Twierdzenie 2.9 *Niech G, H będą grupami topologicznymi spełniającymi aksjomat oddzielania T_0 i niech Z będzie niepustym podzbiorem zbioru G. Załóżmy, że funkcja $f\colon G \to H$ ma granicę w pewnym punkcie. Jeśli podgrupa $<Z>$ generowana przez zbiór Z jest gęstym podzbiorem zbioru G , to funkcja f spełnia równość*

$$f(x+z) = f(x) + f(z) \tag{2.9}$$

dla wszystkich $x \in G$ i $z \in Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest addytywna.

Przedstawimy teraz główne twierdzenia tego rozdziału.

Twierdzenie 2.10 *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem równania* (2.1)*. Załóżmy, że funkcja $f - f(0)$ jest nieparzysta. Wtedy spełnione są następujące warunki:*
(a) *jeśli funkcja f^2 jest stała i funkcja f lub $f - \mathrm{id}$ ma własność Darboux, to funkcja f jest stała;*
(b) *jeśli $f^2 = \mathrm{id}$ i $<(f - f(0) - \mathrm{id})(\mathbb{R})> = \mathbb{R}$, to istnieje taka liczba $c \in \mathbb{R}$, że $f(x) = -x + c$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Niech $g = f - f(0)$. Na podstawie lematu 2.5 funkcja g spełnia równanie (2.1), a ponadto, oczywiście, $g(0) = 0$. Z lematu 2.6 wynika, że funkcja $-g$ jest addytywna na swoim wykresie.

Załóżmy najpierw, że spełniony jest poprzednik implikacji (a). Korzystając z lematu 2.5 otrzymujemy równość $g^2 = (f - f(0))^2 = f^2 - f^2(0) = 0$. Zatem

$$g^2 = 0. \tag{2.10}$$

i funkcja g spełnia też równanie (2.4). Wykażemy, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi warunek

$$g(g(x_1) + \cdots + g(x_n)) = 0 \quad \text{dla wszystkich} \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Ponieważ $g^2 = 0$, więc powyższy warunek zachodzi dla $n = 1$. Załóżmy teraz, że zachodzi on dla pewnej liczby naturalnej n. Ustalmy punkty $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Przyjmijmy $x = x_{n+1}$ oraz $y = g(x_1) + \cdots + g(x_n)$. Z założenia indukcyjnego wynika równość $g(y) = 0$. Funkcja g spełnia równanie (2.4), a więc

$$g(y + g(x)) = g(y) + g(x + g(y)) - g(x) = 0,$$

skąd wynika, że $g(g(x_1) + \cdots + g(x_{n+1})) = 0$. Kończy to dowód indukcyjny.

Załóżmy, że funkcja f ma własność Darboux. Wtedy funkcja g także ma własność Darboux. Z warunku (2.11) i z nieparzystości funkcji g wynika, że

$$g(x) = 0 \quad \text{dla każdego } x \in <g(\mathbb{R})>. \tag{2.12}$$

Wykażemy, że funkcja g jest stała. Przypuśćmy nie wprost, że g jest funkcją niestałą. Wtedy zbiór $g(\mathbb{R})$ jest przedziałem o niepustym wnętrzu, skąd wynika, że $<g(\mathbb{R})> = \mathbb{R}$. Stąd i z warunku (2.12) wynika, że $g = 0$, co przeczy przypuszczeniu. Zatem funkcja g jest stała, a więc funkcja f także jest stała.

Załóżmy teraz, że funkcja $f - \mathrm{id}$ ma własność Darboux. Wtedy tę samą własność ma funkcja $g - \mathrm{id}$, a więc także funkcja $-g + \mathrm{id}$. Funkcja $-g$ jest addytywna na swoim wykresie, a stąd, na mocy równości (2.10) i nieparzystości funkcji g wynika, że $-g(x - g(x)) = -g(x) + g^2(x) = -g(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zatem funkcja $-g$ spełnia równanie Eulera. Na mocy Theorem 11.9.4 z książki [22] funkcja $-g$ jest stała. Stąd wynika, że funkcja f także jest stała.

Załóżmy, że zachodzi poprzednik implikacji (b). Z lematu 2.5 wynika, że $g^2 = (f - f(0))^2 = f^2 - f^2(0) = \mathrm{id}$. Funkcja $-g$ jest nieprzysta i addytywna na swoim wykresie, a zatem dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$g(x - g(x)) = g(x) - g^2(x) = g(x) - x. \tag{2.13}$$

Ponieważ funkcja g spełnia równanie (2.1) i $g^2 = \mathrm{id}$, więc g spełnia równość

$$g(x) - x + g(y + g(x)) = g(y) - y + g(x + g(y)) \tag{2.14}$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$. Niech $A = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = -x\}$. Wykażemy, że zbiór A jest podgrupą grupy $\mathbb{R}$. Ponieważ $g(0) = 0$, więc $0 \in A$, a zatem zbiór A jest niepusty. Z nieparzystości funkcji g wynika, że $-A \subset A$. Ustalmy dowolne punkty $x, y \in A$. Korzystając z warunku (2.14) otrzymujemy równość $-2x + g(y - x) = -2y + g(x - y)$. Korzystając ponownie z nieparzystości funkcji g otrzymujemy równość $2g(x - y) = -2(x - y)$. Stąd $x - y \in A$.

Niech $C = \{g(x) - x : x \in \mathbb{R}\}$. Z równości (2.13) wynika inkluzja $C \subset A$. Stąd i z założenia wynika, że $\mathbb{R} = <C> \subset A$, a więc $A = \mathbb{R}$. To oznacza, że $g = -\mathrm{id}$, a zatem $f = -\mathrm{id} + f(0)$. Kończy to dowód w przypadku (b). $\square$

W kolejnym twierdzeniu rozpatrujemy sytuację, gdy funkcja f^2 ma postać nie występującą w założeniach twierdzenia 2.10.

Twierdzenie 2.11 *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że funkcja $f - f(0)$ jest nieparzysta. Załóżmy, że funkcja f^2 jest niestała, różna od $\mathrm{id} + f^2(0)$ i ciągła. Załóżmy ponadto, że w pewnym punkcie funkcja f ma skończoną i różną od $f(0)$ granicę. Jeśli funkcja f spełnia równanie* (2.1)*, to istnieją takie liczby $c \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$ i $d \in \mathbb{R}$, że*

$$f(x) = cx + d \tag{2.15}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (2.1). Przyjmijmy $g = f - f(0)$. Z lematu 2.5 wynika, że funkcja g spełnia równanie (2.1), oraz, że $g^2 = (f - f(0))^2 =$

$f^2 - f^2(0)$. Zatem funkcja g^2 jest niestała, ciągła i różna od identyczności, a ponadto, oczywiście, $g(0) = 0$. Na podstawie wniosku 2.8 istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, że

$$g^2(x) = ax \tag{2.16}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. W szczególności funkcja g^2 jest różnowartościowa, a zatem funkcja g także jest różnowartościowa.

Wykażemy, że $a \neq -1$. Przypuśćmy nie wprost, że $a = -1$. Wtedy

$$g^2 = -\mathrm{id} \tag{2.17}$$

i z lematu 2.7 wynika, że funkcja g jest addytywna. Z założenia istnienia granicy funkcji f w pewnym punkcie wynika, że funkcja g jest ograniczona na pewnym niepustym zbiorze otwartym. Zatem, na mocy twierdzenia Bernsteina-Doetscha (zob. [21, Theorem 6.4.2]), funkcja g jest ciągła. Stąd i z różnowartościowości funkcji g wynika, że jest ona ściśle monotoniczna. Zatem funkcja g^2 jest ściśle rosnąca, co przeczy równości (2.17). Wobec tego $a \neq -1$.

Funkcja g spełnia równania (2.1) i (2.16), a więc równanie (2.1) przyjmuje postać

$$g(x) - ax + g(y + g(x)) = g(y) - ay + g(x + g(y)). \tag{2.18}$$

Dla każdej funkcji $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiujemy *zbiór jednorodności* wzorem

$$J_k = \{p \in \mathbb{R} : k(px) = pk(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}\}.$$

Łatwo zauważyć, że dla każdej funkcji $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zbiór $(J_k\backslash\{0\}, \cdot)$ jest podgrupą grupy $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$. Z nieparzystości funkcji g wynika, że $-J_g \subset J_g$ i $0 \in J_g$. Ponieważ $g(ax) = g(g^2(x)) = g^2(g(x)) = ag(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc $a \in J_g$. Ponadto, na mocy lematu 2.6, funkcja g spełnia równanie (2.8), a więc dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $g(x - ax) = g(x) - ag(x)$, a zatem $g((1-a)x) = (1-a)g(x)$. Stąd $1 - a \in J_g$. Wykażemy teraz, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$g(x + a^{2^n} y) - g(y + a^{2^n} x) = (1 - a^{2^n})(g(x) - g(y)). \tag{2.19}$$

Dowód przeprowadzamy indukcyjnie. Podstawiając $g(x)$ w miejsce x w równości (2.18) otrzymujemy warunek

$$\begin{aligned} g(g(x) + g(y)) &= -g(y) + ay + g^2(x) - ag(x) + g(y + ax) = \\ &= -g(y) + ay + ax - ag(x) + g(y + ax) \end{aligned}$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$. Lewa strona ostatniego wzoru jest symetryczna względem x i y, a więc tę własność ma także prawa strona tego wzoru. Stąd

$$-g(y) - ag(x) + g(y + ax) = -g(x) - ag(y) + g(x + ay)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$. Zatem warunek (2.19) zachodzi dla $n = 0$. Ustalmy dowolną liczbę $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i załóżmy, że wzór (2.19) zachodzi dla liczby n i dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$. Podstawiając $a^{2^n}x$ w miejsce x w równości (2.19) otrzymujemy warunek

$$g(a^{2^n}x + a^{2^n}y) = g(y + a^{2^{n+1}}x) + g(a^{2^n}x) - g(y) - a^{2^n}g(a^{2^n}x) + a^{2^n}g(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$. Lewa strona powyższego wyrażenia jest symetryczna względem x i y, z więc jego prawa strona też ma taką własność. Zatem

$$\begin{aligned} g(y + a^{2^{n+1}}x) + g(a^{2^n}x) - g(y) - a^{2^n}g(a^{2^n}x) + a^{2^n}g(y) = \\ = g(x + a^{2^{n+1}}y) + g(a^{2^n}y) - g(x) - a^{2^n}g(a^{2^n}y) + a^{2^n}g(x) \end{aligned} \tag{2.20}$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$. Ponieważ $a \in J_g$ i zbiór J_g jest zamknięty ze względu na mnożenie, więc $a^{2^n} \in J_g$. Stąd i z równości (2.20) wynika, że

$$\begin{aligned} &g(x + a^{2^{n+1}}y) - g(y + a^{2^{n+1}}x) = \\ &\quad = a^{2^n}g(x) - g(y) - a^{2^{n+1}}g(x) + a^{2^n}g(y) - a^{2^n}g(y) + g(x) + \\ &\qquad + a^{2^{n+1}}g(y) - a^{2^n}g(x) = \\ &\quad = (1 - a^{2^{n+1}})(g(x) - g(y)) \end{aligned}$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$. Kończy to dowód wzoru (2.19).

Ustalmy dowolną liczbę $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Podstawiając $y = -a^{2^n}x$ w równości (2.19) otrzymujemy warunek $g(x - a^{2^{n+1}}x) = (1 - a^{2^n})(g(x) + a^{2^n}g(x))$, a więc $g((1 - a^{2^{n+1}})x) = (1 - a^{2^n})(1 + a^{2^n})g(x) = (1 - a^{2^{n+1}})g(x)$ dla każdego elementu $x \in \mathbb{R}$. Zatem $1 - a^{2^{n+1}} \in J_g$. Ponadto $1 - a \in J_g$, a więc $\{1 - a^{2^n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset J_g$. Stąd $1 + a^{2^n} = (1 - a^{2^{n+1}})/(1 - a^{2^n}) \in J_g$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ponieważ zbiór $J_g \backslash \{0\}$ jest zamknięty ze względu na dzielenie, więc $\frac{1+a^{2^n}}{1-a^{2^n}} \in J_g$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy punkt

$$x_n = \frac{1 + a^{2^n}}{1 - a^{2^n}} \operatorname{sgn}(1 - |a|). \tag{2.21}$$

Ponieważ $-J_g \subset J_g$, więc $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset J_g$. Ponadto $x_n \in (0, \infty)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Funkcja $\mathbb{R} \backslash \{1\} \ni t \mapsto \frac{1+t}{1-t}$ jest ściśle rosnąca na przedziałach $(-\infty, 1)$ i $(1, \infty)$. Zatem ciąg $(x_n : n \in \mathbb{N})$ jest ściśle malejący. Ponadto $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Niech $A = \{\ln x : x \in J_g \cap (0, \infty)\}$. Zbiór $(A,+)$ jest podgrupą grupy $(\mathbb{R},+)$. Przyjmijmy $y_n = \ln x_n$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$. Ciąg $(y_n : n \in \mathbb{N})$ jest ściśle malejący oraz $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Ponadto, oczywiście, $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$. Zatem 0 jest punktem skupienia zbioru A, skąd wynika, że zbiór A jest gęsty w $\mathbb{R}$. Funkcja g jest różnowartościowa i $g(0) = 0$, a więc $g(x) \neq 0$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Przyjmijmy $g_1 = g/g(1)$. Oczywiście $J_{g_1} = J_g$. Zdefiniujmy funkcję $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $h(x) = \ln|g_1(\mathrm{e}^x)|$. Wykażemy, że funkcja h spełnia warunek (2.9) dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i $z \in A$. Ustalmy dowolne punkty $x \in \mathbb{R}$ i $z \in A$. Istnieje taki element $t \in J_g \cap (0, \infty)$, że $z = \ln t$. Stąd

$$\begin{aligned} h(x + z) = h(x + \ln t) = \ln|g_1(\mathrm{e}^{x+\ln t})| = \ln|g_1(t\mathrm{e}^x)| = \ln|tg_1(\mathrm{e}^x)| = \\ = \ln(t|g_1(\mathrm{e}^x)|) = \ln|g_1(\mathrm{e}^x)| + \ln t = h(x) + h(z). \end{aligned}$$

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem, w którym funkcja f ma skończoną i różną od $f(0)$ granicę. Funkcja g ma skończoną i różną od zera granicę w punkcie x_0. Przyjmijmy $y_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Pokażemy, że $x_0 \neq 0$. Przypuśćmy nie wprost, że $x_0 = 0$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy punkt $z_n = |a|^{n\operatorname{sgn}(1-|a|)}$. Zauważmy, że $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ oraz $z_n \in J_g\backslash\{0\}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = y_0$, a więc $y_0 = \lim_{n\to\infty} z_n g(1) = 0$, co przeczy założeniu.

Z nieparzystości funkcji g wynika, że funkcja g ma skończoną i różną od zera granicę w punkcie $|x_0|$. Stąd i z niezerowości punktu x_0 wynika, że funkcja h ma skończoną granicę w punkcie $\ln|x_0|$. Zatem, na mocy twierdzenia 2.9, funkcja h jest addytywna. Ponieważ funkcja h ma skończoną granicę w pewnym punkcie, więc jest ograniczona na pewnym niepustym zbiorze otwartym. Korzystając ponownie z twierdzenia Bernsteina-Doetscha wnioskujemy, że funkcja h jest ciągła. Zatem istnieje taka liczba $s \in \mathbb{R}$, że $h(x) = sx$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd $|g_1(\mathrm{e}^x)| = \mathrm{e}^{sx} = (\mathrm{e}^x)^s$, a więc $|g_1(x)| = x^s$ dla $x \in (0, \infty)$. Przyjmując $b = |g(1)|$ widzimy, że $b > 0$ oraz $|g(x)| = bx^s$ dla każdego $x \in (0, \infty)$. Z nieparzystości funkcji g wynika, że dla każdego $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ zachodzi równość

$$|g(x)| = b|x|^s. \tag{2.22}$$

Z warunków (2.16) i (2.22) otrzymujemy równości

$$|a||x| = |ax| = |g^2(x)| = b|g(x)|^s = b^{s+1}|x|^{s^2}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Stąd

$$b^{s+1} = |a| \tag{2.23}$$

oraz $s \in \{-1, 1\}$. Ponieważ $a \notin \{-1, 1\}$, więc z warunku (2.23) wynika, że $s \neq -1$. Zatem $s = 1$ i korzystając ponownie z warunku (2.23) dostajemy równość $b^2 = |a|$. W szczególności $b \notin \{-1, 1\}$. Ponadto, z równości (2.22) wynika, że $|g(x)| = b|x|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd

$$g(x) \in \{-bx, bx\} \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}. \tag{2.24}$$

Korzystając z oznaczeń ze wstępu możemy zapisać powyższy warunek jako $A_g(b) \cup A_g(-b) = \mathbb{R}$. Z nieparzystości funkcji g wynika, że $-A_g(b) = A_g(b)$ oraz $A_g(-b) = -A_g(-b)$.

Z warunku (2.24) wynika istnienie takiej liczby $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, że $\lim_{x\to x_0} g(x) = \varepsilon b x_0$. Ponieważ $x_0 \neq 0$, więc, korzystając ponownie z warunku (2.24), stwierdzamy, że istnieje liczba $\delta > 0$ o własności $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\} \subset A_g(\varepsilon b)$.

Wykażemy, że $g(x_0) = \varepsilon b x_0$. Ciąg $(x_n : n \in \mathbb{N})$ (określony równością (2.21)) jest ściśle malejący i zbieżny do 1, a zatem $(x_0 x_n : n \in \mathbb{N})$ jest ciągiem o elementach różnych od x_0, zbieżnym do punktu x_0. Stąd $\lim_{n\to\infty} g(x_0 x_n) = \varepsilon b x_0$. Z drugiej strony, $\lim_{n\to\infty} g(x_0 x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n g(x_0)) = g(x_0)\lim_{n\to\infty} x_n = g(x_0)$. Zatem $g(x_0) = \varepsilon b x_0$.

