Sumowalność i typ potęgowy indeksu Szlenka sum prostych przestrzeni Banacha

Szymon Draga

Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego
w Katowicach

Rozprawa doktorska

napisana pod kierunkiem
dra hab. Janusza Morawca
oraz dra Tomasza Kochanka

Katowice 2017

Spis treści

Wstęp

Celem niniejszej rozprawy jest zbadanie zachowania sumowalności oraz typu potęgowego indeksu Szlenka ogólnych sum prostych przestrzeni Banacha. Do głównych tez należy zaliczyć:

- twierdzenie mówiące, że c_0-suma prosta rodziny przestrzeni Banacha z jednakowo sumowalnym indeksem Szlenka ma sumowalny indeks Szlenka;
- wyprowadzenie wzoru na typ potęgowy Szlenka $\mathfrak{E}$-sumy prostej przestrzeni Banacha, przy założeniu ℓ_p-asymptotyki przestrzeni $\mathfrak{E}^*$;
- podanie przykładów przestrzeni Banacha o typie potęgowym równym 1, lecz niesumowalnym indeksie Szlenka;
- wykazanie, że sumowalność indeksu Szlenka oraz jego typ potęgowy wyznaczane są przez ośrodkowe podprzestrzenie.

Rozprawa ta oparta została w dużej mierze na fragmentach dwóch artykułów, współautorskich z Tomaszem Kochankiem: *Direct sums and summability of the Szlenk index* (Journal of Functional Analysis **271** (2016), 642–671) oraz *The Szlenk power type and tensor products of Banach spaces* (Proceedings of the American Mathematical Society **145** (2017), 1685–1698).

Pojęcie indeksu Szlenka zostało wprowadzone przez Wiesława Szlenka w 1968 roku w celu udzielenia negatywnej odpowiedzi na pytanie zapisane w Księdze Szkociej pod numerem 49, to znaczy na pytanie o istnienie przestrzeni (izomorficzne) uniwersalnej w klasie wszystkich ośrodkowych i refleksywnych przestrzeni Banacha. Późniejsze badania wykazały wiele związków indeksu Szlenka z geometrią, głównie z asymptotycznie jednostajnie gładkimi i *-słabo asymptotycznie jednostajnie wypukłymi przenormowaniami przestrzeni Banacha. W niniejszej rozprawie skupiamy się na przestrzeniach nieskończenie wymiarowych, których indeks Szlenka jest możliwie najmniejszy, czyli wynosi ω. Wiele fundamentalnych twierdzeń dotyczących takich przestrzeni zostało udowodnionych w artykule Godefroya, Kaltona i Lanciena *Szlenk indices and uniform homeomorphisms* (Transactions of the American Mathematical Society **353** (2001), 3895–3918), który bardzo często cytujemy.

W pierwszym rozdziale podajemy podstawowe definicje i przykłady oraz krótko omawiamy związki indeksu Szlenka z asymptotyczną geometrią przestrzeni Banacha. Wyznaczamy typ potęgowy przestrzeni ℓ_p, a także przypominamy definicję oryginalnej przestrzeni Tsirelsona, która to stanowi refleksywny przykład przestrzeni o sumowalnym indeksie Szlenka.

Kolejny rozdział zawiera informacje o *-słabo zerowych odwzorowaniach drzewowych, które są wygodnym narzędziem służącym do opisu derywacji Szlenka. Podajemy także dość precyzyjne twierdzenia o przenormowaniach przestrzeni Banacha o indeksie ω.

Trzeci rozdział zawiera wyniki związane z sumowalnością indeksu Szlenka. Zaczynamy od opisu ogólnych sum prostych przestrzeni Banacha. Następnie dowodzimy, że c_0-suma prosta rodziny ośrodkowych przestrzeni z jednakowo sumowalnym indeksem Szlenka także ma sumowalny indeks Szlenka. W dalszej części pokazujemy, że analogon tego twierdzenia nie zachodzi dla ogólniejszych sum prostych (przykładem jest tu tsirelsonowska suma prosta przeliczalnie wielu kopii przestrzeni c_0); zachodzi on jednak w szczególnym przypadku – kiedy składowe przestrzenie są skończenie wymiarowe.

W czwartym rozdziale zamieszczone zostały tezy rozprawy związane z typem potęgowym. Zaczynamy od przytoczenia pojęć przestrzeni ℓ_p-asymptotycznej i kraty Banacha, a następnie dowodzimy pewnych oszacowań w takich przestrzeniach. Dalej wyprowadzamy wzór na typ potęgowy ogólnej $\mathfrak{E}$-sumy prostej *potęgowo ograniczonego* ciągu ośrodkowych przestrzeni Banacha, przy założeniu ℓ_p-asymptotyki przestrzeni $\mathfrak{E}^*$ względem bazy dualnej. Pokazujemy też, że założenie ℓ_p-asymptotyki jest istotne i wnioskujemy, że wspomniana tsirelsonowska suma prosta nieskończenie wielu kopii przestrzeni c_0 ma typ potęgowy 1.

W ostatnim rozdziale dowodzimy, że dana przestrzeń Banacha ma sumowalny indeks Szlenka wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej ośrodkowa podprzestrzeń ma tę własność. Podobnie pokazujemy, że dana przestrzeń Banacha o indeksie ω posiada ośrodkową podprzestrzeń, która ma ten sam typ potęgowy co cała przestrzeń. Wyniki te pozwalają na opuszczenie założenia ośrodkowości w twierdzeniach z poprzednich rozdziałów. Rozprawę kończymy wyznaczeniem typu potęgowego „długich" przestrzeni ℓ_p oraz podaniem nietrywialnego przykładu nieośrodkowej przestrzeni Banacha z sumowalnym indeksem Szlenka – przestrzeni funkcji ciągłych określonych na przestrzeni Mrówki.

Chcę w tym miejscu serdecznie podziękować Profesorowi Karolowi Baronowi oraz Profesorowi Januszowi Morawcowi za kilkuletnią opiekę i pomoc. Dziękuję także Doktorowi Tomaszowi Kochankowi za poświęcony czas, cenną pomoc i współpracę, bez których ta rozprawa na pewno by nie powstała. Również dziękuję Doktorowi Tomaszowi Kani za zwrócenie uwagi na zastosowanie twierdzenia 5.2 do przestrzeni postaci $\mathcal{C}(K)$.

Rozdział 1

Podstawowe własności indeksu Szlenka

1.1. Definicje i przykłady

Rozpoczniemy od przywołania definicji derywacji i indeksu Szlenka danej przestrzeni Banacha. Pojęcia te zostały wprowadzone (w nieco innej formie) przez Wiesława Szlenka w pracy [40] w celu wykazania, że nie istnieje przestrzeń uniwersalna w klasie wszystkich ośrodkowych i refleksywnych przestrzeni Banacha, o czym wspomnieliśmy we wstępie. Nie będziemy tutaj odtwarzać dokładnego dowodu, a jedynie naszkicujemy jego ideę. Mianowicie Szlenk przyporządkował każdej ośrodkowej i refleksywnej przestrzeni Banacha pewną przeliczalną liczbę porządkową (*indeks Szlenka*). Udowodnił on, że liczba ta jest izomorficznym niezmiennikiem oraz że podprzestrzeniom przyporządkowujemy liczbę nie większą niż całej przestrzeni. Dalej Szlenk skonstruował rodzinę ośrodkowych i refleksywnych przestrzeni Banacha o dowolnie dużym (przeliczalnym) indeksie.

Ustalmy przestrzeń Banacha X; zakładamy, że wszystkie rozpatrywane przestrzenie są niezerowymi przestrzeniami nad ciałem liczb rzeczywistych. Symbolem B_X oznaczać będziemy domkniętą kulę jednostkową w przestrzeni X, zaś symbolem S_X – sferę jednostkową.

Definicja 1.1. Niech $K \subset X^*$ będzie zbiorem *-słabo zwartym. Jeżeli $\varepsilon > 0$, to zbiór

$$\iota_\varepsilon K := K \setminus \{V \subset X^* \colon V \text{ jest zbiorem } {}^*\text{-słabo otwartym oraz } \operatorname{diam}(V \cap K) \leqslant \varepsilon\}$$

nazywamy *derywacją Szlenka* zbioru K. Ponadto przyjmujemy $\iota_\varepsilon^0 K = K$, dla dowolnej liczby porządkowej α definiujemy $\iota_\varepsilon^{\alpha+1} K = \iota_\varepsilon(\iota_\varepsilon^\alpha K)$, zaś dla granicznej liczby porządkowej α kładziemy $\iota_\varepsilon^\alpha K = \bigcap_{\beta<\alpha} \iota_\varepsilon^\beta K$.

Uwaga 1.2. Łatwo zauważyć, że dla *-słabo zwartego zbioru K oraz dla dowolnych $\varepsilon > 0$ i liczby porządkowej α zbiór $\iota_\varepsilon^\alpha K$ jest *-słabo zwarty.

Definicja 1.3. Liczbę $\operatorname{Sz}(X, \varepsilon) := \min\{\alpha \colon \iota_\varepsilon^\alpha B_{X^*} = \varnothing\}$ nazywamy *ε-indeksem Szlenka* przestrzeni X, zaś liczbę $\operatorname{Sz}(X) := \sup\{\operatorname{Sz}(X, \varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}$ – *indeksem Szlenka* tej przestrzeni.