Niech r będzie liczbą dodatnią mniejszą od $\min\{|x_0|, \delta/|a|, |a||x_0|\}$. Ustalmy dowolny punkt $y \in (0, r)$. Oczywiście $y \notin \{-x_0, x_0\}$. Ponieważ $|ay| = |a|y < |a|\frac{\delta}{|a|} = \delta$ i $ay \neq 0$, więc

$$x_0 + ay \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\} \subset A_g(\varepsilon b).$$

Stosując równość (2.19) dla $n = 0$, $x = x_0$ i ustalonego powyżej punktu y otrzymujemy warunek

$$\varepsilon b(x_0 + ay) = g(y + ax_0) + (1 - a)(\varepsilon b x_0 - g(y)),$$

skąd wynika, że

$$g(y + ax_0) = a\varepsilon b(y + x_0) + (1 - a)g(y). \tag{2.25}$$

Wykażemy teraz, że $y+ax_0 \in A_g(\varepsilon b)$. Przypuśćmy nie wprost, że $y+ax_0 \notin A_g(\varepsilon b)$. Wtedy z warunku (2.24) wynika, że $y + ax_0 \in A_g(-\varepsilon b)$. Stąd, na mocy równości (2.25), otrzymujemy warunek

$$-\varepsilon(y + ax_0) = a\varepsilon by + a\varepsilon bx_0 + (1 - a)g(y),$$

a zatem

$$(1 - a)g(y) = -\varepsilon b(y + ay + 2ax_0). \tag{2.26}$$

Załóżmy najpierw, że $y \in A_g(\varepsilon b)$. Wtedy z warunku (2.26) wynika, że $(1 - a)\varepsilon by = -\varepsilon by - a\varepsilon by - 2a\varepsilon bx_0$, a stąd $2\varepsilon by = -2a\varepsilon bx_0$. Zatem $y = -ax_0$. Stąd $|y| = |-ax_0| = |x_0||a| > r$, co jest niemożliwe.

Załóżmy teraz, że $y \in A_g(-\varepsilon b)$. Korzystając ponownie z warunku (2.26) otrzymujemy równość $-(1 - a)\varepsilon by = -\varepsilon by - \varepsilon bay - 2a\varepsilon bx_0$, a zatem $2a\varepsilon by = -2a\varepsilon bx_0$. Stąd $y = -x_0$, a zatem $|y| = |x_0| > r$. Ponownie otrzymujemy sprzeczność. Zatem $y + ax_0 \in A_g(\varepsilon b)$.

Korzystając z równości (2.25) otrzymujemy warunek $\varepsilon by+a\varepsilon bx_0 = a\varepsilon by+a\varepsilon bx_0+ (1 - a)g(y)$. Stąd $(1 - a)(g(y) - \varepsilon by) = 0$. Ponieważ $a \neq 1$, więc $g(y) = \varepsilon by$. Przyjmując $c = \varepsilon b$ otrzymujemy warunek $g(x) = cx$ dla każdego $x \in (0, r)$. Niech $t = \max\{|a|, 1/|a|\}$. Ponieważ $a \in J_g$, więc $|a|, 1/|a| \in J_g \cap (0, \infty)$ i wobec tego $t \in J_g$. Ponadto $|a| \neq 1$, a zatem $t > 1$. Ustalmy dowolny punkt $x \geq r$. Istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że $x/t^n \in (0, r)$. Stąd

$$g(x) = g(t^n \frac{x}{t^n}) = t^n g(\frac{x}{t^n}) = t^n c\frac{x}{t^n} = cx.$$

Zatem $g(x) = cx$ dla każdego $x \in [0, \infty)$. Stąd i z nieparzystości funkcji g wynika, że $g(x) = cx$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Przyjmując $d = f(0)$ widzimy, że $f(x) = cx + d$ dla każdego punktu $x \in \mathbb{R}$. Kończy to dowód twierdzenia. □

Z twierdzenia 2.11 wyprowadzamy następujący wniosek.

Wniosek 2.12 *Niech* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie taką funkcją, że funkcja* $f - f(0)$ *jest nieparzysta. Załóżmy, że funkcja* f^2 *jest niestała, różna od* $\mathrm{id} + f^2(0)$ *i ciągła. Załóżmy ponadto, że funkcja* f *jest ciągła w pewnym niezerowym punkcie. Jeśli funkcja* f *spełnia równanie* (2.1)*, to istnieją takie liczby* $c \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$ *i* $d \in \mathbb{R}$*, że* f *jest postaci* (2.15)*.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (2.1). Niech $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ będzie punktem ciągłości funkcji f. Na podstawie wniosku 2.8 funkcja f jest różnowartościowa. Zatem $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \neq f(0)$. Korzystając z twierdzenia 2.11 otrzymujemy tezę wniosku. $\square$

Łatwo obliczyć, że druga iterata każdej ciągłej funkcji afinicznej $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją rosnącą. Stąd i z wniosku 2.12 wynika poniższy wynik.

Wniosek 2.13 *Niech* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie taką funkcją, że funkcja* $f - f(0)$ *jest nieparzysta. Załóżmy, że funkcja* f^2 *jest ciągła i ściśle malejąca. Jesli funkcja* f *spełnia równanie* (2.1)*, to* f *nie jest ciągła w żadnym niezerowym punkcie.*

Rozdział 3

Równanie Cuculière

W tym rozdziale przedstawimy wyniki dotyczące równań

$$f(x + f(y)) = f^k(x) + f(y) \tag{3.1}$$

(gdzie k jest ustaloną liczbą naturalną), oraz

$$f(x + f(y)) + f(y + f(x)) = f^2(x) + f(y) + f^2(y) + f(x). \tag{3.2}$$

Powyższe równania są uogólnieniem równania funkcyjnego

$$f(x + f(y)) = f^2(x) + f(y). \tag{3.3}$$

Problem znalezienia wszystkich rosnących ciągów o wyrazach naturalnych spełniających równanie (3.3) został postawiony na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej (Indie, 1996). Następnie Roger Cuculière w czasopiśmie American Mathematical Monthly [12] postawił problem rozwiązania równania (3.3) w klasie funkcji rosnących $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rozwiązanie tego problemu zostało podane przez R. Stonga (zob. [36]) oraz przez R. Gera, który w pracy [16] wyznaczył wszystkie mierzalne w sensie Lebesgue'a rozwiązania $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ równania (3.3). R. Ger znalazł także wszystkie rozwiązania równania (3.3) przekształcające dowolną grupę abelową w siebie (zob. [16]). W klasie funkcji odwzorowujących półgrupę abelową w siebie równanie (3.2) jest uogólnieniem równania (2.3), a także okazuje się być związane z równaniem Brillouët–Belluot. Pierwszy paragraf tego rozdziału poświęcamy równaniu (3.1), natomiast w drugim przedstawimy wyniki dotyczące równania (3.2).

3.1 Uogólnione równanie Cuculière

W tym paragrafie przedstawimy wyniki dotyczące równania (3.1). Zaczynamy od następującego lematu 3.1, który w przypadku, gdy $k = 1$ i $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ został wykazany przez C. Heckmana, R. Gera i przez R. Stonga (zob. [36], [16]).

Lemat 3.1 *Niech S będzie lewostronnie skracalną półgrupą z zerem i niech $k \geq 2$. Załóżmy, że półgrupa S spełnia warunek*

$$(k-1)x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{dla każdego } x \in S. \tag{3.4}$$

Funkcja $f\colon S \to S$ spełnia równanie (3.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy $f^k = f^2 = f$ i funkcja f jest rozwiązaniem równania*

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y). \tag{3.5}$$

Dowód. Załóżmy, że f spełnia równanie (3.1). Podstawiając $x = 0$ w równości (3.1) otrzymujemy warunek

$$f^2(y) = f^k(0) + f(y) \tag{3.6}$$

dla wszystkich $y \in S$. Stosując powyższy warunek dla punktu $y = f^{k-2}(0)$ otrzymujemy równość $f^k(0) = f^k(0) + f^{k-1}(0)$, a stąd i ze skracalności działania w S wynika, że

$$f^{k-1}(0) = 0. \tag{3.7}$$

Podstawiając $y = f^{k-2}(0)$ w równości (3.1) otrzymujemy $f(x) = f^k(x)$ dla każdego $x \in S$. Stąd i z równości (3.1) wynika, że funkcja f spełnia równanie (3.5). Ponadto, z warunku (3.6) wynika równość $f^2(x) = f(0) + f(x)$ dla każdego $x \in S$. Łatwo zauważyć, że z ostatniego warunku, przy pomocy indukcji można uzyskać równość $f^n(x) = (n-1)f(0) + f(x)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $x \in S$. Stosując ją dla $n = k-1$ i $x = 0$ otrzymujemy $f^{k-1}(0) = (k-2)f(0) + f(0) = (k-1)f(0)$. Stąd i równości (3.7) wynika, że $(k-1)f(0) = 0$. Ponieważ półgrupa S spełnia warunek (3.4), więc $f(0) = 0$. Zatem $f^k(0) = 0$ i korzystając z równości (3.6) dostajemy warunek $f^2 = f$. W szczególności $f^k = f$. Dowód przeciwnej implikacji jest oczywisty. □

Uwaga 3.2 Warunek (3.4) jest istotny w lemacie 3.1. Niech S będzie skracalną abelową półgrupą z zerem. Załóżmy, że istnieje punkt $x_0 \in S\backslash\{0\}$ spełniający równość $(k-1)x_0 = 0$. Określmy funkcję $f\colon S \to S$ wzorem $f(x) = x + x_0$. Funkcja f spełnia równania $f^k = f$ oraz (3.1), ale $f^2(x) \neq f(x)$ dla każdego $x \in S$. W szczególności $f^2 \neq f$.

Poniższe trzy rezultaty przedstawiają ogólne własności rozwiązań równania (3.1).

Uwaga 3.3 *Niech S będzie półgrupą i niech $f\colon S \to S$ będzie rozwiązaniem równania* (3.1). *Wtedy dla każdej liczby $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ spełniony jest warunek*

$$f^n(x + f(y)) = f^{kn}(x) + f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in S. \tag{3.8}$$

Dowód. Wzór (3.8) dowodzimy indukcyjnie. Oczywiście wzór ten zachodzi dla $n = 0$. Funkcja f spełnia równanie (3.1), a zatem warunek (3.8) jest spełniony także dla $n = 1$. Ustalmy teraz dowolną liczbę $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że warunek (3.8) zachodzi dla liczby n. Ustalmy dowolne punkty $x, y \in S$. Korzystając z równości (3.1) i z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x + f(y)) = f^n(f(x + f(y))) = f^n(f^k(x) + f(y)) = f^{kn}(f^k(x)) + f(y) = \\ = f^{k(n+1)}(x) + f(y). \end{aligned}$$

Zatem warunek (3.8) jest spełniony dla liczby $n + 1$, co kończy dowód. □

Lemat 3.4 *Niech S będzie półgrupą i niech $f\colon S \to S$ będzie rozwiązaniem równania* (3.1)*. Wtedy funkcja f spełnia równość*

$$f^{k^2}(x) + f^k(y) + f(z) = f^k(x) + f^k(y) + f(z) \tag{3.9}$$

dla wszystkich $x, y, z \in S$. W szczególności, jeśli półgrupa S jest prawostronnie skracalna, to $f^{k^2} = f^k$ oraz dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ spełnione jest równanie

$$f(x + f(y_1) + \cdots + f(y_n)) = f^k(x) + f(y_1) + \cdots + f(y_n). \tag{3.10}$$

Dowód. Ustalmy dowolne punkty $x, y, z \in S$. Korzystając z równości (3.1) otrzymujemy

$$f(x+f^k(y)+f(z)) = f(x+f(y+f(z))) = f^k(x)+f(y+f(z)) = f^k(x)+f^k(y)+f(z).$$

Z drugiej strony, z uwagi 3.3 wynika, że zachodzą równości

$$f(x + f^k(y) + f(z)) = f^k(x + f^k(y)) + f(z) = f^{k^2}(x) + f^k(y) + f(z). \tag{3.11}$$

Porównując wynik obydwu obliczeń widzimy, że wzór (3.9) zachodzi dla wszystkich $x, y, z \in S$.

Załóżmy teraz, że półgrupa S jest prawostronnie skracalna. Korzystając ze wzoru (3.9) otrzymujemy równość $f^{k^2} = f^k$. Udowodnimy teraz indukcyjnie trzecią tezę lematu. Z równości (3.1) wynika, że warunek (3.10) zachodzi dla $n = 1$ i dla wszystkich $x, y \in S$. Ustalmy teraz dowolną liczbę naturalną n i załóżmy, że warunek (3.10) zachodzi dla wszystkich $x, y_1, \ldots, y_n \in S$. Ustalmy dowolne punkty $x, y_1, \ldots, y_{n+1} \in S$. Korzystając z założenia indukcyjnego dla $x + f(y_1), y_2, \ldots, y_{n+1}$ otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} f(x + f(y_1) + \cdots + f(y_{n+1})) &= f^k(x + f(y_1)) + f(y_2) + \cdots + f(y_{n+1}) = \\ &= f^{k^2}(x) + f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_{n+1}) = \\ &= f^k(x) + f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n). \end{aligned}$$

Kończy to dowód wzoru (3.10). □

Wniosek 3.5 *Niech S będzie skracalną półgrupą abelową i niech $f\colon S \to S$ będzie rozwiązaniem równania* (3.1). *Wtedy funkcja f spełnia równania*

$$f^{k^2-k+1} = f \tag{3.12}$$

oraz

$$f^{k-1}(f(x) + f(y)) = f(x) + f(y). \tag{3.13}$$

W szczególności $f(S) + f(S) \subset f(S)$.

Dowód. Z lematu 3.4 wynika, że funkcja f spełnia równanie $f^{k^2} = f^k$. Korzystając z uwagi 3.3 dla $n = k - 1$ otrzymujemy równość

$$f^{k-1}(f(x) + f(y)) = f^{k^2-k}(f(x)) + f(y) = f^{k^2-k+1}(x) + f(y) \tag{3.14}$$

dla wszystkich $x, y \in S$. Lewa strona powyższej równości jest symetryczna względem zmiennych x i y, a więc taką własność ma także jej prawa strona. Stąd wynika, że dla wszystkich $x, y \in S$ zachodzi równość

$$f^{k^2-k+1}(x) + f(y) = f^{k^2-k+1}(y) + f(x). \tag{3.15}$$

Podstawiając $f^k(y)$ w miejsce y w równości (3.15) i uwzględniając równość $f^{k^2} = f^k$ otrzymujemy warunek

$$f^{k^2-k+1}(x) + f^{k+1}(y) = f^{k^2+1}(y) + f(x) = f^{k+1}(y) + f(x)$$

dla wszystkich $x, y \in S$. Zatem, na mocy skracalności działania w półgrupie S, równość (3.12) zachodzi. Stąd i z równości (3.14) wynika, że warunek (3.13) jest spełniony dla wszystkich $x, y \in S$. Wykażemy teraz, że $f(S) + f(S) \subset f(S)$. Jeśli $k = 1$, to powyższa inkluzja wynika z równania (3.1). Jeśli natomiast $k \geq 2$, to z warunku (3.13) wynika, że $f(S) + f(S) \subset f^{k-1}(S) \subset f(S)$. Kończy to dowód wniosku. □

Zajmiemy się teraz rozwiązaniami równania (3.1) przekształcającymi podpółgrupę grupy abelowej w siebie. W tej sytuacji nie możemy oczywiście stosować metody rozumowania występującej w dowodzie lematu 3.1, ponieważ do dziedziny funkcji f nie musi należeć zero. Przekonamy się jednak, że przy odpowiednich założeniach dotyczących dziedziny funkcji f można wykazać tezę lematu 3.1.

Lemat 3.6 *Niech G będzie grupą abelową i niech $S \subset G$ będzie podpółgrupą grupy G. Załóżmy, że $0 \notin S$ i $k \geq 2$. Jeśli funkcja $f\colon S \to S$ spełnia równanie* (3.1), *to $f^m(x) - f^n(x) \in G \backslash (S \cup (-S))$ dla każdego $x \in S$ i dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (3.1).

Wykażemy najpierw, że jeśli $m, n \in \mathbb{N}$ i $m < n$, to $f^m(x) - f^n(x) \notin S$ dla każdego $x \in S$. Ustalmy dowolne liczby $m, n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $m < n$. Ustalmy dowolny punkt $x \in S$. Przypuśćmy nie wprost, że $f^m(x) - f^n(x) \in S$. Z uwagi 3.3 wynika, że

$$f^n(x) = f^{n-m}(f^m(x) - f^n(x) + f^n(x)) = f^{(n-m)k}(f^m(x) - f^n(x)) + f^n(x),$$

a zatem $f^{(n-m)k}(f^m(x) - f^n(x)) = 0$. Stąd wynika, że $0 \in S$, co przeczy założeniu. Zatem $f^m(x) - f^n(x) \notin S$.

Wykażemy teraz, że dla wszystkich liczb $m, n \in \mathbb{N}$ spełniających nierówność $m < n$ i dla każdego $x \in S$ zachodzi warunek $f^m(x) - f^n(x) \notin -S$. Ustalmy $m, n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $m < n$. Ustalmy dowolny punkt $x \in S$. Ponieważ $k \geq 2$, więc $k^2 - k + 1 \geq 3$, a zatem istnieje taka liczba $p \in \mathbb{N}$, że $n < (k^2 - k + 1)^p m$. Z pierwszej części dowodu wynika, że

$$f^n(x) - f^{(k^2-k+1)^p m}(x) \notin S. \tag{3.16}$$

Na podstawie wniosku 3.5 zachodzi równość $f^{k^2-k+1} = f$. Zatem $f^{(k^2-k+1)^p} = f$, a więc $f^{(k^2-k+1)^p m} = f^m$. Stąd i z warunku (3.16) wynika, że $f^n(x) - f^m(x) \notin S$, a zatem $f^m(x) - f^n(x) \notin -S$.

Ustalmy wreszcie różne liczby $m, n \in \mathbb{N}$ i dowolny punkt $x \in S$. Możemy założyć, że $m < n$. Z poprzednich części dowodu wynika, że $f^m(x) - f^n(x) \notin S \cup (-S)$. Zatem zachodzi także warunek $f^n(x) - f^m(x) \notin S \cup (-S)$. Ponieważ $0 \notin S \cup (-S)$, więc teza lematu jest oczywista w przypadku, gdy $m = n$. Kończy to dowód. □

Korzystając z lematu 3.6 możemy wykazać poniższe twierdzenie, przenoszące wynik sformułowany w lemacie 3.1 na przypadek funkcji, do dziedziny których nie należy zero.

Twierdzenie 3.7 *Niech G będzie grupą abelową i niech S będzie taką podpółgrupą grupy G, że $S \cup (-S) = G\backslash\{0\}$. Załóżmy, że $k \geq 2$. Funkcja $f\colon S \to S$ spełnia równanie* (3.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy $f^k = f^2 = f$ i funkcja f jest rozwiązaniem równania* (3.5).

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (3.1). Ponieważ $S \subset G\backslash\{0\}$, więc $0 \notin S$. Korzystając z lematu 3.6 dla liczb $m = 1$ oraz $n = 2$ otrzymujemy warunek $f(x) - f^2(x) \in G\backslash(S \cup (-S)) = \{0\}$ dla każdego $x \in S$. Zatem $f^2(x) = f(x)$ dla każdego $x \in S$, a więc $f^2 = f$. Stąd $f^k = f$ i z równości (3.1) wynika, że funkcja f spełnia równanie (3.5). Przeciwna implikacja jest oczywista. □

Uwaga 3.8 Założenie $S \cup (-S) = G\backslash\{0\}$ jest istotne w twierdzeniu 3.7. Ustalmy dowolną liczbę $a > 0$ i przyjmijmy $G = \mathbb{R}$ oraz $S = (a, \infty)$. Niech $f\colon (a, \infty) \to (a, \infty)$ będzie funkcją daną wzorem $f(x) = 3a - x$, gdy $x \in (a, 2a)$, oraz $f(x) = x$, gdy $x \in [2a, \infty)$. Dla wszystkich $x, y \in (a, \infty)$ zachodzą równości $f^2(x) = x$ i $f(x + y) = x + y$. Zatem funkcja f jest rozwiązaniem równania (3.3). Jednocześnie $f^2 \neq f$, a zatem funkcja f nie spełnia równania (2.3).

Przytoczymy teraz definicję podniesienia względem podgrupy. Niech G będzie grupą abelową i niech H będzie podgrupą grupy G. Oznaczmy przez π epimorfizm kanoniczny względem podgrupy H. Funkcję $\xi\colon G/H \to G$ nazywamy *podniesieniem względem H*, gdy $\pi \circ \xi = \mathrm{id}$.

Poniższy fakt przedstawia ogólne rozwiązanie równania (3.5) w klasie odwzorowań dowolnej grupy abelowej w siebie (zob. [1, Proposition 11]).

Twierdzenie AD *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$. Funkcja f spełnia równanie* (3.5) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podgrupa H grupy G i takie podniesienie $\xi\colon G/H \to G$, że*

$$f(x) = x - \xi(\pi(x)) \quad \text{dla każdego } x \in G. \tag{3.17}$$

Korzystając z lematu 3.1 i twierdzenia AD możemy udowodnić następujący rezultat.

Twierdzenie 3.9 *Niech G będzie grupą abelową i niech $k \geq 2$. Załóżmy, że spełniony jest warunek* (3.4). *Funkcja $f\colon G \to G$ spełnia równanie* (3.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podgrupa H grupy G i takie podniesienie $\xi\colon G/H \to G$, że $\xi(0) = 0$ oraz spełniony jest warunek* (3.17).

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (3.1). Korzystając z lematu 3.1 stwierdzamy, że funkcja f spełnia równanie (3.5) i warunek $f^2 = f$. Stąd na mocy twierdzenia AD wynika postać funkcji f. Stosując równość (3.5) dla $x = y = 0$ dostajemy $f^2(0) = 2f(0)$, a zatem $f(0) = 2f(0)$, skąd $f(0) = 0$. Stąd i z warunku (3.17) otrzymujemy równość $\xi(0) = -f(0) = 0$.

Załóżmy teraz, że spełniona jest prawa strona równoważności w tezie twierdzenia. Z twierdzenia AD wynika, że funkcja f spełnia równanie (3.5). Ponadto, z warunku (3.17) wynika równość $f(0) = -\xi(0) = 0$. Stosując warunek (3.5) dla $x = 0$ widzimy, że $f^2(y) = f(y)$ dla każdego $y \in G$. Stąd $f^2 = f$, a zatem $f^k = f$. Stąd i z równości (3.5) wynika, że funkcja f spełnia równanie (3.1). □

Kolejne rezultaty dotyczą regularnych rozwiązań równania (3.1).

Lemat 3.10 *Niech S będzie skracalną abelową półgrupą topologiczną z zerem, i niech A będzie podpółgrupą półgrupy S. Załóżmy, że każde otoczenie zera w S jest zbiorem pochłaniającym. Niech $f\colon A \to A$ będzie taką funkcją, że zbiór $f(A)$ ma niepuste wnętrze. Funkcja f spełnia równanie* (3.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki element $c \in f(A)$, że dla wszystkich $x, y \in A$ spełnione są warunki*

$$f^k(x) + c = x + f^k(c) \tag{3.18}$$

oraz

$$f(x + f(y)) + c = x + f^k(c) + f(y). \tag{3.19}$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że funkcja f spełnia warunki (3.18) i (3.19) dla pewnego $c \in f(A)$. Wtedy dla wszystkich $x, y \in A$ zachodzą równości

$$f(x + f(y)) + c = x + f^k(c) + f(y) = f^k(x) + c + f(y).$$

Ponieważ półgrupa S jest abelowa i skracalna, więc z ostatniej równości wynika, że funkcja f spełnia równanie (3.1).

Załóżmy teraz, że funkcja f spełnia równanie (3.1). Z wniosku 3.5 wynika, że zbiór $f(A)$ jest podpółgrupą półgrupy S. Ustalmy dowolny punkt $y_0 \in \mathrm{int} f(A)$. Istnieje takie otoczenie zera $U_0 \subset S$, że $y_0 + U_0 \subset f(A)$. Ustalmy dowolny punkt $x \in A$. Istnieje taka liczba naturalna n, że $x \in nU_0$. Stąd wynika, że

$$ny_0 + x \in ny_0 + nU_0 = n(y_0 + U_0) \subset nf(A) \subset f(A).$$

Niech $t \in A$ będzie takim punktem, że $x + ny_0 = f(t)$. Ustalmy dowolny element $z \in A$. Ponieważ $y_0 \in f(A)$, więc $ny_0 \in f(A)$ i $ny_0 + f(z) \in f(A)$. Zatem istnieje taki punkt $s \in A$, że $ny_0 + f(z) = f(s)$. Z równości (3.1) wynika, że

$$\begin{aligned} f(x + ny_0 + f(z)) &= f(f(t) + f(z)) = f(f(z) + f(t)) = f^{k+1}(z) + f(t) = \\ &= f^{k+1}(z) + x + ny_0 \end{aligned}$$

oraz

$$f(x + ny_0 + f(z)) = f(x + f(s)) = f^k(x) + f(s) = f^k(x) + ny_0 + f(z).$$

Z dwóch ostatnich równości wynika, że funkcja f spełnia warunek

$$f^{k+1}(z) + x = f(z) + f^k(x) \tag{3.20}$$

dla wszystkich $x, z \in A$. Przyjmując $c = f(z)$ widzimy, że $c \in f(A)$ i warunek (3.18) zachodzi dla wszystkich $x \in A$. Korzystając z równości (3.1) i (3.18) otrzymujemy

$$f(x + f(y)) + c = f^k(x) + f(y) + c = f^k(x) + c + f(y) = x + f^k(c) + f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in A$. Kończy to dowód. □

Korzystając z lematu 3.10 udowodnimy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.11 *Niech* $(G,+)$ *będzie abelową grupą topologiczną bez niezerowych elementów skończonego rzędu. Załóżmy, że każde otoczenie zera w G jest zbiorem pochłaniającym. Niech A będzie podpółgrupą grupy G i niech $f\colon A \to A$ będzie taką funkcją, że zbiór $f(A)$ ma niepuste wnętrze. Funkcja f spełnia równanie* (3.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:*
(a) $k = 1$ *i istnieje taki punkt $b \in G$, że $A + b \subset A$ i $f(x) = x + b$ dla każdego $x \in A$;*
(b) $k \geq 2$, $f^k = \mathrm{id}$ *i funkcja f spełnia warunek $f(x + y) = x + y$ dla wszystkich $x, y \in A$.*

Dowód. Łatwo zauważyć, że jeśli funkcja f spełnia warunek (a) lub (b), to jest rozwiązaniem równania (3.1). Załóżmy więc, że funkcja f spełnia równanie (3.1). Na mocy lematu 3.10 istnieje taki element $c \in f(A)$, że spełnione są warunki (3.18) i (3.19). Przyjmijmy $b = f^k(c) - c$. Z równości (3.18) i (3.19) wynika, że dla wszystkich $x, y \in A$ zachodzą warunki

$$f^k(x) = x + b \tag{3.21}$$

oraz

$$f(x + f(y)) = x + f(y) + b. \tag{3.22}$$

Ze wzoru (3.21) wynika, że $A + b \subset f^k(A) \subset A$. Ponadto, $f^{km}(x) = (f^k)^m(x) = x + mb$ dla wszystkich punktów $x \in A$ i liczb $m \in \mathbb{N}$. Stąd i z uwagi 3.3 wynika, że dla wszystkich $x, y \in A$ i $m \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$f^m(x + f(y)) = f^{km}(x) + f(y) = x + mb + f(y).$$

W szczególności $f^k(x + f(y)) = x + kb + f(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$. Stąd i ze wzoru (3.21) otrzymujemy równość $x + f(y) + b = x + kb + f(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$. Zatem

$$(k - 1)b = 0. \tag{3.23}$$

Załóżmy najpierw, że $k = 1$. Wtedy z warunku (3.21) otrzymujemy równość $f(x) = x+b$ dla wszystkich $x \in A$. Zatem funkcja f ma żądaną postać. Załóżmy teraz, że $k \geq 2$. Wtedy z warunku (3.23) wynika równość $b = 0$. Stąd i ze wzoru (3.21) wynika, że $f^k = \mathrm{id}$. Podstawiając $f^{k-1}(y)$ w miejscu y w równości (3.22) otrzymujemy warunek $f(x + y) = x + y$ dla wszystkich $x, y \in A$. Kończy to dowód twierdzenia. $\square$

Z twierdzenia 3.11 wyprowadzamy następujący wniosek, dotyczący ciągłych rozwiązań równania (3.1).

Wniosek 3.12 *Niech $P = \mathbb{R}$ lub P będzie półprostą nie zawierającą zera we wnętrzu i niech $f\colon P \to P$ będzie funkcją ciągłą. Funkcja f spełnia równanie* (3.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy $f = 0$ lub spełniony jest jeden z następujących warunków:*
(a) *$k = 1$ i istnieje taka liczba $b \in \mathbb{R}$, że $P+b \subset P$ i $f(x) = x+b$ dla każdego $x \in P$;*
(b) *$k \geq 2$ i $f(x) = x$ dla każdego $x \in P$.*

Dowód. Z twierdzenia 3.11 wynika, że funkcje zdefiniowane w punktach (a) i (b) są rozwiązaniami równania (3.1). Załóżmy więc, że funkcja f spełnia równanie (3.1). Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy f jest stała. Wtedy istnieje taka liczba $p \in \mathbb{R}$, że $f = p$. Stąd $f^k = p$ i z równości (3.1) wynika, że $p = 2p$, a więc $p = 0$. Zatem $f = 0$, a więc funkcja f ma jedną z żądanych postaci. Załóżmy teraz, że funkcja f jest niestała. Wtedy z ciągłości funkcji f wynika, że zbiór $f(P)$ jest przedziałem o niepustym wnętrzu. Jeśli $k = 1$, to korzystając z twierdzenia 3.11 otrzymujemy odpowiednią postać funkcji f. Załóżmy teraz, że $k \geq 2$. Z twierdzenia 3.11 wynika, że $f^k = \mathrm{id}$ i $P + P \subset \mathrm{Fix} f$. W szczególności, funkcja f jest ciągłym pierwiastkiem iteracyjnym stopnia k z identyczności, a stąd na mocy twierdzenia McShane'a–Vinczego (zob. [20], Theorem 15.2) wynika, że $f(x) = x$ dla każdego $x \in P$ lub f jest malejącą inwolucją. Ponieważ $\mathrm{card}(P + P) > 1$ i $P + P \subset \mathrm{Fix} f$, więc $\mathrm{card}\mathrm{Fix} f > 1$, a zatem funkcja f nie może być malejąca. Wobec tego $f(x) = x$ dla każdego $x \in P$. $\square$

Uwaga 3.13 Niech f będzie funkcją zdefiniowaną w uwadze 3.8. Funkcja f jest ciągła w każdym punkcie należącym do zbioru $(a, \infty)\backslash\{2a\}$ i spełnia równanie (3.3), chociaż $f \neq \mathrm{id}$. Zatem założenie ciągłości funkcji f jest istotne we wniosku 3.12 i nie może być zastąpione założeniem ciągłości f na całej dziedzinie poza jednym punktem.

3.2 Symetryczne równanie Cuculière

Przedstawimy teraz pewne wyniki dotyczące równania (3.2). Zaczniemy od dwóch przykładów ukazujących różnice pomiędzy równaniem (3.2), a równaniem (2.3).

Przykład 3.14 Niech $f\colon {\mathbb{Z}_2}^6 \to {\mathbb{Z}_2}^6$ będzie nieaddytywnym rozwiązaniem równania (1.1) (zob. przykład R1 w paragrafie 1.1). Wykażemy, że funkcja f jest rozwiązaniem równania (3.2) i nie spełnia równania (2.3). Ponieważ f spełnia równanie (1.1) i $f(0) = 0$, więc z uwagi 1.3 wynika, że funkcja f spełnia równanie (1.5). Na mocy twierdzenia 1.8 funkcja $2f$ jest addytywna. Zatem dla wszystkich $x, y \in {\mathbb{Z}_2}^6$ zachodzą równości

$$\begin{aligned} f(x + f(y)) + f(y + f(x)) &= -y + x + 2f(y + f(x)) = \\ &= -y + x + 2f(y) + 2f^2(x) = \\ &= f(x) + f(y) + f^2(x) + f^2(y). \end{aligned}$$

Stąd wynika, że funkcja f spełnia równanie (3.2).

Korzystając z wniosku 1.5 otrzymujemy równość $f^3 = -\mathrm{id}$. Zatem funkcja f jest bijekcją. W szczególności $f({\mathbb{Z}_2}^6) = {\mathbb{Z}_2}^6$. Zatem, gdyby funkcja f spełniała równanie (2.3), to byłaby addytywna, co jest nieprawdą. Wobec tego funkcja f nie spełnia równania (2.3).

Przykład 3.15 Niech S będzie abelową skracalną półgrupą z zerem. Załóżmy, że istnieje punkt $x_0 \in S\backslash\{0\}$ spełniający warunek $2x_0 = 0$. Ustalmy taki punkt i niech $a\colon S \to S$ będzie dowolną funkcją addytywną. Wykażemy, że funkcja $f = a + x_0$ jest rozwiązaniem równania (3.2) i nie spełnia równania (2.3). Dla dowolnych punktów $x, y \in S$ zachodzą równości

$$f^2(x) = a(f(x)) + x_0 = a(a(x) + x_0) + x_0 = a^2(x) + a(x_0) + x_0 \tag{3.24}$$

oraz

$$\begin{aligned} f(x + f(y)) &= a(x + f(y)) + x_0 = a(x) + a(f(y)) + x_0 = \\ &= a(x) + a(a(y) + x_0) + x_0 = a(x) + a^2(y) + a(x_0) + x_0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Zatem funkcja f spełnia równanie (3.2).

Ustalmy ponownie punkt $x \in S$. Z warunku (3.24) wynika, że $f(x) + f^2(x) = a(x) + a^2(x) + a(x_0) + 2x_0 = a(x) + a^2(x) + a(x_0)$. Ponadto $f(x + f(x)) = a(x) + a^2(x) + a(x_0) + x_0$. Ponieważ $x_0 \neq 0$, więc funkcja f nie jest adytywna na swoim wykresie. W szczególności funkcja f nie spełnia równania (2.3).

Dwie poniższe uwagi przedstawiają podstawowe własności rozwiązań równania (3.2).

Uwaga 3.16 *Niech G będzie grupą abelową bez elementów rzędu 2 i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (3.2). *Wtedy funkcja f jest addytywna na swoim wykresie. W szczególności $f(0) = 0$.*

Dowód. Podstawiając $y = x$ w równaniu (1) otrzymujemy

$$2f(x + f(x)) = 2f(x) + 2f^2(x) = 2(f(x) + f^2(x))$$

dla każdego $x \in G$, skąd wobec założenia o grupie G wynika addytywność funkcji f na swoim wykresie. W szczególności $f^2(0) = f(0) + f^2(0)$, a więc $f(0) = 0$. □

Uwaga 3.17 *Niech G będzie grupą abelową bez elementów rzędu 2 i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (3.2). *Wtedy* $\mathrm{Fix}f + \mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$.

Dowód. Ustalmy dowolne punkty $x, y \in \mathrm{Fix}f$. Korzystając z równości (3.2) otrzymujemy warunek

$$2f(x + y) = f(x + f(y)) + f(y + f(x)) = f(x) + f^2(y) + f(y) + f^2(x) = 2x + 2y,$$

skąd $f(x + y) = x + y$. Zatem $x + y \in \mathrm{Fix}f$, czego należało dowieść. □

Poniższe trzy lematy formułujemy w podwójnej wersji, jednak dowody przeprowadzamy wyłącznie dla przypadku funkcji przekształcających przestrzeń liniową w siebie. W przypadku, gdy funkcja odwzorowuje grupę w siebie, dowody są analogiczne. Zaczynamy od wykazania pewnych własności zbioru $A_f(c)$ (zob. wstęp) dla funkcji f addytywnych na swoim wykresie.

Lemat 3.18 *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ [grupą], $c \in \mathbb{K}$ $[c \in \mathbb{Z}]$ i niech $f\colon X \to X$ będzie funkcją addytywną na swoim wykresie. Jeśli $cA_f(c) \subset A_f(c)$, to $p^n A_f(c) \subset A_f(c)$ dla wszystkich liczb $p \in \{c, c + 1\}$ i $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Załóżmy, że $cA_f(c) \subset A_f(c)$. Stąd wynika, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi inkluzja $c^n A_f(c) \subset A_f(c)$. Wykażemy teraz, że $(c + 1)A_f(c) \subset A_f(c)$. Ustalmy dowolny punkt $x \in A_f(c)$. Wtedy $f(x) = cx$. Z założenia wynika, że $cx \in A_f(c)$, a więc $f(cx) = c^2x$. Ponieważ funkcja f jest addytywna na swoim wykresie, więc

$$f((c + 1)x) = f(x + f(x)) = f(x) + f^2(x) = cx + f(cx) = cx + c^2x = c(c + 1)x.$$

Stąd $(c + 1)x \in A_f(c)$. Zatem $(c + 1)A_f(c) \subset A_f(c)$, a więc dla wszystkich liczb $n \in \mathbb{N}$ zachodzi warunek $(c + 1)^n A_f(c) \subset A_f(c)$. Kończy to dowód. □

Lemat 3.19 *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ [grupą abelową bez niezerowych elementów skończonego rzędu] i niech $c \in \mathbb{K}$ [$c \in \mathbb{Z}$] oraz $f\colon X \to X$. Załóżmy, że $\max\{|c|, |c+1|\} > 1$ i $cA_f(c) \subset A_f(c)$. Załóżmy ponadto istnienie liczby $p \in \{c, c+1\}$ i takiego punktu $x_0 \in A_f(c)$, że dla każdego $y \in X$ istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ spełniająca warunki $y \in A_f(c) - cp^n x_0$ i $f(y) \in A_f(c) - p^n x_0$. Jeśli funkcja f spełnia równanie (3.2), to spełnia także równanie*

$$f^2(x) = (c-1)f(x) + cx. \tag{3.26}$$

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (3.2). Niech $p \in \{c, c+1\}$ i $x_0 \in X$ będą punktami spełniającymi warunek opisany w wypowiedzi lematu. Ustalmy dowolny element $y \in X$. Istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że $y \in A_f(c) - cp^n x_0$ i $f(y) \in A_f(c) - p^n x_0$. Na podstawie uwagi 3.16 funkcja f jest addytywna na swoim wykresie. Stąd i z lematu 3.18 wynika, że $p^n x_0 \in A_f(c)$. Zatem $cp^n x_0 \in cA_f(c) \subset A_f(c)$. Korzystając z równości (3.2) dla $x = p^n x_0$ otrzymujemy warunek

$$f(p^n x_0 + f(y)) + f(y + cp^n x_0) = cp^n x_0 + f^2(y) + f(y) + f(cp^n x_0).$$

Stąd

$$c(p^n x_0 + f(y)) + c(y + cp^n x_0) = cp^n x_0 + f^2(y) + f(y) + c^2 p^n x_0.$$

Zatem $f^2(y) = (c-1)f(y) + cy$, a więc funkcja f spełnia równanie (3.26). □

W kolejnym lemacie przedstawimy pewne własności rozwiązań równania (3.26).