Intuicyjnie rzecz biorąc, indeks Szlenka mierzy jak bardzo różnią się od siebie topologie – normowa i *-słaba – na dualnej kuli jednostkowej; ε-indeks Szlenka odpowiada zatem na pytanie o liczbę kroków (derywacji) potrzebnych do usunięcia wszystkich punktów z tej kuli.

Naturalnym pytaniem, które od razu się nasuwa, jest pytanie o poprawność definicji 1.3. Twierdzenie, które podaje warunki równoważne na ową poprawność, okazuje się nietrywialne i przytoczymy je tutaj bez dowodu; można go znaleźć w [7, §1.5].

Twierdzenie 1.4. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *indeks Szlenka przestrzeni X jest poprawnie zdefiniowany, to znaczy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba porządkowa α, dla której $\iota_\varepsilon^\alpha B_{X^*} = \varnothing$;*

(ii) *X jest przestrzenią Asplunda, to znaczy każda wypukła funkcja ciągła określona na zbiorze otwartym $U \subset X$ jest różniczkowalna w sensie Frécheta na gęstym pozbiorze typu G_δ zbioru U;*

(iii) *przestrzeń sprzężona do każdej ośrodkowej podprzestrzeni przestrzeni X jest ośrodkowa (w szczególności, dla ośrodkowej przestrzeni X, przestrzeń X^* jest ośrodkowa).*

Przykład 1.5. Przestrzeń X jest skończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Sz}(X) = 1$.

Dowód. Jeżeli przestrzeń X jest skończenie wymiarowa, to topologia przestrzeni X^* pokrywa się z jej topologią *-słabą, więc $\mathrm{Sz}(X, \varepsilon) = 1$ dla każdego $\varepsilon > 0$. Jeżeli zaś przestrzeń X jest nieskończenie wymiarowa, to każde *-słabe otoczenie zera $V \subset X^*$ zawiera nieskończenie wymiarową przestrzeń liniową. Oznacza to, że $\mathrm{diam}(V \cap B_{X^*}) = 2$, a więc $\mathrm{Sz}(X, 1) > 1$. □

Równolegle do indeksu Szlenka definiujemy także *wypukły indeks Szlenka*. Mianowicie, dla *-słabo zwartego zbioru $K \subset X^*$ oraz $\varepsilon > 0$, kładziemy

$$\hat{\iota}_\varepsilon K = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*} \iota_\varepsilon K,$$

co oznacza *-słabe domknięcie otoczki wypukłej zbioru $\iota_\varepsilon K$. Następnie, tak samo jak poprzednio, umawiamy się, że $\hat{\iota}_\varepsilon^0 K = K$, dla dowolnej liczby porządkowej α definiujemy $\hat{\iota}_\varepsilon^{\alpha+1} K = \hat{\iota}_\varepsilon(\hat{\iota}_\varepsilon^\alpha K)$, zaś dla granicznej liczby porządkowej α przyjmujemy $\hat{\iota}_\varepsilon^\alpha K = \bigcap_{\beta<\alpha} \hat{\iota}_\varepsilon^\beta K$.

Definicja 1.6. Liczbę $\mathrm{Cz}(X, \varepsilon) := \min\{\alpha\colon \hat{\iota}_\varepsilon^\alpha B_{X^*} = \varnothing\}$ nazywamy *wypukłym ε-indeksem Szlenka* przestrzeni X, zaś liczbę $\mathrm{Cz}(X) := \sup\{\mathrm{Cz}(X, \varepsilon)\colon \varepsilon > 0\}$ – *wypukłym indeksem Szlenka* tej przestrzeni.

Uwaga 1.7. Łatwo zauważyć, że dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $\mathrm{Sz}(X, \varepsilon) \leqslant \mathrm{Cz}(X, \varepsilon)$, a w konsekwencji nierówność $\mathrm{Sz}(X) \leqslant \mathrm{Cz}(X)$. Można jednak udowodnić o wiele więcej: mianowicie wypukły indeks Szlenka jest poprawnie zdefiniowany wtedy i tylko wtedy, gdy indeks Szlenka jest poprawnie zdefiniowany, a ponadto przy założeniu ośrodkowości przestrzeni X zachodzi równość $\mathrm{Cz}(X) = \mathrm{Sz}(X)$ (zob. [27]). Otwarte pozostaje jednak pytanie, czy oba indeksy są równoważne, to znaczy czy istnieje taka stała $C > 0$, że nierówność $\mathrm{Cz}(X, \varepsilon) \leqslant \mathrm{Sz}(X, \varepsilon/C)$ zachodzi dla każdego $\varepsilon > 0$. Wiadomo jedynie, że odpowiedź jest pozytywna przy założeniach ośrodkowości przestrzeni X oraz $\mathrm{Sz}(X) = \mathrm{Sz}(X^*) = \omega$ (zob. [15, Theorem 4.9]).

Od tej pory milcząco zakładać będziemy, że indeks Szlenka wszelkich rozpatrywanych przestrzeni jest poprawnie określony. Jako że w przypadku skończenie wymiarowym wprowadzone pojęcia trywializują się, dodatkowo zakładać będziemy, że mamy do czynienia z przestrzeniami nieskończenie wymiarowymi, o ile nie zostanie powiedziane inaczej.

Kolejne stwierdzenie zagwarantuje istnienie tytułowego typu potęgowego, i ma na tyle duże znaczenie dla tej rozprawy, że udowodnimy je w szczegółach.

Stwierdzenie 1.8. *Dla dowolnych $\varepsilon, \eta > 0$ zachodzi nierówność* $\mathrm{Sz}(X, \varepsilon\eta) \leqslant \mathrm{Sz}(X, \varepsilon)\mathrm{Sz}(X, \eta)$.

Dowód. Stosując indukcję pozaskończoną, pokażemy, że

$$\iota_{\varepsilon\eta}^{\alpha \mathrm{Sz}(X,\eta)} B_{X^*} \subset \iota_\varepsilon^\alpha B_{X^*} \quad \text{dla dowolnej liczby porządkowej } \alpha, \tag{1.1}$$

co zakończy dowód.

Dla $\alpha = 0$ nie ma czego dowodzić. Załóżmy zatem, że warunek (1.1) zachodzi dla pewnej liczby porządkowej α. Ustalmy $x^* \in B_{X^*} \setminus \iota_\varepsilon^{\alpha+1} B_{X^*}$; wobec założenia indukcyjnego możemy założyć, że $x^* \in \iota_\varepsilon^{\alpha} B_{X^*}$. Niech $V \subset X^*$ będzie takim *-słabym otoczeniem punktu x^*, że

$$\operatorname{diam}(V \cap \iota_{\varepsilon\eta}^{\alpha\mathrm{Sz}(X,\eta)} B_{X^*}) \leqslant \operatorname{diam}(V \cap \iota_\varepsilon^{\alpha} B_{X^*}) \leqslant \varepsilon.$$

Niech $C \subset X^*$ będzie dowolną taką kulą domkniętą o promieniu ε, że $V \cap \iota_{\varepsilon\eta}^{\alpha\mathrm{Sz}(X,\eta)} B_{X^*} \subset C$. Bezpośrednia indukcja pozaskończona pokazuje, że

$$V \cap \iota_{\varepsilon\eta}^{\beta}(\iota_{\varepsilon\eta}^{\alpha\mathrm{Sz}(X,\eta)} B_{X^*}) \subset \iota_{\varepsilon\eta}^{\beta} C \quad \text{dla dowolnej liczby porządkowej } \beta.$$

W szczególności

$$V \cap \iota_{\varepsilon\eta}^{(\alpha+1)\mathrm{Sz}(X,\eta)} B_{X^*} \subset \iota_{\varepsilon\eta}^{\mathrm{Sz}(X,\eta)} C = \varnothing.$$

Stąd $x^* \notin \iota_{\varepsilon\eta}^{(\alpha+1)\mathrm{Sz}(X,\eta)} B_{X^*}$, a zatem warunek (1.1) zachodzi dla $\alpha + 1$.

Jeżeli α jest liczbą graniczną, a warunek (1.1) zachodzi dla każdego $\beta < \alpha$, to

$$\iota_{\varepsilon\eta}^{\alpha\mathrm{Sz}(X,\eta)} B_{X^*} \subset \iota_{\varepsilon\eta}^{\beta\mathrm{Sz}(X,\eta)} B_{X^*} \subset \iota_\varepsilon^{\beta} B_{X^*} \quad \text{dla dowolnego } \beta < \alpha.$$

Stąd $\iota_{\varepsilon\eta}^{\alpha\mathrm{Sz}(X,\eta)} B_{X^*} \subset \bigcap_{\beta<\alpha} \iota_\varepsilon^{\beta} B_{X^*} = \iota_\varepsilon^{\alpha} B_{X^*}$. □

Poniższy lemat należy do Feketego [13], a jego ogólniejszą wersję można znaleźć w [24, §16.2].

Lemat 1.9. *Jeżeli* $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ *jest rosnącą funkcją podaddytywną, to istnieje skończona granica* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Dowód. Ustalmy $0 < x < y$. Wówczas istnieją taka liczba naturalna n i taka liczba $c \in [0, x)$, że $y = nx + c$. Zatem

$$\frac{f(y)}{y} = \frac{f(nx+c)}{nx+c} \leqslant \frac{nf(x)+f(c)}{nx+c} \leqslant \frac{nf(x)}{nx} + \frac{f(c)}{y} \leqslant \frac{f(x)}{x} + \frac{f(x)}{y}, \tag{1.2}$$

skąd $\limsup_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y} \leqslant \frac{f(x)}{x}$, a w konsekwencji $\limsup_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y} \leqslant \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. □