Lemat 3.20 *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ [grupą], $c \in \mathbb{K}$ [$c \in \mathbb{Z}$] i niech $f\colon X \to X$ będzie rozwiązaniem równania (3.26). Wtedy $-A_f(-1) \subset A_f(-1)$. Załóżmy dodatkowo, że $f(0) = 0$ [$f(0) = 0$ oraz grupa G nie ma niezerowych elementów skończonego rzędu]. Jeśli $d \in \mathbb{K}\backslash\{-1, c\}$ [$d \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, c\}$] i $dA_f(d) \subset A_f(d)$, to $A_f(d) = \{0\}$.*

Dowód. Ustalmy dowolny punkt $x \in A_f(-1)$. Stosując warunek (3.26) otrzymujemy równość $f(-x) = (c-1)(-x) + cx = x$, to znaczy $-x \in A_f(-1)$. Zatem $-A_f(-1) \subset A_f(-1)$.

Załóżmy dodatkowo, że $f(0) = 0$. Ustalmy dowolną liczbę $d \in \mathbb{K}\backslash\{-1, c\}$ i załóżmy, że $dA_f(d) \subset A_f(d)$. Ponieważ $f(0) = 0$, więc $0 \in A_f(d)$. Ustalmy teraz dowolny punkt $x \in A_f(d)$. Z założenia wynika, że $dx \in A_f(d)$. Korzystając z warunku (3.26) otrzymujemy równość $f(dx) = (c-1)dx + cx$, a zatem $d^2x = (cd - d + c)x$. Stąd $(d-c)(d+1)x = 0$, a więc $x = 0$. Ostatecznie $A_f(d) = \{0\}$. □

Jeśli G jest grupą, a funkcja $f\colon G \to G$ jest rozwiązaniem równania (3.5), to zbiór $\mathrm{Fix}f$ jest podgrupą grupy G. Z przykładu 3.14 wynika, że nie jest to prawdą w przypadku rozwiązań równania (3.2) (dla $a = \mathrm{id}$ mamy $\mathrm{Fix}f = \emptyset$). Korzystając z lematu 3.19, możemy jednak udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.21 *Niech G będzie abelową grupą topologiczną bez niezerowych elementów rzędu skończonego, w której każde otoczenie zera jest zbiorem pochłaniającym. Niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania (3.2). Jeśli $\mathrm{intFix}f \neq \emptyset$, to $f = \mathrm{id}$.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathrm{intFix}f \neq \emptyset$. Ustalmy punkt $x_0 \in \mathrm{intFix}f$. Niech $U_0 \subset G$ będzie takim otoczeniem zera w G, że $x_0 + U_0 \subset \mathrm{Fix}f$. Przyjmijmy $W = x_0 + U_0$. Wykażemy, że spełnione są założenia lematu 3.19. Ustalmy punkt $y \in G$. Ponieważ U_0 jest zbiorem pochłaniającym, więc istnieją takie liczby $k, m \in \mathbb{N}$, że $y \in kU_0$ i $f(y) \in mU_0$. Niech n będzie taką liczbą naturalną, że $2^n > \max\{k, m\}$. Wtedy

$$2^n x_0 + y \in 2^n x_0 + kU_0 \subset 2^n x_0 + U_0 + \cdots + U_0 \quad (2^n \text{ razy}).$$

a zatem

$$2^n x_0 + y \in W + \cdots + W \quad (2^n \text{ razy}). \tag{3.27}$$

Z uwagi 3.17 wynika, że dla każdej liczby naturalnej r zbiór $\mathrm{Fix}f + \cdots + \mathrm{Fix}f$ (r razy) jest zawarty w $\mathrm{Fix}f$. Ponieważ $W \subset \mathrm{Fix}f$, więc z warunku (3.27) wynika, że $2^n x_0 + y \in \mathrm{Fix}f$. Podobnie można wykazać, że $2^n x_0 + f(y) \in \mathrm{Fix}f$. Korzystając z lematu 3.19 (dla $c = 1$ i $p = 2$) stwierdzamy, że funkcja f spełnia równanie (3.26). Zatem $f^2 = \mathrm{id}$. Równanie (3.2) przyjmuje teraz postać

$$f(x + f(y)) + f(y + f(x)) = f(x) + y + f(y) + x. \tag{3.28}$$

Wykażemy, że $-\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$. Na mocy uwagi 3.16 funkcja f ma własność $f(0) = 0$. Podstawiając $y = -f(x)$ w równości (3.28) otrzymujemy

$$f(x + f(-f(x)) = x + f(-f(x))$$

dla każdego $x \in G$. Podstawiając $f(x)$ w miejsce x w powyższym warunku i korzystając z równości $f^2 = \mathrm{id}$ otrzymujemy warunek

$$f(f(x) + f(-x)) = f(x) + f(-x) \tag{3.29}$$

dla każdego $x \in G$. Z uwagi 3.16 wynika, że funkcja f jest addytywna na swoim wykresie. Zatem dla każdego $x \in G$ zachodzą równości

$$f(x + f(x)) = f(x) + f^2(x) = x + f(x).$$

Podstawiając tu $-f(x)$ w miejsce x dostajemy

$$f(-f(x) + f(-f(x))) = -f(x) + f(-f(x)) \tag{3.30}$$

dla każdego $x \in G$. Z warunków (3.29) i (3.30) wynika, że dla każdego $x \in G$ elementy $f(x) + f(-x)$ oraz $-f(x) + f(-f(x))$ są punktami stałymi funkcji f. Stąd i z uwagi 3.17 wynika, że

$$f(-x) + f(-f(x)) = f(x) + f(-x) - f(x) + f(-f(x)) \in \mathrm{Fix}f \tag{3.31}$$

dla każdego $x \in G$. Z równości (3.28) wynika, że dla wszystkich $x, y \in G$ element $x + f(y)$ jest punktem stałym funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $y + f(x) \in \mathrm{Fix}f$.

Stosując powyższą obserwację do warunku (3.31) otrzymujemy $-f(x) + f^2(-x) \in \mathrm{Fix}f$, to znaczy

$$-x - f(x) \in \mathrm{Fix}f \quad \text{dla każdego } x \in G. \tag{3.32}$$

Ustalmy teraz dowolny element $z \in \mathrm{Fix}f$. Korzystając z warunku (3.32) dla $x = z$ dostajemy $-2z \in \mathrm{Fix}f$. Stąd $-z = -2z + z \in \mathrm{Fix}f + \mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$. Ostatecznie $-\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$. Zatem zbiór $\mathrm{Fix}f$ jest podgrupą grupy G. Ponieważ $\mathrm{intFix}f \neq \emptyset$ i każde otoczenie zera w grupie G jest zbiorem pochłaniającym, więc $\mathrm{Fix}f = G$. Zatem $f = \mathrm{id}$. □

Z twierdzenia 3.21 wyprowadzamy następujący wniosek.

Wniosek 3.22 *Niech G będzie abelową lokalnie zwartą grupą topologiczną spełniającą aksjomat oddzielania T_2. Załóżmy, że grupa G nie ma niezerowych elementów rzędu skończonego i że każde otoczenie zera w G jest zbiorem pochłaniającym. Niech $f\colon G \to G$ będzie taką funkcją, że zbiór* $\mathrm{Fix}f$ *zawiera podzbiór dodatniej miary Haara. Jeśli funkcja f spełnia równanie* (3.2)*, to* $f = \mathrm{id}$.

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (3.2). Zbiór $\mathrm{Fix}f$ zawiera podzbiór mierzalny w sensie Haara miary dodatniej, a zatem istnieje borelowski zbiór $A \subset \mathrm{Fix}f$ dodatniej miary Haara. Pokażemy, że zbiór A zawiera borelowski podzbiór skończonej miary dodatniej. Grupa G jest lokalnie zwarta, a więc istnieje takie otoczenie zera $U \subset G$, że zbiór $\mathrm{cl}U$ jest zwarty. Ponieważ każde otoczenie zera w G jest zbiorem pochłaniającym, więc $\bigcup_{n=1}^{\infty} nU = G$. Stąd $\bigcup_{n=1}^{\infty} n\mathrm{cl}U = G$, a zatem

$$A = A \cap G = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} n\mathrm{cl}U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap n\mathrm{cl}U). \tag{3.33}$$

Dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ funkcja $G \ni x \mapsto nx$ jest ciągła, a zatem zbiór $n\mathrm{cl}U$ jest zwarty dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd na mocy aksjomatu oddzielania T_2 wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór $n\mathrm{cl}U$ jest domknięty. Ponieważ zbiór A jest miary dodatniej, więc z równości (3.33) wynika istnienie takiej liczby $k \in \mathbb{N}$, że zbiór $A \cap k\mathrm{cl}U$ jest miary dodatniej. Przyjmijmy $B = A \cap k\mathrm{cl}U$. Zbiór B jest borelowskim podzbiorem zbioru A. Ponadto $B \subset k\mathrm{cl}U$, a zatem zbiór B jako podzbiór zbioru miary skończonej jest także miary skończonej.

Na mocy uogólnienia twierdzenia Steinhausa (zob. [17, 20.17 Corollary]) zbiór $B + B$ ma niepuste wnętrze. Oczywiście $B \subset \mathrm{Fix}f$. Z uwagi 3.17 wynika, że $\mathrm{Fix}f + \mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$. Zatem $\mathrm{intFix}f \neq \emptyset$ i korzystając z twierdzenia 3.21 otrzymujemy równość $f = \mathrm{id}$. □

Korzystając z twierdzenia Piccard (zob. [21, Theorem 2.9.1]) możemy analogicznie udowodnić kolejny wniosek z twierdzenia 3.21.

Wniosek 3.23 *Niech G będzie abelową grupą topologiczną bez niezerowych elementów rzędu skończonego, w której każde otoczenie zera jest zbiorem pochłaniającym. Niech $f\colon X \to X$ będzie taką funkcją, że zbiór* $\mathrm{Fix}f$ *zawiera podzbiór drugiej kategorii o własności Baire'a. Jeśli funkcja f spełnia równanie* (3.2)*, to* $f = \mathrm{id}$.

Poniższy lemat przedstawia kolejną własność rozwiązań równania (3.2).

Lemat 3.24 *Niech X będzie przestrzenią liniowo–topologiczną nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i niech $f\colon X \to X$ będzie rozwiązaniem równań* (3.2) *i* (3.26). *Jeśli $A_f(c) \cup A_f(-1) = X$ dla pewnego $c \in \mathbb{K}\setminus\{1\}$, to zbiór $A_f(-1)$ jest podgrupą grupy X.*

Dowód. Załóżmy, że $A_f(c) \cup A_f(-1) = X$ dla pewnego $c \in \mathbb{K}\setminus\{1\}$. Wystarczy rozpatrzyć przypadek $c \neq -1$. Na mocy lematu 3.18 zachodzi inkluzja $-A_f(-1) \subset A_f(-1)$. Z równości (3.2) i (3.26) wynika, że

$$f(x+f(y)) + f(y+f(x)) = c(f(x)+x) + c(f(y)+y) \tag{3.34}$$

dla wszystkich $x, y \in X$. Wstawiając $f(x)$ w miejsce x w równości (3.34) otrzymujemy warunek

$$f(f(x)+f(y)) = -f(y+f^2(x)) + c(f^2(x)+f(x)+f(y)+y)$$

dla wszystkich $x, y \in X$. Lewa strona ostatniej równości jest symetryczna ze względu na zamianę zmiennych x i y. Zatem jej prawa strona także ma tę własność, a więc dla wszystkich $x, y \in X$ zachodzi równość

$$\begin{aligned}-f(y+f^2(x)) &+ cf^2(x) + cf(x) + cf(y) + cy = \\ &= -f(x+f^2(y)) + cf^2(y) + cf(y) + cf(x) + cx.\end{aligned}$$

Zatem

$$f(x+f^2(y)) - f(y+f^2(x)) = -cf^2(x) + cx + cf^2(y) - cy \tag{3.35}$$

dla wszystkich $x, y \in X$.

Wykażemy teraz, że dla wszystkich $x, y \in X$ zachodzi warunek

$$y, y+x \in A_f(-1) \Rightarrow x \in A_f(-1). \tag{3.36}$$

Ustalmy punkty $x, y \in X$ i załóżmy, że $y, y+x \in A_f(-1)$. Ponieważ $-A_f(-1) \subset A_f(-1)$, więc $-y \in A_f(-1)$. Zatem możemy założyć, że $x \neq -y$. Ponieważ $-y \in A_f(-1)$, więc $f^2(y) = y$. Z warunku (3.35) wynika, że

$$f(y+f^2(x)) = f(x+y) + cf^2(x) - cx = -x - y + cf^2(x) - cx,$$

a zatem

$$f(y+f^2(x)) = cf^2(x) - (c+1)x - y. \tag{3.37}$$

Wykażemy, że $y + f^2(x) \in A_f(-1)$. Przypuśćmy nie wprost, że $y + f^2(x) \notin A_f(-1)$. Wtedy $y + f^2(x) \in A_f(c)$ i korzystając z warunku (3.37) otrzymujemy równość

$$cy + cf^2(x) = cf^2(x) - (c+1)x - y,$$

skąd $(c+1)(x+y)=0$. Ponieważ $c\neq -1$, więc $x=-y$, co przeczy założeniu. Stąd $y+f^2(x)\in A_f(-1)$. Korzystając ponownie z warunku (3.37) otrzymujemy

$$-y-f^2(x)=cf^2(x)-(c+1)x-y,$$

a więc $(c+1)(f^2(x)-x)=0$. Zatem $f^2(x)=x$. Stąd i z równości (3.26) wynika, że $(c-1)(f(x)+x)=0$. Zatem $f(x)=-x$, a więc $x\in A_f(-1)$. Kończy to dowód warunku (3.36). Podstawiając $x-y$ w miejsce x we wspomnianym warunku widzimy, że $A_f(-1)-A_f(-1)\subset A_f(-1)$. Z uwagi 3.16 wynika, że $f(0)=0$, a stąd $0\in A_f(-1)$. Zatem zbiór $A_f(-1)$ jest podgrupą grupy X. $\square$

Korzystając z lematu 3.24 udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.25 *Niech X będzie przestrzenią liniowo–topologiczną nad ciałem $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ i niech $f\colon X\to X$ będzie rozwiązaniem równania* (3.2). *Załóżmy, że $dA_f(d)\subset A_f(d)$ dla każdego $d\in\mathbb{K}\backslash\{-1\}$ i $\bigcup_{b\in\mathbb{K}}A_f(b)=X$. Niech $c\in\mathbb{K}$ będzie liczbą spełniająca warunek* $\max\{|c|,|c+1|\}>1$. *Jeśli* $\mathrm{int}A_f(c)\neq\emptyset$, *to $f(x)=cx$ dla każdego $x\in X$.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathrm{int}A_f(c)\neq\emptyset$. Możemy założyć, że $X\neq\{0\}$. Jeżeli $c=1$, to teza twierdzenia wynika z twierdzenia 3.21. Zatem wystarczy rozpatrzyć przypadek $c\neq 1$. Ponieważ $\max\{|c|,|c+1|\}>1$, więc w szczególności $c\notin\{0,-1\}$. Stąd i z założenia wynika, że $cA_f(c)\subset A_f(c)$. Z uwagi 3.16 wynika, że funkcja f jest addytywna na swoim wykresie. Wykażemy, że spełnione są założenia lematu 3.19. Ustalmy punkt $x_0\in\mathrm{int}A_f(c)$. Istnieje takie zbalansowane otoczenie zera $U_0\subset X$, że $x_0+U_0\subset A_f(c)$. Ustalmy dowolny punkt $y\in X$. Istnieją takie liczby $k,m\in\mathbb{N}$, że $\frac{1}{c}y\in kU_0$ i $f(y)\in mU_0$. Niech $p\in\{c,c+1\}$ będzie takie, że $|p|>1$. Istnieje taka liczba $n\in\mathbb{N}$, że $|p|^n>\max\{k,m\}$. Z lematu 3.18 wynika, że $p^nA_f(c)\subset A_f(c)$. Zatem

$$p^nx_0+f(y)\in p^nx_0+mU_0\subset p^nx_0+p^nU_0=p^n(x_0+U_0)\subset p^nA_f(c)\subset A_f(c).$$

Ponadto

$$\begin{aligned}cp^nx_0+y\in cp^nx_0+ckU_0\subset cp^nx_0+cp^nU_0=cp^n(x_0+U_0)\subset cp^nA_f(c)\subset\\ \subset cA_f(c)\subset A_f(c).\end{aligned}$$

Na mocy lematu 3.19 funkcja f spełnia równanie (3.26). Korzystając z lematu 3.20 otrzymujemy równość $A_f(d)=\{0\}$ dla każdej liczby $d\in\mathbb{K}\backslash\{-1,c\}$. Stąd $X=\bigcup_{b\in\mathbb{K}}A_f(b)=A_f(-1)\cup A_f(c)$. Z lematu 3.24 wynika, że zbiór $A_f(-1)$ jest podgrupą grupy X.

Wykażemy teraz, że istnieje element $x_1\in A_f(c)\backslash\{0\}$ spełniający warunek $(c-1)x_1\in A_f(c)$. Przypuśćmy nie wprost, że $(c-1)(A_f(c)\backslash\{0\})\subset X\backslash A_f(c)$. Wtedy $(c-1)A_f(c)\subset A_f(-1)$. Ponieważ $c\neq 1$ i $\mathrm{int}A_f(c)\neq\emptyset$, więc $\mathrm{int}((c-1)A_f(c))\neq\emptyset$. Zatem $\mathrm{int}A_f(-1)\neq\emptyset$. Jednocześnie zbiór $A_f(-1)$ jest podgrupą grupy X, a stąd wynika, że $A_f(-1)=X$. Ponadto $c\neq -1$, a więc $A_f(c)=A_f(c)\cap X=A_f(c)\cap$

$A_f(-1) = \{0\}$. Zatem zbiór $\{0\}$ ma niepuste wnętrze, a stąd wynika, że $X = \{0\}$, co przeczy założeniu.

Niech $x_1 \in A_f(c) \setminus \{0\}$ będzie takim elementem, że $(c-1)x_1 \in A_f(c)$. Wykażemy teraz, że

$$c^2 A_f(-1) \subset A_f(c). \tag{3.38}$$

Ustalmy dowolny punkt $x \in A_f(-1)$. Przypuśćmy nie wprost, że $c^2 x \notin A_f(c)$. Wtedy $c^2 x \in A_f(-1)$ i $x \neq 0$. Ponieważ $cA_f(c) \subset A_f(c)$ oraz $X = A_f(-1) \cup A_f(c)$, więc $cx \in A_f(-1)$. Zdefiniujmy elementy $y_1 = -x + cx_1$ i $y_2 = cx - x_1$.

Pokażemy, że $y_1 \in A_f(c)$. Przypuśćmy nie wprost, że $y_1 \notin A_f(c)$. Wtedy $y_1 \in A_f(-1)$. Ponieważ $x \in A_f(-1)$ i zbiór $A_f(-1)$ jest podgrupą przestrzeni X, więc $x + y_1 \in A_f(-1)$. Zatem $cx_1 \in A_f(-1)$. Jednocześnie $x_1 \in A_f(c)$, a więc $cx_1 \in A_f(c)$. Stąd $cx_1 \in A_f(c) \cap A_f(-1) = \{0\}$, a zatem $cx_1 = 0$. Stąd wynika, że $c = 0$ lub $x_1 = 0$, co przeczy założeniom. Zatem $y_1 \in A_f(c)$.

Udowodnimy teraz, że $y_2 \in A_f(c)$. Przypuśćmy, nie wprost, że $y_2 \notin A_f(c)$. Wtedy $y_2 \in A_f(-1)$, skąd wynika, że $x_1 = cx - y_2 \in A_f(-1)$. Zatem $x_1 \in A_f(c) \cap A_f(-1)$, czyli $x_1 = 0$, co daje sprzeczność. Stąd $y_2 \in A_f(c)$.

Zbiór $A_f(-1)$ jest podgrupą grupy X, a zatem $y_1 + cy_2 = c^2 x - x \in A_f(-1)$. Korzystając ponownie z lematu 3.18 dostajemy warunek $y_2 + cy_1 = (c^2 - 1)x_1 = (c+1)(c-1)x_1 \in (c+1)A_f(c) \subset A_f(c)$. Ponieważ $y_1, y_2 \in A_f(c)$ i $cA_f(c) \subset A_f(c)$, więc $cy_1, cy_2 \in A_f(c)$. Stosując równość (3.2) dla punktów y_1 i y_2 otrzymujemy warunek

$$f(y_1 + cy_2) + f(y_2 + cy_1) = cy_1 + c^2 y_2 + cy_2 + c^2 y_1.$$

Stąd

$$-(y_1 + cy_2) + c(y_2 + cy_1) = cy_1 + c^2 y_2 + cy_2 + c^2 y_1,$$

a więc $-(c+1)y_1 = c(c+1)y_2$. Zatem $(c+1)(cy_2 + y_1) = 0$. Ponieważ $c \neq -1$, więc $y_1 = -cy_2$. Stąd $-x + cx_1 = -c^2 x + cx_1$, a więc $(c^2 - 1)x = 0$. Zatem $x = 0$. Otrzymaliśmy sprzeczność, co kończy dowód warunku (3.38).

Z uwagi 3.16 i lematu 3.18 wynika inkluzja $c^2 A_f(c) \subset A_f(c)$. Ponieważ $c \neq 0$, więc z warunku (3.38) wynika, że

$$X = c^2 X = c^2(A_f(-1) \cup A_f(c)) = c^2 A_f(-1) \cup c^2 A_f(c) \subset A_f(c).$$

Stąd $A_f(c) = X$, a więc $f(x) = cx$ dla każdego $x \in X$. □

Uwaga 3.26 Niech $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i niech $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ będzie funkcją. Wtedy $x \in A_f(f(x)/x)$ dla każdego $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Jeśli, ponadto, $f(0) = 0$, to $0 \in \mathrm{Fix} f = A_f(1)$. Zatem $\bigcup_{b \in \mathbb{K}} A_f(b) = \mathbb{K}$. Skorzystamy z tego spostrzeżenia w dowodzie kolejnego twierdzenia.

Twierdzenie 3.27 *Niech $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i niech $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ będzie takim rozwiązaniem równania* (3.2)*, że $dA_f(d) \subset A_f(d)$ dla każdej liczby $d \in \mathbb{K} \setminus \{-1\}$. Niech $c \in \mathbb{K}$ będzie liczbą spełniającą warunek* $\max\{|c|, |c+1|\} > 1$. *Jeśli* $\mathrm{int} A_f(c) \neq \emptyset$*, to $f(x) = cx$ dla każdego $x \in \mathbb{K}$.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathrm{int} A_f(c) \neq \emptyset$. Z uwagi 3.16 wynika, że $f(0) = 0$. Stąd i z uwagi 3.26 wynika równość $\bigcup_{b \in \mathbb{K}} A_f(b) = \mathbb{K}$. Korzystając z twierdzenia 3.25 otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Proposition 3.2 z monografii [15] stwierdza, że jedynymi ciągłymi rozwiązaniami $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ równania (2.3) są ciągłe funkcje addytywne. W poniższym wniosku przedstawiamy ogólne rozwiązanie równania (3.2) we wspomnianej klasie funkcji, otrzymując identyczny zbiór rozwiązań.

Wniosek 3.28 *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Funkcja f spełnia równanie (3.2) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $c \in \mathbb{R}$, że $f(x) = cx$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (3.2). Na mocy uwagi 3.16 i twierdzenia J istnieje taka liczba $p \in \mathbb{R}$, że $f(x) = px$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, lub istnieją takie liczby $a_1, a_2 \in [0, \infty)$, że $f(x) = a_1 x$ dla każdego $x < 0$ i $f(x) = a_2 x$ dla każdego $x \geq 0$. Możemy założyć, że zachodzi drugi przypadek oraz, że $f \neq 0$. Stosując twierdzenie 3.27 dla dodatniej liczby $c = \max\{a_1, a_2\}$ otrzymujemy równość $f(x) = cx$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Kończy to dowód wniosku. □

Rozdział 4

Równanie Borosa-Daróczyego

Ten rozdział jest poświęcony równaniu

$$f(x + 2f(y)) + f(y + 2f(x)) = 2f(x) + 2f(y) + x + y. \tag{4.1}$$

Problem rozwiązania równania (4.1) w klasie odwzorowań dowolnej grupy abelowej w siebie został postawiony przez Z. Borosa i Z. Daróczyego podczas The Forty-third International Symposium on Functional Equations [6] oraz w pracy [7]. Przykład rodziny funkcji spełniających równanie (4.1) został podany przez J. Rätza (patrz poniższy przykład R2). W tym rozdziale zajmiemy się także równaniami

$$f(2f(x)) = f(x) + x \tag{4.2}$$

oraz

$$f(x + 2f(x)) = x + 2f(x), \tag{4.3}$$

z uwagi na ich związek z równaniem (4.1). W pracy [7] autorzy zauważyli, że każde addytywne przekształcenie grupy abelowej w siebie, spełniające równanie (4.2), jest rozwiązaniem równania (4.1). Co więcej, w klasie funkcji addytywnych przekształcających grupę abelową w siebie każde z równań (4.1), (4.2), (4.3) jest równoważne równaniu

$$f(x + 2f(y)) = f(x) + y + f(y), \tag{4.4}$$

które w pracy [7] zostało rozwiązane w klasie funkcji przekształcających przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$ w siebie.

W pierwszym paragrafie tego rozdziału przedstawiamy ogólne własności rozwiązań równań (4.1)–(4.3). W paragrafie drugim prezentujemy wyniki dotyczące równań (4.2) i (4.3). Wreszcie w części trzeciej tego rozdziału przedstawiamy twierdzenia dotyczące równania (4.1). Część przedstawionych faktów znajduje się w artykule [4].

4.1 Wyniki wstępne

Przedstawimy najpierw pewne wstępne fakty dotyczące omawianych równań.

Uwaga 4.1 *Niech G będzie lewostronnie skracalnym grupoidem, z zerem i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (4.1)*. Jeśli $2f(0) = 0$, to funkcja f spełnia równanie* (4.2)*.*

Dowód. Postawiając $y = 0$ w równości (4.1) otrzymujemy warunek $f(x)+f(2f(x)) = 2f(x) + x$ dla każdego $x \in G$. Stąd, na mocy lewostronnej skracalności działania w grupoidzie G, funkcja f spełnia równanie (4.2). □

Uwaga 4.2 *Niech G będzie lewostronnie skracalnym grupoidem i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (4.2)*. Wtedy funkcja f jest różnowartościowa. Jeśli, dodatkowo, działanie w zbiorze G ma zero, to $2f(0) = 0$.*

Dowód. Ustalmy dowolne punkty $x, y \in G$ i załóżmy, że $f(x) = f(y)$. Wtedy $f(2f(x)) = f(2f(y))$ i, korzystając z równości (4.2), otrzymujemy $f(x) + x = f(y) + y$. Stąd, na podstawie lewostronnej skracalności, wynika, że $x = y$. Zatem funkcja f jest różnowartościowa.

Załóżmy teraz, że działanie w zbiorze G ma zero. Podstawiając $x = 0$ w równości (4.2) dostajemy $f(2f(0)) = f(0)$. Stąd, wobec różnowartościowości funkcji f, otrzymujemy $2f(0) = 0$. □

Uwaga 4.3 *Niech G będzie lewostronnie skracalnym grupoidem i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (4.2)*. Wtedy $2^n\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli, dodatkowo, $\mathrm{Fix}f \subset 2f(G)$, to $2^n\mathrm{Fix}f = \mathrm{Fix}f$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Ustalmy dowolny punkt $x \in \mathrm{Fix}f$. Korzystając z równości (4.2) otrzymujemy $f(2x) = f(2f(x)) = f(x) + x = 2x$. Stąd $2x \in \mathrm{Fix}f$. Zatem $2\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$. Stąd wynika, że $2^n\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Dla dowodu drugiej części uwagi załóżmy, że $\mathrm{Fix}f \subset 2f(G)$. Wobec pierwszej części dowodu wystarczy pokazać, że $\mathrm{Fix}f \subset 2^n\mathrm{Fix}f$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy dowolny punkt $y \in \mathrm{Fix}f$. Istnieje taki element $x \in G$, że $y = 2f(x)$. Stosując równość (4.2) dla elementu x otrzymujemy $2f(x) = y = f(y) = f(2f(x)) = f(x)+x$, a zatem $f(x) = x$, czyli $x \in \mathrm{Fix}f$. Stąd $y = 2x$, a więc $y \in 2\mathrm{Fix}f$. W rezultacie $\mathrm{Fix}f \subset 2\mathrm{Fix}f$. Stąd $\mathrm{Fix}f \subset 2^n\mathrm{Fix}f$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Kończy to dowód. □

Trzy poniższe rezultaty zostały udowodnione przez J. Rätza ([32], zob. także [30]).

Przykład R2 Niech G będzie grupą abelową. Ustalmy liczbę naturalną k i przyjmijmy $n = 2k + 1$. Załóżmy, że istnieje podgrupa H grupy G o indeksie równym n. Grupa G/H jest izomorficzna z addytywną grupą $\mathbb{Z}_n$. Niech $\varphi\colon \mathbb{Z}_n \to G/H$ będzie izomorfizmem. Istnieją takie punkty $x_0, \ldots, x_{n-1} \in G$, że $\varphi(i) = x_i + H$ dla każdego $i \in \{0, \ldots, n - 1\}$. Przyjmijmy $d_0 = 0$ i dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ ustalmy dowolny punkt $d_i \in (k-1)x_i+H$. Ponadto, niech $d_i = -d_{n-i}$ dla każdego $i \in \{k+1, \ldots, n-1\}$. W ten sposób $d_i + d_j = 0$ dla wszystkich wskaźników $i, j \in \mathbb{Z}_n$ spełniających równość $i + j = 0$. Ponadto, dla każdego $i \in \{k+1, \ldots, n-1\}$ zachodzi warunek $d_{n-i} = -d_i \in -(k-1)x_i+H = (k-1)(-(x_i+H)) = (k-1)\varphi(n-i) = (k-1)x_{n-i}+H$. Dodatkowo $x_0 = \varphi(0) = 0+H$, a więc $d_0 \in (k-1)x_0 + H$. Zatem $d_i \in (k-1)x_i + H$ dla każdego $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Definiujemy funkcję $f\colon G \to G$ wzorem $f(x) = x + d_j$, gdzie $j \in \mathbb{Z}_n$ jest takim wskaźnikiem, że $x \in x_j + H$. Sprawdzimy, że funkcja f spełnia równanie (4.1). Ustalmy dowolne punkty $x, y \in G$. Istnieją takie liczby $i, j \in \mathbb{Z}_n$, że $x \in x_i + H$ oraz $y \in x_j + H$. Zatem

$$\begin{aligned} x + 2f(y) = x + 2(y + d_j) = x + 2y + 2d_j \in x_i + 2x_j + 2d_j + H \subset \\ \subset x_i + 2x_j + 2(k-1)x_j + H = x_i + 2kx_j + H. \end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy, że $y + 2f(x) \in x_j + 2kx_i + H$.

Możemy znaleźć takie liczby $p, q \in \mathbb{Z}_n$, że $x_i + 2kx_j + H = x_p + H$ oraz $x_j + 2kx_i + H = x_q + H$. Indeks podgrupy H w grupie G wynosi $2k+1$, a więc $\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q) = x_p + x_q + H = (2k+1)(x_i + x_j) + H = H = \varphi(0)$. Funkcja φ jest różnowartościowa, a zatem $p + q = 0$. Stąd i z konstrukcji wynika, że $d_p + d_q = 0$ oraz

$$f(x+2f(y)) + f(y+2f(x)) = x+2f(y)+d_p+y+2f(x)+d_q = x+2f(y)+y+2f(x).$$

Zatem funkcja f spełnia równanie (4.1).

Twierdzenie R *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (4.1). *Wtedy $2f(0) = 0$.*

Wniosek R *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (4.1). *Wtedy funkcja f spełnia równanie* (4.2). *W szczególności, funkcja f jest różnowartościowa.*

Dowód. Wystarczy podstawić $y = 0$ w równości (4.1). □

W kolejnych uwagach skorzystamy ze związku równań (4.1) i (4.2) z równaniami (3.2) i (3.26).

Uwaga 4.4 *Niech S będzie półgrupą abelową i niech $f\colon S \to S$ będzie rozwiązaniem równania* (4.2). *Wtedy funkcje $g_1, g_2\colon S \to S$, dane odpowiednio wzorami $g_1(x) = 2f(x)$ i $g_2(x) = f(2x)$, spełniają równanie* (3.26) *z liczbą $c = 2$, czyli równanie*

$$g^2(x) = g(x) + 2x. \tag{4.5}$$

Uwaga 4.5 *Niech G będzie grupą abelową bez elementów rzędu* 2 *i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (4.1). *Wtedy funkcja f spełnia równanie* (4.3) *i warunki* $3\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$ *oraz* $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Dowód. Na mocy wniosku R funkcja f spełnia równanie (4.2). Z równań (4.1) i (4.2) wynika, że dla wszystkich $x, y \in G$ zachodzą równości

$$\begin{aligned} 2f(x + 2f(y)) + 2f(y + 2f(x)) &= 4f(x) + 4f(y) + 2x + 2y = \\ &= 2f(x) + 2f(2f(y)) + 2f(y) + 2f(2f(x)). \end{aligned}$$

Zatem funkcja $2f$ spełnia równanie (3.2). Na podstawie uwagi 3.16 funkcja $2f$ jest addytywna na swoim wykresie. Stąd i z równości (4.2) wynika, że

$$2f(x + 2f(x)) = 2f(x) + 2f(2f(x)) = 2(x + 2f(x))$$

dla każdego $x \in G$. Ponieważ grupa G nie ma elementów rzędu 2, więc z ostatniej równości wynika, że funkcja f spełnia równanie (4.3).

Na mocy wniosku R i uwagi 4.4 funkcja $2f$ spełnia równanie (4.5). Z uwagi 4.3 wynika inkluzja $2\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$. Korzystając z lematu 3.18 (dla $c = 2$, $p = 3$ i $n = 1$) otrzymujemy warunek $3A_{2f}(2) \subset A_{2f}(2)$, co wobec braku w grupie G elementów rzędu 2 oznacza, że $3\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$.

Z twierdzenia R wynika, że $f(0) = 0$, a zatem $0 \in f^{-1}(\{0\})$. Na podstawie wniosku R funkcja f jest różnowartościowa. Zatem $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, co kończy dowód. $\square$

Uwaga 4.6 *Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ i niech $D \subset X$ będzie zbiorem co najmniej dwuelementowym. Ustalmy punkt $x_0 \in X$ oraz liczbę $a \in \mathbb{K}$. Niech $f\colon D \to D$ będzie funkcją daną wzorem $f(x) = ax + x_0$.*

Załóżmy, że $D + D \subset D$. Funkcja f spełnia równanie (4.1) [*równanie* (4.3)] *wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 = 0$ oraz $a \in \{1, -1/2\}$.*

Załóżmy, że $2D \subset D$. Funkcja f spełnia równanie (4.2) *wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 = 0$ oraz $a \in \{1, -1/2\}$.*

Dowód. Wykażemy prawdziwość tezy jedynie dla równania (4.1), ponieważ w przypadku równań (4.3) i (4.2) dowód jest podobny. Funkcja f spełnia równanie (4.1) wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y \in D$ zachodzi równość

$$f(x + 2ay + 2x_0) + f(y + 2ax + 2x_0) = 2ax + 2x_0 + 2ay + 2x_0 + x + y.$$

Jest ona równoważna warunkowi

$$ax + 2a^2y + 2ax_0 + x_0 + ay + 2a^2x + 2ax_0 + x_0 = 2ax + 2ay + 4x_0 + x + y,$$

to znaczy

$$(2a^2 - a - 1)(x + y) + 2(2a - 1)x_0 = 0.$$

Ponieważ zbiór $D + D$ jest co najmniej dwuelementowy, więc zachodzenie ostatniej równości dla wszystkich punktów $x, y \in X$ oznacza, że $2a^2 - a - 1 = 0$ i $2(2a - 1)x_0 = 0$, czyli, równoważnie, $a \in \{1, -1/2\}$ i $x_0 = 0$. $\square$

Z uwagi 4.3 wyprowadzamy poniższe rezultaty, z których będziemy korzystać w dowodach kolejnych twierdzeń.

Wniosek 4.7 *Niech* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie rozwiązaniem równania* (4.2)*. Jeśli istnieje taka liczba* $a \in (0,\infty)$*, że* $[0,a) \subset \mathrm{Fix} f$ $[(-a,0] \subset \mathrm{Fix} f]$*, to* $[0,\infty) \subset \mathrm{Fix} f$ $[(-\infty,0] \subset \mathrm{Fix} f]$.