Zauważmy, że na mocy *-słabej zwartości zbiorów $\iota_\varepsilon^{\alpha} B_{X^*}$, ε-indeks Szlenka musi być liczbą następnikową. Ponadto można wykazać, że $\mathrm{Sz}(X) = \omega^\alpha$ dla pewnej liczby porządkowej α (zob. [26, Proposition 2]). Oznacza to, że warunek $\mathrm{Sz}(X,\varepsilon) < \omega$ dla $\varepsilon > 0$ jest równoważny warunkowi $\mathrm{Sz}(X) = \omega$. (Z uwagi na przykład 1.5 warunek $\mathrm{Sz}(X) = 1$ jest trywialny i go pomijamy).

Wniosek 1.10. Jeżeli $\mathrm{Sz}(X) = \omega$, to istnieje granica

$$\mathsf{p}(X) \coloneqq \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln \mathrm{Sz}(X,\varepsilon)}{|\ln \varepsilon|} \in [1,\infty); \tag{1.3}$$

granicę tę nazywamy *typem potęgowym (indeksu) Szlenka* przestrzeni X.

Dowód. Istnienie granicy (1.3) wynika z lematu 1.9 zastosowanego do funkcji podaddytywnej (zob. stwierdzenie 1.8) danej wzorem $f(x) = \ln \mathrm{Sz}(X, \mathrm{e}^{-x})$. Dla dowodu nierówności $\mathsf{p}(X) \geqslant 1$ wystarczy zauważyć, że $\mathrm{Sz}(X,\varepsilon) \geqslant \varepsilon^{-1}$, o ile X jest przestrzenią nieskończenie wymiarową. □

W dalszym ciągu skupiać będziemy się głównie na przestrzeniach Banacha, których indeks Szlenka wynosi ω; zatem, gdy będziemy mówić o przestrzeni X, często z kontekstu wynikać będzie, że mamy na myśli przestrzeń X spełniającą warunek $\mathrm{Sz}(X) = \omega$. Jak już zostało wspomniane, warunek ten mówi, że wszystkie ε-indeksy Szlenka są liczbami naturalnymi, co oznacza, że możemy badać ich zachowanie ilościowe.

Z wniosku 1.10 łatwo wyprowadzamy, że dla każdej liczby $\delta > 0$ istnieją takie stałe $c_\delta > 0$ i $C_\delta > 0$, że
$$c_\delta \varepsilon^{-(\mathsf{p}(X)-\delta)} \leqslant \mathrm{Sz}(X,\varepsilon) \leqslant C_\delta \varepsilon^{-(\mathsf{p}(X)+\delta)} \quad \text{dla } \varepsilon \in (0,1).$$
Z tego prostego spostrzeżenia natychmiast wynika wzór na typ potęgowy Szlenka, z którego bardzo często będziemy korzystać:
$$\mathsf{p}(X) = \inf\Big\{q > 1\colon \sup_{\varepsilon\in(0,1)} \varepsilon^q \mathrm{Sz}(X,\varepsilon) < \infty\Big\}. \tag{1.4}$$
Będziemy mówić, że typ potęgowy jest *osiągany*, jeśli kres dolny w powyższym wzorze jest przyjmowany.

Uwaga 1.11. Osiąganie typu potęgowego Szlenka przez przestrzeń X równoważne jest istnieniu takiej stałej $C > 0$, że $\mathrm{Sz}(X,\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{-\mathsf{p}(X)}$ dla $\varepsilon \in (0,1)$; typ potęgowy Szlenka zawsze jest „osiągany z dołu”, to znaczy istnieje taka stała $c > 0$, że $c\varepsilon^{-\mathsf{p}(X)} \leqslant \mathrm{Sz}(X,\varepsilon)$ dla $\varepsilon \in (0,1)$.

Dowód. Pierwsza część jest bezpośrednią konsekwencją wzoru (1.4). Dla dowodu drugiej części zauważmy, że wzór (1.2) (pod założeniami lematu) implikuje
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \inf_{x>0} \frac{f(x)}{x}.$$
To zaś oznacza, że $\frac{f(x)}{x} \geqslant \mathsf{p}(X)$ dla $x > 0$, gdzie $f(x) = \ln \mathrm{Sz}(X, \mathrm{e}^{-x})$, czyli $\mathrm{Sz}(X,\varepsilon) \geqslant \varepsilon^{-\mathsf{p}(X)}$ dla $\varepsilon \in (0,1)$; możemy zatem przyjąć $c = 1$. □

Zakładając, że przestrzeń X jest ośrodkowa, wobec twierdzenia 1.4, widzimy, że warunek $\mathrm{Sz}(X) = \omega$ jest silniejszy od ośrodkowości przestrzeni X^*. Możemy go zatem interpretować jako żądanie, aby przestrzeń dualna była „mocno ośrodkowa”. Wprowadzimy jednak jeszcze jeden warunek, który jest dużo silniejszy od poprzedniego.