Dowód. Dowód przeprowadzamy tylko dla podstawowej wersji wniosku. Niech $a \in (0,\infty)$ będzie taką liczbą, że $[0,a) \subset \mathrm{Fix} f$. Korzystając z uwagi 4.3 otrzymujemy warunek

$$[0,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} 2^n[0,a) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} 2^n \mathrm{Fix} f \subset \mathrm{Fix} f.$$

□

Wniosek 4.8 *Niech* X *bedzie przestrzenią liniowo–topologiczną i niech* $f\colon X \to X$ *będzie funkcją spełniającą równania* (4.2) *i* (4.3)*. Jeśli* $\mathrm{Fix} f \subset 2f(X)$ *i istnieje takie otoczenie zera* $U \subset X$*, że* $U \cap \mathrm{Fix} f = \{0\}$*, to* $f = -\mathrm{id}/2$.

Dowód. Załóżmy, że $\mathrm{Fix} f \subset 2f(X)$. Niech $U \subset X$ będzie takim otoczeniem zera, że $U \cap \mathrm{Fix} f = \{0\}$. Ustalmy dowolny punkt $x \in X$ i przyjmijmy $y = x + 2f(x)$. Oczywiście $y \in \mathrm{Fix} f$. Zbiór U jest otoczeniem zera, a zatem istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że $y/2^n \in U$. Z uwagi 4.3 wynika, że $y/2^n \in \mathrm{Fix} f$. Zatem $y/2^n \in U \cap \mathrm{Fix} f = \{0\}$. Stąd wynika, że $y = 0$, a więc $f(x) = -x/2$. Zatem $f = -\mathrm{id}/2$. □

Poniższe fakty przedstawiają pewne ogólne własności rozwiązań równania (4.1). Skorzystamy z nich przy dowodach późniejszych twierdzeń, gdzie zauważymy że jeśli rozwiązanie równania (4.1) jest równe funkcji id lub $-\mathrm{id}/2$ na „odpowiednio dużym" zbiorze, to musi być określone tym wzorem w każdym punkcie swojej dziedziny. Zaczynamy od trzech wyników dotyczących zbioru punktów stałych rozwiązań równania (4.1).

Lemat 4.9 *Niech* G *będzie grupą abelową i niech* $f\colon G \to G$ *będzie rozwiązaniem równania* (4.1)*. Wtedy dla każdego* $x \in G$ *zachodzi warunek:*

$$\text{jeśli } 2x \in \mathrm{Fix} f \text{ i } 2f(3x) = 6x, \text{ to } -x \in \mathrm{Fix} f. \tag{4.6}$$

W szczególności $-\mathrm{Fix} f \subset \mathrm{Fix} f$.

Dowód. Z twierdzenia R wynika, że $2f(0) = 0$, a na mocy wniosku R funkcja f spełnia równanie (4.2). Wstawiając $2f(x)$ w miejsce x w równości (4.1) otrzymujemy

$$f(2f(x) + 2f(y)) = 2f(2f(x)) + 2f(y) + 2f(x) + y - f(y + 2f(2f(x)))$$

dla wszystkich $x, y \in G$. Stąd i z równości (4.2) wynika, że dla wszystkich $x, y \in G$ zachodzi warunek

$$f(2f(x) + 2f(y)) = 4f(x) + 2x + 2f(y) + y - f(y + 2x + 2f(x)).$$

Z równości (4.1) wynika, że dla wszystkich $x, y \in G$ spełniony jest warunek

$$-f(y + 2x + 2f(x)) = f(x + 2f(y + 2x)) - 2f(x) - 2f(y + 2x) - x - y - 2x.$$

Z ostatnich dwóch równości wynika, że

$$f(2f(x)+2f(y)) = 4f(x)+2x+2f(y)+y+f(x+2f(y+2x)) + \\ -2f(x)-2f(y+2x)-3x-y$$

dla wszystkich $x, y \in G$. Po uporządkowaniu otrzymujemy

$$f(2f(x)+2f(y)) = 2f(x)+2f(y)+f(x+2f(y+2x))-2f(y+2x)-x$$

dla wszystkich $x, y \in G$. Lewa strona ostatniej równości jest symetryczna względem x i y, a więc jej prawa strona też ma tę własność. Zatem dla wszystkich $x, y \in G$ zachodzi równość

$$f(x+2f(y+2x))-2f(y+2x)-x = f(y+2f(x+2y))-2f(x+2y)-y.$$

Podstawiając w ostatniej równości $y=-2x$ otrzymujemy

$$f(x) = f(-2x+2f(-3x))-2f(-3x)+3x,$$

co, po podstawieniu $-x$ w miejsce x, daje warunek

$$f(2x+2f(3x)) = 2f(3x)+f(-x)+3x \tag{4.7}$$

dla każdego $x \in G$.

Ustalmy dowolny element $x \in G$ i załóżmy, że $2x \in \mathrm{Fix}f$ oraz $2f(3x) = 6x$. Z uwagi 4.3 wynika, że $2x+2f(3x) = 8x \in \mathrm{Fix}f$. Stosując teraz równość (4.7) otrzymujemy warunek $-x \in \mathrm{Fix}f$. Zatem implikacja (4.6) zachodzi dla każdego punktu $x \in G$.

Ustalmy teraz dowolny element $u \in \mathrm{Fix}f$. Korzystając z równości (4.1) dla $x = y = u$ otrzymujemy $2f(3u) = 6u$. Ponadto, z uwagi 4.3 wynika, że $2u \in \mathrm{Fix}f$. Zatem, na podstawie pierwszej części dowodu, $-u \in \mathrm{Fix}f$. Ostatecznie $-\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$, co kończy dowód. □

Lemat 4.10 *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (4.1). *Wtedy dla każdej liczby $m \in \mathbb{Z}$ i dla wszystkich $x, y \in G$ zachodzi warunek*

$$\textit{jeśli } y, y+x, y+2x \in \mathrm{Fix}f, \textit{ to } y-mx \in \mathrm{Fix}f. \tag{4.8}$$

Dowód. Podstawiając $x-2f(y)$ w miejsce x w równości (4.1) otrzymujemy warunek

$$f(x)+f(y+2f(x-2f(y))) = 2f(x-2f(y))+x+y \tag{4.9}$$

dla wszystkich $x, y \in G$. Korzystając z warunku (4.9) łatwo zauważyć, że jeśli elementy $x, y \in G$ są punktami stałymi funkcji f oraz $x-2y \in \mathrm{Fix}f$, to $2x-3y \in \mathrm{Fix}f$.

Pokażemy najpierw, że jeśli $m=1$, to warunek (4.8) zachodzi dla wszystkich $x, y \in G$. Ustalmy dowolne punkty $x, y \in G$ spełniające lewą stronę implikacji (4.8).

Na podstawie lematu 4.9 element $-y$ należy do zbioru $\mathrm{Fix}f$. Definiując $x_0 = y + 2x$ i $y_0 = y + x$ otrzymujemy warunki $x_0, y_0 \in \mathrm{Fix}f$ oraz $x_0 - 2y_0 = y + 2x - 2y - 2x = -y \in \mathrm{Fix}f$. Stąd $2x_0 - 3y_0 \in \mathrm{Fix}f$, to znaczy $x - y \in \mathrm{Fix}f$. Korzystając ponownie z lematu 4.9 dostajemy $y - x \in \mathrm{Fix}f$.

Ustalmy dowolną liczbę $m \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że warunek (4.8) jest spełniony dla liczby m i dla wszystkich $x, y \in G$. Ustalmy punkty $x \in G$ i $y \in \mathrm{Fix}f$ o własności $y + x \in \mathrm{Fix}f$ i $y + 2x \in \mathrm{Fix}f$. Niech $y' = y - x$. Z pierwszej części dowodu wynika, że $y' \in \mathrm{Fix}f$. Ponadto $y' + x, y' + 2x \in \mathrm{Fix}f$. Stąd, na mocy założenia indukcyjnego, $y' - mx \in \mathrm{Fix}f$, co oznacza, że $y - (m+1)x \in \mathrm{Fix}f$. Zatem warunek (4.8) zachodzi dla każdej liczby $m \in \mathbb{N}$ i dla wszystkich $x, y \in G$. Ustalmy teraz liczbę $m \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że poprzednik implikacji (4.8) jest spełniony dla dowolnie ustalonych elementów $x, y \in G$. Korzystając z udowodnionej części lematu otrzymujemy $y - x \in \mathrm{Fix}f$ oraz $y - 2x \in \mathrm{Fix}f$. Stosując teraz warunek (4.8) dla punktów y i $-x$ oraz liczby m dostajemy $y - m(-x) \in \mathrm{Fix}f$, to znaczy $y - (-m)x \in \mathrm{Fix}f$. Dla $m = 0$ warunek (4.8) jest oczywisty. Kończy to dowód lematu. □

Korzystając z lematu 4.10 możemy udowodnić następujące dwa rezultaty.

Wniosek 4.11 *Niech G będzie grupą abelową bez elementów rzędu 2 i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (4.1). *Wtedy $mx \in \mathrm{Fix}f$ dla każdego punktu $x \in \mathrm{Fix}f$ i liczby $m \in \mathbb{Z}$.*

Dowód. Z twierdzenia R i z braku w grupie G elementów rzędu 2 wynika, że $f(0) = 0$. Ustalmy punkt $x \in \mathrm{Fix}f$. Na podstawie wniosku R funkcja f spełnia równanie (4.2), a więc, na mocy uwagi 4.3, zachodzi inkluzja $2\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$. Zatem elementy $0, x$ i $2x$ należą do $\mathrm{Fix}f$. Korzystając z lematu 4.10 dla $y = 0$ otrzymujemy $mx \in \mathrm{Fix}f$ dla każdej liczby $m \in \mathbb{Z}$. □

Lemat 4.12 *Niech G będzie grupą abelową bez elementów rzędu 2 i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (4.1). *Wtedy dla wszystkich punktów $x, y \in G$ i liczb $k, m \in \mathbb{Z}$ spełniony jest warunek*

(4.10) *jeśli* $y, y + x, y + 2x \in \mathrm{Fix}f$, *to* $6mx + ky \in \mathrm{Fix}f$.

Dowód. Ustalmy punkty $x, y \in G$ i załóżmy, że elementy y, $y + x$ oraz $y + 2x$ są punktami stałymi funkcji f. Na podstawie lematu 4.10 element $y + mx$ należy do $\mathrm{Fix}f$ dla każdego $m \in \mathbb{Z}$. Ustalmy dowolne $m \in \mathbb{Z}$ i określmy element $y' = 6mx + y$. Oczywiście $y' \in \mathrm{Fix}f$. Z uwag 4.3 i 4.5 wynika, że $2\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$ i $3\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$. Zatem $y' + y = 6mx + 2y = 2(3mx + y) \in \mathrm{Fix}f$ oraz $y' + 2y = 6mx + 3y = 3(2mx + y) \in \mathrm{Fix}f$. Korzystając ponownie z lematu 4.10 otrzymujemy $y' + ly \in \mathrm{Fix}f$ dla każdej liczby $l \in \mathbb{Z}$, to znaczy $6mx + (l + 1)y \in \mathrm{Fix}f$ dla każdego $l \in \mathbb{Z}$. Podstawiając tu $l = k - 1$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, otrzymujemy tezę lematu. □

Poniższy wniosek jest konsekwencją uwagi 4.4 i lematu 3.20.

Wniosek 4.13 *Niech G będzie grupą i niech $f\colon G \to G$ będzie funkcją spełniającą równanie* (4.2). *Wtedy $-A_{2f}(-1) \subset A_{2f}(-1)$.*

W sytuacji, gdy funkcja f jest rozwiązaniem równania (4.1), możemy rozszerzyć wniosek 4.13.

Lemat 4.14 *Niech G będzie grupą abelową i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania (4.1). Wtedy $-A_{2f}(-1) \subset A_{2f}(-1)$ oraz funkcja $f|_{A_{2f}(-1)-A_{2f}(-1)}$ jest nieparzysta. Jeśli ponadto grupa G nie ma elementów rzędu trzy, to dla wszystkich $x, y \in G$ spełniony jest warunek*

$$y, y-x, y+2f(x) \in A_{2f}(-1) \Rightarrow x \in A_{2f}(-1). \tag{4.11}$$

Dowód. Korzystając z równości (4.1) otrzymujemy

$$f(x-y) + f(y+2f(x)) = 2f(x) + x \tag{4.12}$$

dla każdego $x \in G$ oraz $y \in A_{2f}(-1)$.

Korzystając z wniosków R i 4.13 stwierdzamy, że $-A_{2f}(-1) \subset A_{2f}(-1)$. Ustalmy dowolne punkty $x, y \in A_{2f}(-1)$. Korzystając z warunku (4.12) otrzymujemy $f(x-y) + f(y-x) = 0$, skąd wynika nieparzystość funkcji f na zbiorze $A_{2f}(-1) - A_{2f}(-1)$.

Załóżmy teraz, że grupa G nie ma elementów rzędu trzy. Ustalmy $x, y \in G$ i załóżmy, że elementy $y, y-x$ oraz $y+2f(x)$ należą do zbioru $A_{2f}(-1)$. Wtedy także element $x-y$ należy do zbioru $A_{2f}(-1)$. Na mocy równości (4.12)

$$2f(x-y) + 2f(y+2f(x)) = 2(2f(x)+x),$$

a stąd, wobec założeń, otrzymujemy

$$-(x-y) - (y+2f(x)) = 4f(x) + 2x,$$

to znaczy $3(2f(x)+x) = 0$. Zatem $2f(x) = -x$, a więc $x \in A_{2f}(-1)$. □

4.2 Równania stowarzyszone z równaniem Borosa-Daróczyego

W tym paragrafie przedstawimy kilka faktów dotyczących równań (4.2) oraz (4.3). Zaczniemy od przedstawienia ogólnych rozwiązań równania (4.3). W artykule [27] S. Nabeya zauważył, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania (4.3), to funkcja $\varphi = \mathrm{id} + 2f$ spełnia równanie

$$\varphi^2(x) = 3\varphi(x). \tag{4.13}$$

Jest to prawdą także w sytuacji, gdy funkcja f przekształca dowolną grupę abelową w siebie. Łatwo zauważyć, że jeśli grupą abelowa G nie ma elementów rzędu 2, $f\colon G \to G$ jest funkcją i funkcja $\varphi = \mathrm{id} + 2f$ spełnia równanie (4.13), to funkcja

f spełnia równanie (4.3). Zatem rozwiązywanie równania (4.3) możemy sprowadzić do rozwiązania równania (4.13). Z Theorem 15.14 z monografii [20] wynika postać ogólnego rozwiązania równania (4.13) w klasie funkcji $\varphi\colon E \to E$, gdzie $E \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym zbiorem. W poniższym lemacie 4.15 opiszemy rozwiązania równania (4.13) w ogólniejszej sytuacji.

Lemat 4.15 *Niech S będzie półgrupą i niech $A \subset S$. Funkcja $\varphi\colon A \to A$ spełnia równanie* (4.13) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór $B \subset A$ o własności $3B \subset B$ i taka funkcja $g\colon A\backslash B \to B$, że $\varphi(x) = 3x$ dla każdego $x \in B$ i $\varphi(x) = g(x)$ dla każdego $x \in A\backslash B$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja φ spełnia równanie (4.13). Przyjmijmy $B = \varphi(A)$. Oczywiście $B \subset A$. Z równości (4.13) wynika, że $3B = 3\varphi(A) = \varphi^2(A) \subset \varphi(A) = B$. Zatem $3B \subset B$. Z równości (4.13) wynika także, że $\varphi(x) = 3x$ dla każdego $x \in \varphi(A) = B$. Definiując $g = \varphi|_{A\backslash B}$ widzimy, że funkcja φ jest określona żądanym wzorem.

Załóżmy teraz, że spełniona jest prawa strona równoważności w tezie lematu. Sprawdzimy, że funkcja φ spełnia równanie (4.13). Ustalmy punkt $x \in A$. Jeśli $x \in B$, to $3x \in B$ i $\varphi^2(x) = \varphi(3x) = 9x = 3\varphi(x)$. Jeśli natomiast $x \in A\backslash B$, to $g(x) \in B$ i zachodzą równości $\varphi^2(x) = \varphi(g(x)) = 3g(x) = 3\varphi(x)$. Zatem funkcja φ jest rozwiązaniem równania (4.13). □

Z lematu 4.15 i ze wspomnianych obserwacji wyprowadzamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.16 *Niech G będzie grupą abelową bez elementów rzędu* 2. *Funkcja $f\colon G \to G$ jest rozwiązaniem równania* (4.3) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór $B \subset G$ spełniający warunek $3B \subset B$ i taka funkcja $g\colon G\backslash B \to B$, że $f(x) = x$, gdy $x \in B$ i $2f(x) = g(x) - x$, gdy $x \in G\backslash B$.*

Z Theorem 15.15 zawartego w monografii [20] wynika poniższy fakt, wyznaczający ogólne rozwiązanie równania (4.13) w klasie funkcji ciągłych $\varphi\colon E \to E$, gdzie $E \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem.

Twierdzenie K *Niech $E \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem i niech $\varphi\colon E \to E$ będzie funkcją ciągłą. Funkcja φ spełnia równanie* (4.13) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przedział $B \subset E$ o własności $3B \subset B$ i taka funkcja ciągła $g\colon E\backslash B \to B$, że $\lim_{y\to x} g(y) = 3x$ dla każdego $x \in (E \cap \mathrm{cl}B)\backslash B$ oraz spełnione są równości $\varphi(x) = 3x$ dla każdego $x \in B$ i $\varphi(x) = g(x)$ dla każdego $x \in E\backslash B$.*

Powtarzając rozumowanie sprzed twierdzenia 4.16 otrzymujemy następujący wynik.

Twierdzenie 4.17 *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Funkcja f spełnia równanie* (4.3) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przedział $B \subset \mathbb{R}$ o własności $3B \subset B$ i taka funkcja ciągła $g\colon \mathbb{R}\backslash B \to B$, że $\lim_{x\to x_0} g(x) = 3x_0$ dla każdego $x_0 \in \mathrm{cl}B \cap \mathbb{R}\backslash B$ oraz $f(x) = x$, gdy $x \in B$ i $f(x) = \frac{1}{2}(g(x) - x)$ dla każdego punktu $x \in \mathbb{R}\backslash B$.*

Kolejne twierdzenia dotyczą regularnych rozwiązań równań (4.2) i (4.3).

Twierdzenie 4.18 *Niech* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie taką funkcją, że zbiór* $(\mathrm{id} + 2f)(\mathbb{R})$ *jest przedziałem. Funkcja* f *spełnia równania* (4.2) *i* (4.3) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $f = \mathrm{id}$ *lub* $f = -\mathrm{id}/2$.