Definicja 1.12. Jeżeli istnieje taka stała $M > 0$, że dla dowolnych $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n > 0$ zachodzi implikacja
$$\iota_{\varepsilon_1}\ldots\iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing \implies \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \leqslant M,$$
to mówimy, że przestrzeń X ma *sumowalny indeks Szlenka* (*ze stałą* M).

Uwaga 1.13. Jeżeli przestrzeń X ma sumowalny indeks Szlenka, to $\mathsf{p}(X) = 1$. Ponadto typ ten jest osiągany.

Dowód. Załóżmy, że przestrzeń X ma sumowalny indeks Szlenka ze stałą M. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi implikacja $n\varepsilon > M \implies \iota_\varepsilon^n B_{X^*} = \varnothing$. Oznacza to, że dla dowolnego $\varepsilon \in (0,1)$ mamy
$$\mathrm{Sz}(X,\varepsilon) \leqslant \left\lfloor \frac{M}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \leqslant (M+1)\varepsilon^{-1}. \qquad \square$$

Przykład 1.14. Przestrzeń c_0 ma sumowalny indeks Szlenka.

Dowód. Pokażemy, że $\iota_\varepsilon(rB_{c_0^*}) \subset (r - \frac{1}{2}\varepsilon)B_{c_0^*}$ dla $r \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon > 0$; oczywiście dla $\frac{1}{2}\varepsilon > r \geqslant 0$ mamy $\iota_\varepsilon(rB_{c_0^*}) = \varnothing$.

Ustalmy zatem $r \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ oraz $x^* \in \iota_\varepsilon(rB_{c_0^*})$. Ponieważ topologia *-słaba jest metryzowalna na zbiorze $rB_{c_0^*}$, istnieje ciąg $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ elementów tego zbioru, który jest *-słabo zbieżny do x^* oraz spełnia warunek $\|x_n^* - x^*\| > \frac{1}{2}\varepsilon$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy dowolnie $\eta > 0$ i dokonajmy naturalnego utożsamienia $c_0^* = \ell_1$. Niech k_0 będzie taką liczbą naturalną, że $\sum_{k>k_0} |x^*(k)| < \eta$. Dalej niech n_0 będzie taką liczbą naturalną, że $\sum_{k\leqslant k_0} |x_{n_0}^*(k) - x^*(k)| < \eta$. Wówczas

$$\begin{aligned} \|x^*\| &= \sum_{k\leqslant k_0} |x^*(k)| + \sum_{k>k_0} |x^*(k)| \leqslant \sum_{k\leqslant k_0} |x^*(k) - x_{n_0}^*(k)| + \sum_{k\leqslant k_0} |x_{n_0}^*(k)| + \eta \leqslant \\ &\leqslant \|x_{n_0}\| - \sum_{k>k_0} |x_{n_0}^*(k)| + 2\eta \leqslant r - \sum_{k>k_0} |x_{n_0}^*(k) - x^*(k)| + \sum_{k>k_0} |x^*(k)| + 2\eta \leqslant \\ &\leqslant r - \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_0}^*(k) - x^*(k)| + 4\eta \leqslant r - \frac{1}{2}\varepsilon + 4\eta. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy przy $\eta \to 0$, otrzymujemy $\|x^*\| \leqslant r - \frac{1}{2}\varepsilon$.

Załóżmy teraz, że $\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{c_0^*} \neq \varnothing$ dla pewnych $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$. Wówczas, na mocy poprzedniej części, mamy $1 - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n) \geqslant 0$, czyli $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \leqslant 2$. □

1.2. Przestrzenie ilorazowe i podprzestrzenie

Niech X i Y oznaczają przestrzenie Banacha. Jak wiadomo (zob. np. [16, §2.4]), jeżeli Y jest podprzestrzenią przestrzeni X, to $\mathrm{Sz}(X/Y) \leqslant \mathrm{Sz}(X)$ oraz $\mathrm{Sz}(Y) \leqslant \mathrm{Sz}(X)$. W poniższej sekcji podamy ilościowe odpowiedniki tych twierdzeń.