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równania (4.2) i (4.3). Niech $P = \{x+2f(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Z równania (4.3) wynika inkluzja $P \subset \mathrm{Fix}f$. Z założenia wynika, że zbiór P jest przedziałem. Na podstawie uwagi 4.2 funkcja f jest różnowartościowa oraz $f(0) = 0$. Zatem $0 \in P$. Jeśli $P = \{0\}$, to oczywiście $f = -\mathrm{id}/2$. Rozpatrzymy teraz przypadek, gdy $P \neq \{0\}$. Niech $y_0 \in P\backslash\{0\}$. Możemy założyć, że $y_0 > 0$. Stąd $[0, y_0] \subset P \subset \mathrm{Fix}f$. Z wniosku 4.7 wynika inkluzja $[0, \infty) \subset \mathrm{Fix}f$. Ponieważ funkcja f jest różnowartościowa, więc $f((-\infty, 0)) \subset (-\infty, 0)$. Stąd $x + 2f(x) < x < 0$ dla każdego $x \in (-\infty, 0)$. Zatem przedział P jest nieograniczony z dołu. Stąd $P = \mathbb{R}$, a więc $\mathrm{Fix}f = \mathbb{R}$, skąd wynika, że $f = \mathrm{id}$. Implikacja przeciwna jest konsekwencją uwagi 4.6. □

Twierdzenie 4.19 *Niech* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie taką funkcją, że* $\mathrm{Fix}f \subset 2f(\mathbb{R})$. *Załóżmy istnienie takiego niezdegenerowanego przedziału* $I \subset \mathbb{R}$, *że zbiór* $P = (\mathrm{id} + 2f)(I)$ *jest przedziałem oraz* $0 \in \mathrm{cl}I \cap \mathrm{cl}P$. *Jeśli funkcja* f *spełnia równania* (4.2) *i* (4.3), *to* $f = -\mathrm{id}/2$ *lub* $f(x) = x$ *dla każdego* $x \in (-\infty, 0]$ *lub* $f(x) = x$ *dla każdego* $x \in [0, \infty)$.

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równania (4.2) i (4.3). Z uwagi 4.2 wynika, że $f(0) = 0$. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie takim niezdegenerowanym przedziałem, że $P = (\mathrm{id} + 2f)(I)$ jest przedziałem i $0 \in \mathrm{cl}I \cap \mathrm{cl}P$.

Jeśli $P = \{0\}$, to $f(x) = -x/2$ dla każdego $x \in I$. Zatem $I \subset A_f(-1/2)$. Stąd, na mocy wniosku 4.13, wynika, że $-I \subset A_f(-1/2)$, a zatem $-I \cup I \subset A_f(-1/2)$. Ponadto $0 \in A_f(-1/2)$, a więc zbiór $B = -I \cup I \cup \{0\}$ jest niezdegenerowanym symetrycznym przedziałem zawartym w zbiorze $A_f(-1/2)$, Zatem istnieje taka liczba $a > 0$, że $(-a, a) \subset A_f(-1/2)$. W szczególności $(-a, a) \cap \mathrm{Fix}f = \{0\}$ i, korzystając z wniosku 4.8, otrzymujemy równość $f = -\mathrm{id}/2$.

Załóżmy teraz, że $P \neq \{0\}$. Niech $y_0 \in P\backslash\{0\}$. Załóżmy, że $y_0 > 0$. Wtedy $(0, y_0] \subset P$. Funkcja f spełnia równanie (4.3), a zatem $P \subset \mathrm{Fix}f$. Stąd $[0, y_0] \subset \mathrm{Fix}f$ i korzystając z wniosku 4.7 otrzymujemy inkluzję $[0, \infty) \subset \mathrm{Fix}f$. Jeśli $y_0 < 0$, to analogicznie dowodzimy, że $(-\infty, 0] \subset \mathrm{Fix}f$. Kończy to dowód. □

Uwaga 4.20 *Niech* S *będzie półgrupą abelową i niech* $f\colon S \to S$ *będzie funkcją spełniającą równania* (4.2) *i* (4.3). *Wtedy funkcja* $2f$ *jest addytywna na swoim wykresie.*

Dowód. Ustalmy dowolne $x \in S$. Korzystając z równań (4.2) i (4.3) otrzymujemy równości

$$2f(x + 2f(x)) = 2x + 4f(x) = 2f(x) + 2(x + f(x)) = 2f(x) + 2f(2f(x))$$

dla każdego $x \in S$. Kończy to dowód uwagi. □

Poniższe twierdzenie zostało sformułowane przez J. Matkowskiego w pracy [25], a udowodnione przez W. Jarczyka [19] i przez J. Matkowskiego [26].

Twierdzenie M *Niech $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ będzie funkcją addytywną na swoim wykresie. Załóżmy, że funkcja $(0,\infty) \ni x \mapsto f(x)/x$ jest monotoniczna. Wtedy istnieje taka liczba $c \in (0,\infty)$, że $f(x) = cx$ dla każdego $x \in (0,\infty)$.*

Korzystając z twierdzenia M możemy udowodnić następujący rezultat.

Wniosek 4.21 *Niech $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ będzie funkcją spełniającą równania (4.2) i (4.3). Załóżmy, że funkcja $(0,\infty) \ni x \mapsto f(x)/x$ jest monotoniczna. Wtedy $f(x) = x$ dla każdego $x \in (0,\infty)$.*

Dowód. Z uwagi 4.20 wynika, że funkcja $2f$ jest addytywna na swoim wykresie. Stosując twierdzenie M do funkcji $2f$ otrzymujemy istnienie takiej liczby $d > 0$, że $f(x) = dx$ dla każdego $x > 0$. Stąd i z uwagi 4.6 otrzymujemy tezę wniosku. $\square$

Poniższy wynik, dotyczący równania (4.5), został udowodniony przez Jacka i Józefa Taborów w pracy [37].

Twierdzenie T *Niech D będzie takim podzbiorem przedziału $(-\infty,0)$ lub przedziału $(0,\infty)$, że $2D = D$ i niech $g\colon D \to D$ będzie funkcją spełniającą warunek $g(D) = D$. Jeśli funkcja g spełnia równanie (4.5), to $g(x) = 2x$ dla każdego $x \in D$.*

Z twierdzenia T wyprowadzamy następujący wniosek.

Wniosek 4.22 *Niech D będzie takim podzbiorem przedziału $(-\infty,0)$ lub przedziału $(0,\infty)$, że $2D = D$ i niech $f\colon D \to D$ będzie funkcją o własności $f(D) = D$. Jeśli funkcja f spełnia równanie (4.2), to $f(x) = x$ dla każdego $x \in D$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (4.2). Z uwagi 4.2 wynika, że funkcja f jest różnowartościowa. Na podstawie uwagi 4.4 funkcja $g\colon D \to D$, dana wzorem $g(x) = f(2x)$, spełnia równanie (4.5), a ponadto jest bijekcją zbioru D. Na mocy twierdzenia T, dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $g(x) = 2x$, a zatem $f(x) = x$ dla każdego $x \in D$. $\square$

Korzystając z wniosku 4.22 wykażemy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.23 *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunek $\mathrm{Fix} f \subset 2f(\mathbb{R})$. Załóżmy, że funkcja f spełnia równania (4.2) i (4.3). Niech I będzie jednym z przedziałów $(-\infty,0)$ lub $(0,\infty)$. Jeśli zbiór $f(I)$ jest przedziałem, to $f(x) = x$ dla każdego $x \in I$ lub $f = -\mathrm{id}/2$.*

Dowód. Rozpatrzymy jedynie przypadek, gdy $I = (0,\infty)$, ponieważ w sytuacji, gdy $I = (-\infty,0)$ dowód twierdzenia jest analogiczny. Załóżmy więc, że że zbiór $f((0,\infty))$ jest przedziałem. Niech $A = \{x + 2f(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Z równości (4.3) wynika, że $A \subset \mathrm{Fix} f$. Z uwagi 4.2 wynika, że funkcja f jest różnowartościowa oraz $f(0) = 0$. W szczególności $0 \in A$. Jeśli zbiór A jest jednoelementowy, to $A = \{0\}$, a zatem $f = -\mathrm{id}/2$. Załóżmy więc, że istnieje punkt $u \in A\backslash\{0\}$. Wykażemy, że zbiór $A \cap$

$(0,\infty)$ jest niepusty. Przypuśćmy nie wprost, że $A \subset (-\infty,0]$. Wtedy $u<0$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $f(x) \leq -x/2$. Zatem $f((0,\infty)) \subset (-\infty,0)$ i przedział $f((0,\infty))$ jest nieograniczony z dołu. Istnieje zatem taka liczba $b \leq 0$, że $(-\infty,b) \subset f((0,\infty))$. Niech n będzie taką liczbą naturalną, że $2^n u < b$. Wtedy $2^n u \in f((0,\infty))$, a więc istnieje element $y>0$ spełniający równość $2^n u = f(y)$. Ponieeważ $u \in \mathrm{Fix} f$, więc z uwagi 4.3 wynika, że $2^n u \in \mathrm{Fix} f$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$. Zatem $f(2^n u) = 2^n u = f(y)$, a stąd i z różnowartościowości funkcji f wynika, że $2^n u = y$. Zatem $y<0$, co daje sprzeczność. Oznacza to, że zbiór $A \cap (0,\infty)$ jest niepusty.

Niech w będzie elementem zbioru $A \cap (0,\infty)$. W szczególności $w \in \mathrm{Fix} f$. Stąd, na mocy uwagi 4.3, wynika, że $\{2^m w : m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{Fix} f$. Ponadto, zbiór $f((0,\infty))$ jest przedziałem i $\mathrm{Fix} f \cap (0,\infty) \subset f((0,\infty))$, a zatem $(0,\infty) \subset f((0,\infty))$. Funkcja f jest różnowartościowa oraz $f(0)=0$, a więc $0 \notin f((0,\infty))$. Zatem $f((0,\infty)) \subset (0,\infty)$ i ostatecznie $f((0,\infty)) = (0,\infty)$. Stosując wniosek 4.22 otrzymujemy równość $f(x) = x$ dla każdego $x \in I$. Kończy to dowód twierdzenia. □

Poniższy przykład pokazuje, że we wniosku 4.22 założenie $D \subset (-\infty,0)$ lub $D \subset (0,\infty)$ jest istotne. Przykład ten dowodzi także istotności założeń dotyczących przedziału I w twierdzeniu 4.23.

Przykład 4.24 Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem $f(x) = x$, gdy $x \in \mathbb{Q}$ i $f(x) = -x/2$, gdy $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Funkcja f jest rozwiązaniem równań (4.2) i (4.3). Ponadto $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, funkcja f jest różnowartościowa i nawet ciągła w punkcie 0, ale nie jest równa ani id, ani $-\mathrm{id}/2$.

4.3 Główne twierdzenia

Przedstawimy teraz główne twierdzenia dotyczące rozwiązań równania (4.1).

Twierdzenie 4.25 *Niech G będzie abelową grupą topologiczną i niech $f\colon G \to G$ będzie rozwiązaniem równania* (4.1)*. Załóżmy, że każde otoczenie zera w grupie G jest zbiorem pochłaniającym. Jeśli* $\mathrm{intFix} f \neq \emptyset$*, to* $f = \mathrm{id}$.

Dowód. Załóżmy, że zbiór $\mathrm{Fix} f$ ma niepuste wnętrze i ustalmy punkt $y \in \mathrm{intFix} f$. Istnieje takie otoczenie zera $U \subset G$, że $y+U \subset \mathrm{Fix} f$. Niech $V \subset G$ będzie otoczeniem zera o własności $V+V \subset U$. Ustalmy dowolny punkt $x \in V$. Elementy $y, y+x$, oraz $y+2x$ należą do zbioru $\mathrm{Fix} f$ a stąd i z lematu 4.10 wynika, że $y+mx \in \mathrm{Fix} f$ dla każdej liczby $m \in \mathbb{Z}$. Zatem $\bigcup_{n=1}^{\infty}(y+nV) \subset \mathrm{Fix} f$, a więc $y+\bigcup_{n=1}^{\infty} nV \subset \mathrm{Fix} f$. Ponieważ V jest zbiorem pochłaniającym, więc $\bigcup_{n=1}^{\infty} nV = G$, a stąd $y+G \subset \mathrm{Fix} f$. Zatem $\mathrm{Fix} f = G$, czyli $f = \mathrm{id}$. Kończy to dowód twierdzenia. □

Z twierdzenia 4.25 wyprowadzamy poniższy wniosek.

Wniosek 4.26 *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie takim zbiorem, że zbiór* $(\mathrm{id}+2f)(A)$ *jest przedziałem. Jeśli funkcja f spełnia równanie* (4.1)*, to* $f = \mathrm{id}$ *lub istnieje taka liczba $c \in \mathbb{R}$, że $f(x) = -x/2 + c$ dla każdego $x \in A$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (4.1). Możemy założyć, że zbiór A jest niepusty. Niech $P = \{x + 2f(x) : x \in A\}$. Na podstawie uwagi 4.5 zbiór P zawiera się w $\mathrm{Fix}f$. Z założenia wynika, że P jest przedziałem. Jeśli $\mathrm{card}P > 1$, to $\mathrm{intFix}f \neq \emptyset$ i, korzystając z twierdzenia 4.25, otrzymujemy $f = \mathrm{id}$. Jeśli natomiast $\mathrm{card}P = 1$, to istnieje taki element $b \in \mathbb{R}$, że $x + 2f(x) = b$ dla każdego $x \in A$. Przyjmując $c = b/2$ dostajemy $f(x) = -x/2 + c$ dla każdego $x \in A$. □

Korzystając z wniosku 4.26 możemy sformułować następujący rezultat.

Wniosek 4.27 *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie takim niezdegenerowanym przedziałem, że* $0 \in \mathrm{cl}I$ *i niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunek* $\mathrm{Fix}f \subset 2f(\mathbb{R})$. *Załóżmy, że zbiór* $(\mathrm{id}+2f)(I)$ *jest przedziałem. Funkcja f spełnia równanie* (4.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy albo* $f = \mathrm{id}$, *albo* $f = -\mathrm{id}/2$.

Dowód. Wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy $I = (0, a)$ dla pewnej liczby $a \in (0, \infty]$, ponieważ w pozostałych dowód jest analogiczny. Załóżmy więc, że funkcja f spelnia równanie (4.1). Z twierdzenia R wynika równość $f(0) = 0$. Na podstawie wniosku R i uwagi 4.5 funkcja f spełnia równania (4.2) i (4.3).

Załóżmy, że $f \neq \mathrm{id}$. Na mocy wniosku 4.26 istnieje taka liczba $c \in \mathbb{R}$, że $f(x) = -x/2 + c$ dla każdego $x \in (0, a)$. Zatem $\mathrm{Fix}f \cap (0, a) \subset \{\frac{2}{3}c\}$. Z lematu 4.9 wynika, że $-\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$, a więc $\mathrm{Fix}f \cap (-a, a) \subset \{-\frac{2}{3}c, 0, \frac{2}{3}c\}$.

Wykażemy, że $c = 0$. Przypuśćmy nie wprost, że $c \neq 0$. Niech $b = \frac{1}{2}\min\{a, \frac{2}{3}|c|\}$. Oczywiście $b < a$. Z założenia wynika, że $b > 0$. Ponieważ $f(0) = 0$, więc $\mathrm{Fix}f \cap (-b, b) = \{0\}$. Korzystając z wniosku 4.8 otrzymujemy równość $f = -\mathrm{id}/2$. W szczególności dla każdego $x \in (0, a)$ zachodzą równości $-x/2 = f(x) = -x/2 + c$, a więc $c = 0$, co przeczy przypuszczeniu.

Zatem $c = 0$, a więc $\mathrm{Fix}f \cap (-a, a) = \{0\}$. Korzystając ponownie z wniosku 4.8 otrzymujemy równość $f = -\mathrm{id}/2$. Kończy to dowód. □

W poniższym twierdzeniu wykazujemy, że w przypadku rozwiązania f równania (4.1) przedstawioną w twierdzeniu 4.25 własność zbioru $\mathrm{Fix}f$ ma także, przy odpowiednich założeniach, zbiór $A_f(-1/2)$.

Twierdzenie 4.28 *Niech X będzie przestrzenią liniowo–topologiczną i niech $f\colon X \to X$ będzie takim rozwiązaniem równania* (4.1), *że* $\mathrm{Fix}f \subset 2f(X)$. *Jeśli* $\mathrm{int}A_f(-1/2) \neq \emptyset$ *to* $f = -\mathrm{id}/2$.

Dowód. Załóżmy, że $\mathrm{int}A_f(-1/2) \neq \emptyset$. Ustalmy dowolny punkt $x_0 \in \mathrm{int}A_f(-1/2)$. Niech $U_0 \subset X$ będzie takim otoczeniem zera, że $x_0 + U_0 \subset A_f(-1/2)$. Istnieje takie symetryczne otoczenie zera $U_1 \subset X$, że $U_1 \subset U_0$. Niech $V \subset X$ będzie takim otoczeniem zera, że $V + V + V + V + V + V \subset U_1$.

Wykażemy, że $V \cap \mathrm{Fix}f = \{0\}$. Z twierdzenia R wynika, że $f(0) = 0$, a więc $0 \in V \cap \mathrm{Fix}f$. Ustalmy dowolny punkt $x \in \mathrm{Fix}f \cap V$. Zachodzą inkluzje

$$x_0 - (x + 2f(x)) = x_0 - 3x \in x_0 - 3V \subset x_0 - U_1 \subset x_0 + U_0 \subset A_f(-1/2),$$

oraz

$$x_0 + 2f(x + 2f(x)) = x_0 + 6x \in x_0 + 6V \subset x_0 + U_1 \subset x_0 + U_0 \subset A_f(-1/2).$$

Ponadto, oczywiście, $x_0 \in A_f(-1/2)$. Stąd na mocy lematu 4.14 wynika, że $x + 2f(x) \in A_f(-1/2)$. Z uwagi 4.5 wynika, że f spełnia równanie (4.3). Zatem $3x = x + 2f(x) \in A_f(-1/2) \cap \mathrm{Fix}f \subset \{0\}$. Stąd wynika, że $x = 0$.

Na mocy wniosku R funkcja f spełnia równanie (4.2). Korzystając z wniosku 4.8 otrzymujemy równość $f = -\mathrm{id}/2$. Kończy to dowód twierdzenia. □

Poniższe twierdzenie jest konsekwencją lematu 4.12.