Lemat 1.15. *Jeżeli Y jest podprzestrzenią przestrzeni X, to dla dowolnych $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ zachodzi implikacja*

$$\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{(X/Y)^*} \neq \varnothing \implies \iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing.$$

Dowód. Teza wynika bezpośrednio z faktu, że przestrzeń $(X/Y)^* = Y^\perp$ kanonicznie zanurza się w przestrzeń X^* oraz że topologia *-słaba przestrzeni $(X/Y)^*$ jest topologią dziedziczoną z topologii *-słabej przestrzeni X^*. □

Przypomnijmy, że zbiór A ze zwrotną i przechodnią relacją $\leqslant$ nazywamy *zbiorem skierowanym*, jeżeli dla dowolnych $x, y \in A$ istnieje taki element $z \in A$, że $x \leqslant z$ i $y \leqslant z$. Jeżeli S jest dowolnym zbiorem niepustym, a A niepustym zbiorem skierowanym, to *ciągiem uogólnionym* lub *siecią* (ang. *net*) nazywamy dowolne odwzorowanie $x \colon A \to S$; ciąg uogólniony zwykle zapisujemy jako $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Ciągi uogólnione w przestrzeniach topologicznych odgrywają analogiczną rolę do roli ciągów w przestrzeniach metrycznych; w szczególności ciągowe charakteryzacje przestrzeni metrycznych mają swoje sieciowe odpowiedniki w przestrzeniach topologicznych. Jako że narzędzia tego użyjemy jedynie w dowodzie poniższego lematu, nie będziemy wchodzić w dalsze szczegóły; można je znaleźć, na przykład, w [11, §1.6].

Lemat 1.16. *Załóżmy, że ograniczony i liniowy operator $T \colon Y \to X$ jest izomorfizmem na swój obraz. Wówczas dla dowolnych $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ zachodzi implikacja*

$$\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{Y^*} \neq \varnothing \implies \iota_{\eta_1} \ldots \iota_{\eta_n} B_{X^*} \neq \varnothing,$$

gdzie $\eta_i = \varepsilon_i/2\|T\|$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Dowód. Z założenia wynika, że operator sprzężony $T^* \colon X^* \to Y^*$ jest surjektywny. Pokażemy, że dla dowolnych $\varepsilon > 0$ oraz *-słabo zwartych zbiorów $K \subset B_{X^*}$ i $L \subset B_{Y^*}$, które spełniają warunek $L \subset T^*(K)$, zachodzi inkluzja $\iota_\varepsilon L \subset T^*(\iota_\eta K)$, gdzie $\eta = \varepsilon/2\|T\|$.

Ustalmy $y^* \in \iota_\varepsilon L$. Istnieje wówczas *-słabo zbieżny do y^* ciąg uogólniony $(y_\alpha^*)_{\alpha\in A} \subset L$ spełniający warunek $\|y_\alpha^* - y^*\| > \varepsilon/2$ dla $\alpha \in A$. Wybierzmy, dla każdego $\alpha \in A$, taki element $x_\alpha^* \in K$, że $y_\alpha^* = T^* x_\alpha^*$. Na mocy *-słabej zwartości zbioru K istnieje *-słabo zbieżny podciąg uogólniony $(x^*_\beta)_{\beta\in B}$ ciągu uogólnionego $(x^*_\alpha)_{\alpha\in A}$; oznaczmy $x^* := \lim_{\beta\in B} x^*_\beta$. Ponieważ T^* – jako operator sprzężony – jest ciągły w topologiach *-słabych, $T^*(x^*) = y^*$. Zatem

$$\frac{\varepsilon}{2} < \|y^*_\beta - y^*\| = \|T^*(x^*_\beta - x^*)\| \leqslant \|T^*\|\cdot\|x^*_\beta - x^*\| = \|T\|\cdot\|x^*_\beta - x^*\| \qquad \text{dla } \beta\in B.$$

Ponieważ $\lim_{\beta\in B} x^*_\beta = x^*$, wnosimy, że $\operatorname{diam}(V\cap K) > \eta$ dla każdego *-słabego otoczenia V punktu x^*. W konsekwencji $x^* \in \iota_\eta K$, czyli $y^* = T^*(x^*) \in T^*(\iota_\eta K)$.

Teza wynika z wyżej udowonionego faktu poprzez zastosowanie indukcji. □

Z udowodnionych lematów bezpośrednio wynikają wnioski, będące zapowiedzianymi odpowiednikami twierdzeń o niepodnoszeniu indeksu Szlenka przez ilorazy i podprzestrzenie.

Wniosek 1.17. Załóżmy, że Y jest podprzestrzenią przestrzeni X. Wówczas

(i) jeżeli $\mathrm{Sz}(X) = \omega$, to $\mathsf{p}(X/Y) \leqslant \mathsf{p}(X)$ oraz $\mathsf{p}(Y) \leqslant \mathsf{p}(X)$;

(ii) jeżeli przestrzeń X ma sumowalny indeks Szlenka, to przestrzenie X/Y oraz Y także mają sumowalny indeks Szlenka.

Wniosek 1.18. Załóżmy, że przestrzenie X i Y są izomorficzne. Wówczas

(i) jeżeli $\mathrm{Sz}(X) = \omega$, to $\mathsf{p}(X) = \mathsf{p}(Y)$;

(ii) jeżeli przestrzeń X ma sumowalny indeks Szlenka, to przestrzeń Y także ma sumowalny indeks Szlenka.