Twierdzenie 4.29 *Niech G będzie grupą abelową bez elementów rzędu 2 oraz niech $\mathcal{I} \subset 2^G$ będzie właściwym ideałem podzbiorów grupy G. Załóżmy, że $x + A \in \mathcal{I}$ dla wszystkich zbiorów $A \in \mathcal{I}$ oraz punktów $x \in G$. Niech $f\colon G \to G$ będzie funkcją. Załóżmy, że istnieje zbiór pochłaniający $U \subset G$ i zbiór $B \subset \mathrm{Fix}f$ spełniające warunek $\bigcup_{n=1}^{\infty} n(U \backslash B) \in \mathcal{I}$. Jeśli funkcja f spełnia równanie (4.1), to $G \backslash \mathrm{Fix}f \in \mathcal{I}$ oraz $6G \subset \mathrm{Fix}f$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (4.1). Niech $U \subset G$ będzie otoczeniem zera, a $B \in \mathcal{I}$ takim podzbiorem zbioru $\mathrm{Fix}f$, że $\bigcup_{n=1}^{\infty} n(U \backslash B) \in \mathcal{I}$. Z wniosku 4.11 wynika, że $n\mathrm{Fix}f \subset \mathrm{Fix}f$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$. Zatem dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzą inkluzje

$$nU \backslash \mathrm{Fix}f \subset nU \backslash n\mathrm{Fix}f \subset nU \backslash nB \subset n(U \backslash B).$$

Stąd wynika, że

$$G \backslash \mathrm{Fix}f = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU \backslash \mathrm{Fix}f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} n(U \backslash B),$$

a zatem $G \backslash \mathrm{Fix}f \in \mathcal{I}$.

Wykażemy teraz, że $6G \subset \mathrm{Fix}f$. Ustalmy dowolny punkt $x \in G$. Przesunięcie każdego zbioru należącego do ideału $\mathcal{I}$ także należy do $\mathcal{I}$, a więc $G \backslash (\mathrm{Fix}f - x) = (G \backslash \mathrm{Fix}f) - x \in \mathcal{I}$ i podobnie $G \backslash (\mathrm{Fix}f - 2x) \in \mathcal{I}$. Niech $E = G \backslash \mathrm{Fix}f \cup G \backslash (\mathrm{Fix}f - x) \cup G \backslash (\mathrm{Fix}f - 2x)$. Oczywiście $E \in \mathcal{I}$. Ponieważ ideał $\mathcal{I}$ jest właściwy, więc $G \notin \mathcal{I}$. Zatem $E \neq G$, a stąd $G \backslash E \neq \emptyset$. Ustalmy punkt $y \in G \backslash E$. Ponieważ $G \backslash E = \mathrm{Fix}f \cap (\mathrm{Fix}f - x) \cap (\mathrm{Fix}f - 2x)$, więc elementy $y, y + x$ i $y + 2x$ należą do zbioru $\mathrm{Fix}f$. Stąd i z lematu 4.12 wynika, że $6mx + ky \in \mathrm{Fix}f$ dla wszystkich liczb $m, k \in \mathbb{Z}$. W szczególności $6x \in \mathrm{Fix}f$. Zatem $6G \subset \mathrm{Fix}f$, czego należało dowieść. □

Korzystając z twierdzenia 4.29 możemy udowodnić poniższy rezultat.

Twierdzenie 4.30 *Niech G będzie abelową grupą topologiczną bez elementów rzędu 2 i niech $\mathfrak{M}$ będzie σ-ciałem podzbiorów grupy G zawierającym wszystkie borelowskie podzbiory tej grupy. Załóżmy, że $x + A \in \mathfrak{M}$ oraz $nA \in \mathfrak{M}$ dla wszystkich zbiorów $A \in \mathfrak{M}$, punktów $x \in G$ i liczb $n \in \mathbb{N}$. Niech μ będzie niezmienniczą ze względu na przesunięcia niezerową i zupełną miarą określoną na σ-ciele $\mathfrak{M}$. Załóżmy, że dla* *każdego zbioru $A \in \mathfrak{M}$ miaru μ zero i dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ zbiór nA jest miary μ zero. Niech $f\colon G \to G$ będzie funkcją. Załóżmy istnienie pochłaniającego otoczenia zera $U \subset G$ i takiego $\mathfrak{M}$-mierzalnego podzbioru B zbioru* $\mathrm{Fix}f$, *że* $\mu(U \backslash B) = 0$. *Jeśli funkcja f jest rozwiązaniem równania* (4.1), *to* $\mathrm{Fix}f \in \mathfrak{M}$, $\mu(G \backslash \mathrm{Fix}f) = 0$ *i* $6G \subset \mathrm{Fix}f$.

Dowód. Niech $\mathcal{I} = \{A \in \mathfrak{M} : \mu(A) = 0\}$. Rodzina $\mathcal{I}$ jest właściwym σ-ideałem podzbiorów grupy G. Z niezmienniczości miary μ na przesunięcia wynika, że $x + A \in \mathcal{I}$ dla wszystkich zbiorów $A \in \mathcal{I}$ i punktów $x \in G$. Stosując twierdzenie 4.29 otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Analogicznie można udowodnimy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.31 *Niech G będzie abelową grupą topologiczną drugiej kategorii Baire'a, bez niezerowych elementów rzędu skończonego. Załóżmy, że każde otoczenie zera w G jest zbiorem pochłaniającym oraz że dla każdego otoczenia zera $U \subset G$ i dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje otoczenie zera $W \subset G$ spełniające warunek $W \subset mW \subset U$. Niech $f\colon X \to X$ będzie funkcją. Załóżmy istnienie takiego otoczenia zera $U_0 \subset G$, że zbiór* $U_0 \backslash \mathrm{Fix}f$ *jest pierwszej kategorii. Jeśli funkcja f jest rozwiązaniem równania* (4.1), *to* $f = \mathrm{id}$.

Dowód. Niech $\mathcal{I}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów pierwszej kategorii grupy G. Zbiór $\mathcal{I}$ jest właściwym σ-ideałem podzbiorów grupy G, a ponadto $x + A \in \mathcal{I}$ dla wszystkich zbiorów $A \in \mathcal{I}$ oraz punktów $x \in G$.

Pokażemy, że $nA \in \mathcal{I}$ dla wszystkich zbiorów $A \in \mathcal{I}$ i liczb $n \in \mathbb{N}$. W tym celu udowodnimy najpierw, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla każdego zbioru $A \subset G$ zachodzi inkluzja

$$\mathrm{int}nA \subset n\mathrm{int}A. \tag{4.14}$$

Ustalmy liczbę $n \in \mathbb{N}$, dowolny zbiór $A \subset G$ i punkt $x \in \mathrm{int}nA$. Istnieje takie otoczenie zera $U \subset G$, że $x + U \subset nA$. W szczególności $x \in nA$, skąd wynika, że $x = ny$ dla pewnego $y \in A$. Z założenia twierdzenia wynika, że istnieje otoczenie zera $W \subset G$ spełniające warunek $W \subset nW \subset U$. Zatem $ny + nW = x + nW \subset x + U \subset nA$. Stąd, wobec braku niezerowych elementów rzędu skończonego w grupie G, wynika inkluzja $y + W \subset A$. Zatem $y \in \mathrm{int}A$, a więc $x = ny \in n\mathrm{int}A$.

Udowodnimy teraz, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla każdego zbioru $A \subset G$ spełniony jest warunek

$$\mathrm{cl}nA \subset n\mathrm{cl}A. \tag{4.15}$$

Ustalmy więc liczbę $n \in \mathbb{N}$, dowolny zbiór $A \subset G$ i punkt $x \in \mathrm{cl}nA$. Ustalmy dowolne otoczenie zera $U \subset G$. Z założenia twierdzenia wynika istnienie takiego otoczenia zera $W \subset G$, że $W \subset nW \subset U$. Oczywiście $(x + W) \cap nA \neq \emptyset$. Ustalmy punkt $y \in (x + W) \cap nA$. Ponieważ $x \in y - W \subset nA - nW = n(A - W) \subset nG$, więc istnieje taki element $z \in G$, że $x = nz$. Zatem $(nz + W) \cap nA \neq \emptyset$. Stąd wobec inkluzji $W \subset nW$ wynika, że $(nz + nW) \cap nA \neq \emptyset$. Ponieważ grupa G nie ma niezerowych elementów skończonego rzędu, więc z ostatniego warunku wynika, że $(z+W) \cap A \neq \emptyset$. W szczególności $(z+U) \cap A \neq \emptyset$. Stąd, wobec dowolności otoczenia zera U, wnioskujemy, że $z \in \mathrm{cl}A$. Zatem $x = nz \in n\mathrm{cl}A$.

Z warunków (4.14) i (4.15) wynika, że dla każdego zbioru $A \subset G$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą inkluzje $\mathrm{intcl}nA \subset \mathrm{int}n\mathrm{cl}A \subset n\mathrm{intcl}A$. Zatem dla każdego zbioru nigdziegęstego $A \subset G$ zbiór nA jest nigdziegęsty dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd wynika, że jeśli zbiór $A \subset G$ jest pierwszej kategorii, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór nA także jest pierwszej kategorii.

Stosując twierdzenie 4.29 do σ–ideału $\mathcal{I}$ otrzymujemy inkluzję $6G \subset \mathrm{Fix}f$. Z założenia wynika, że istnieje zbiór otwarty $W \subset G$ spełniający warunek $W \subset 6W \subset G$. Stąd $6W \subset 36W \subset 6G \subset \mathrm{Fix}f$. Zatem $W \subset \mathrm{Fix}f$, a więc $\mathrm{intFix}f \neq \emptyset$. Stąd i z twierdzenia 4.25 wynika, że $f = \mathrm{id}$. □

Z twierdzeń 4.30 i 4.31 wyprowadzamy następujący wniosek.

Wniosek 4.32 *Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją. Załóżmy istnienie takiego otoczenia zera $U \subset \mathbb{R}^n$, że zbiór $U \setminus \mathrm{Fix}f$ jest miary Lebesgue'a zero lub pierwszej kategorii. Jeśli funkcja f spełnia równanie* (4.1)*, to $f = \mathrm{id}$.*

Korzystając z twierdzeń udowodnionych w paragrafie 4.2 sformułujemy teraz wnioski dotyczące równania (4.1).

Wniosek 4.33 *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że zbiór $(\mathrm{id} + 2f)(\mathbb{R})$ jest przedziałem. Funkcja f spełnia równanie* (4.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy albo $f = \mathrm{id}$, albo $f = -\mathrm{id}/2$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f spełnia równanie (4.1). Z wniosku R i uwagi 4.5 wynika, że funkcja f spełnia równania (4.2) i (4.3). Stąd, na podstawie twierdzenia 4.18, wynika postać funkcji f. □

Wniosek 4.34 *Niech I będzie jednym z przedziałów $(-\infty, 0)$ lub $(0, \infty)$ i niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunek $\mathrm{Fix}f \subset 2f(\mathbb{R})$. Załóżmy, że zbiór $f(I)$ jest przedziałem. Jeśli funkcja f spełnia równanie* (4.1)*, to $f = \mathrm{id}$ lub $f = -\mathrm{id}/2$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja f jest rozwiązaniem równania (4.1). Na podstawie wniosku R i uwagi 4.5 funkcja f spełnia równania (4.2) i (4.3). Załóżmy, że $f \neq -\mathrm{id}/2$. Z twierdzenia 4.23 wynika, że $I \subset \mathrm{Fix}f$. Stąd i z lematu 4.9 wynika inkluzja $-I \subset \mathrm{Fix}f$. Na podstawie twierdzenia R funkcja f spełnia równość $f(0) = 0$. Ostatecznie $f = \mathrm{id}$, co kończy dowód. □

W poniższym twierdzeniu wyznaczamy rozwiązanie równania (4.3) w klasie funkcji analitycznych.

Twierdzenie 4.35 *Niech $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcja analityczną. Następujące warunki są parami równoważne:*
(a) *funkcja f spełnia równanie* (4.1)*;*
(b) *funkcja f spełnia równanie* (4.3)*;*
(c) *$f = \mathrm{id}$ lub $f = -\mathrm{id}/2$.*

Dowód. Wobec uwag 4.5 i 4.6 wystarczy wykazać prawdziwość implikacji $(b) \Rightarrow (c)$. Załóżmy więc, że funkcja f spełnia równanie (4.3). Niech $h = \mathrm{id} + 2f$. Oczywiście, funkcja h jest analityczna. Jeśli funkcja h jest stała, to istnieje taka liczba $b \in \mathbb{C}$, że $f(z) = -z/2 + b$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Na mocy uwagi 4.6 zachodzi równość $b = 0$, a zatem $f = -\mathrm{id}/2$. Załóżmy teraz, że funkcja h nie jest stała. Wtedy z analityczności funkcji h wynika, że zbiór $h(\mathbb{C})$ jest otwarty oraz, oczywiście, niepusty. Funkcja f spełnia równanie (4.3), a więc $f(w) = w$ dla każdego $w \in h(\mathbb{C})$. Stąd i z analityczności funkcji f wynika, że $f = \mathrm{id}$. Kończy to dowód twierdzenia. $\square$

Przykład 4.36 Założenie analityczności funkcji f jest istotne w twierdzeniu 4.35. Niech $a, b \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$ będą różnymi liczbami i niech $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(z) = a\mathfrak{Re}z + ib\mathfrak{Im}z$. Funkcja f spełnia równania (4.1) oraz (4.2) i (4.3), ale nie jest równa ani id, ani $-\mathrm{id}/2$.

Bibliografia

[1] J. Aczel, J. Dhombres, *Functional equations in several variables*, Cambridge University Press 1989.

[2] M. Balcerowski, *On the functional equation* $x+f(y+f(x)) = y+f(x+f(y))$, Aequationes Math. 75 (2008), 297–303.

[3] M. Balcerowski, *On the functional equation* $f(x + g(y)) - f(y + g(y)) = f(x) - f(y)$ *on groups*, Aequationes Math. 78 (2009), 247–255.

[4] M. Balcerowski, *On the functional equations related to a problem of Z. Boros and Z. Daróczy*, Acta Math. Hungar. 138 (2013), 329–340.

[5] K. Baron, W. Jarczyk, *Recent results on functional equations in a single variable*, Aequationes Math. 61 (2001), 1–48.

[6] Z. Boros and Z. Daróczy, *Problem 11. Report of Meeting. The Forty-third International Symposium on Functional Equations (Batz-sur-Mer, 2005)*, Aequationes Math. 71 (2006), 174–200.

[7] Z. Boros and Z. Daróczy, *A composite functional equation with additive solutions*, Publ. Math. Debrecen 69 (2006), 245–253.

[8] N. Brillouët–Belluot, *Problem 15* and *Remark 14, Report of meeting. The Thirty–eight International Symposium on Functional Equations (Noszvaj, 2000)*. Aequationes Math. 61 (2001), 281–320.

[9] N. Brillouët–Belluot, *On a symmetric functional equation in two variables*, Aequationes Math. 68 (2004), 10–20.

[10] J. Brzdęk, *Problem 17, Report of meeting. The Forty–fourth International Symposium on Functional Equations (Louisville, 2006)*, Aequationes Math. 73 (2007), 196.

[11] Che Tat Ng, Weinian Zhang, *An algebraic equation for linear operators*, Linear Algebra Appl. 412 (2006), 303–325.

[12] R. Cuculière, *Problem 11345*, Amer. Math. Monthly 115 (2008), 166.

[13] Z. Daróczy *17.Problem. Report of Meeting. The Forty–first International Symposium on Functional Equations June 8–15, 2003, Noszvaj, Hungary*, Aequationes Math. 67 (2004), 312.

[14] Z. Daróczy, *On translative and quasi–commutative operations*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 24 (2004), 15–28.

[15] J. Dhombres, *Some aspects of functional equations*, Lecture Notes. Chulalongkorn University, Department of Mathematics, Bangkok, 1979.

[16] R. Ger, *On a problem of Roger Cuculière*, Journal of Informatics and Mathematical Sciences 1 (2009), 157–163.

[17] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis, vol 1: Structure of Topological Groups. Integration theory. Group Representations*, Berlin Springer Verl, 1963.

[18] J. Jarczyk, W. Jarczyk, *On a problem of N. Brillouët–Belluot*, Aequationes Math. 72 (2006), 198–200.

[19] W. Jarczyk, *On continuous functions which are additive on their graphs. Selected topics in functional equations (Graz, 1986)*, Ber. 292, 66 pp., Ber. Math.–Statist. Sekt. Forschungsgesellsch. Joanneum, 285–296, Forschungszentrum Graz, Graz, 1988.

[20] M. Kuczma, *Functional equations in a single variable*, Monografie Matematyczne 46, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1968.

[21] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[22] M. Kuczma, B. Choczewski, R. Ger, *Iterative functional equations*, Cambridge University Press, 1990.

[23] M. E. Kuczma, *On the mutual noncompatibility of homogeneous analytic non–power means*. Aequationes Math. 45 (1993), 300–321.

[24] J. Matkowski, *Cauchy functional equation on a restricted domain and commuting functions, Iteration theory and its functional equations (Lochau, 1984)*, 101–106, Lecture Notes in Math. 1163, Springer, Berlin, 1985.

[25] J. Matkowski, *On the functional equation* $\phi(x+\phi(x)) = \phi(x)+\phi(\phi(x))$, Proceedings of the Twenty–third International Symposium on Functional Equations, Gargnano, Italy, June 2–June 11, 1985, Centre for Information Theory, Faculty of Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, 24–25.

[26] J. Matkowski, *Functions which are additive on their graphs and some generalizations*, Rocznik Nauk.–Dydakt. Prace Mat. 13 (1993), 233–240.

[27] S. Nabeya, *On the functional equation $f(p + qx + rf(x)) = a + bx + cf(x)$*, Aequationes Math. 11 (1974), 199–211.

[28] A. Najdecki, *O stabilności pewnych uogólnień równań funkcyjnych Cauchy'ego, d'Alemberta i funkcji kwadratowej*, Rozprawa doktorska, Akademia Pedagogiczna, Kraków, 2006.

[29] J. Rätz, *On the functional equation $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$*, Aequationes Math. 86 (2013), 187–200.

[30] J. Rätz, *3.1 Remark. Report of Meeting. The fiftieth International Symposium on Functional Equations, Hajdúszoboszló, Hungary, June 17–24, 2012*, Aequationes Math. (w druku).

[31] J. Rätz, *On the functional equation $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$, Report of Meeting. The Forty–eight International Symposium of Functional Equations, June 13–18, 2010, Batz–sur–Mer, France*, Aequationes Math. 81 (2011), 300.

[32] J. Rätz, komunikacja listowna.

[33] M. Sablik, *Remark 4, Report of meeting. 10th International Conference on Functional Equations and Inequalities (Będlewo, 2005).* Ann. Acad. Paed. Cracoviensis Studia Math. 5 (2006), 127–165.

[34] J. Sikorska, *Differentiable solutions of a functional equation related to the non–power means*, Aequationes Math. 55 (1998), 146–152.

[35] J. Sikorska, *On a functional equation related to power means*, Aequationes Math. 66 (2003), 261–276.

[36] R. Stong, *On a functional equation*, Amer. Math. Monthly 116 (2009), 753.

[37] J. Tabor, J. Tabor, *On a linear iterative equation*, Results in Math. 27 (1995), 412–421.

[38] Yingying Zeng, Weinian Zhang, *Continuous aolutions of an iterative–difference equation and Brillouët problem*, Publ. Math. Debrecen 78 (2011), 613–624.