1.3. Elementy geometrii asymptotycznej przestrzeni Banacha

Ustalmy przestrzeń Banacha X i oznaczmy przez $\mathsf{cof}(X)$ rodzinę wszystkich podprzestrzeni przestrzeni X o skończonym kowymiarze.

Definicja 1.19. Dla $t > 0$, $x \in S_X$ i podprzestrzeni Y przestrzeni X definiujemy

$$\bar\varrho(t,x,Y) = \sup_{y\in S_Y} \|x+ty\| - 1 \qquad\qquad \bar\delta(t,x,Y) = \inf_{y\in S_Y} \|x+ty\| - 1.$$

Dalej przyjmujemy

$$\bar\varrho(t,x) = \inf_{Y\in\mathsf{cof}(X)} \bar\varrho(t,x,Y) \qquad\qquad \bar\delta(t,x) = \sup_{Y\in\mathsf{cof}(X)} \bar\delta(t,x,Y)$$

oraz

$$\bar\varrho(t) = \sup_{x\in S_X} \bar\varrho(t,x) \qquad\qquad \bar\delta(t) = \inf_{x\in S_X} \bar\delta(t,x).$$

Wielkość $\bar\varrho$ nazywamy *modułem asymptotycznej gładkości*, zaś wielkość $\bar\delta$ – *modułem asymptotycznej wypukłości*. Przestrzeń X nazywać będziemy *asymptotycznie jednostajnie gładką*, jeżeli $\lim_{t\to 0} \bar\varrho(t)/t = 0$, zaś *asymptotycznie jednostajnie wypukłą*, jeżeli $\bar\delta(t) > 0$ dla każdego $t > 0$.

Uwaga 1.20. Jeżeli przestrzeń X jest przestrzenią dualną, to zamiast rodziny $\mathsf{cof}(X)$ możemy rozważać rodzinę *-słabo domkniętych podprzestrzeni przestrzeni X o skończonym kowymiarze. Zdefiniowane przy użyciu tej rodziny pojęcia asymptotycznie jednostajnej gładkości i wypukłości nazywać będziemy **-słabymi*, a odpowiednie moduły oznaczać będziemy przez $\bar\varrho^*$ i $\bar\delta^*$.

Uwaga 1.21. Każda jednostajnie gładka przestrzeń Banacha jest asymptotycznie jednostajnie gładka. Podobnie jednostajna wypukłość implikuje asymptotycznie jednostajną wypukłość. Fakty te bynajmniej nie są natychmiastowe; ich dowody można znaleźć w [20] lub [38].

Zanim przejdziemy do przykładu, krótko przypomnimy definicję ℓ_p-sumy prostej przestrzeni Banacha; sumy proste obszerniej zostaną omówione w sekcji 3.1. Mianowicie dla ciągu $(X_n)_{n=1}^\infty$ przestrzeni Banacha oraz $p \in [1, \infty)$ definiujemy:

$$\left(\bigoplus_{n=1}^\infty X_n\right)_{\ell_p} = \left\{\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty X_n \colon \|\mathbf{x}\| \coloneqq \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p\right)^{1/p} < \infty\right\}.$$

Przykład 1.22. Moduły asymptotycznej gładkości i wypukłości przestrzeni $X \coloneqq (\bigoplus_{n=1}^\infty F_n)_{\ell_p}$, gdzie $p \in [1, \infty)$, a $(F_n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem przestrzeni skończenie wymiarowych, są równe i wynoszą $(1+t^p)^{1/p} - 1$.

Dowód. Wykażemy, że $\bar{\varrho}(t) = (1+t^p)^{1/p} - 1$; dowód równości $\bar{\delta}(t) = (1+t^p)^{1/p} - 1$ przebiega podobnie.

Weźmy dowolny wektor unormowany $f_1 \in F_1$ oraz oznaczmy $\mathbf{f_1} = (f_1, 0, 0, \ldots)$. Dalej, niech $Y_1 = \{\mathbf{y} = (y_n)_{n=1}^\infty \in X \colon y_1 = 0\}$; oczywiście Y_1 jest podprzestrzenią o skończonym kowymiarze. Wówczas, jeżeli $\mathbf{y} = (y_n)_{n=1}^\infty \in S_{Y_1}$, to

$$\|\mathbf{f_1} + t\mathbf{y}\|^p = \|f_1\|^p + t^p \sum_{n=2}^\infty \|y_n\|^p = 1 + t^p.$$

Zatem, jako że przekrój dwóch podprzestrzeni o skończonym kowymiarze jest podprzestrzenią o skończonym kowymiarze, otrzymujemy

$$\bar{\varrho}(t) \geqslant \inf_{Y \in \mathsf{cof}(X)} \bar{\varrho}(t, \mathbf{f_1}, Y) \geqslant \inf_{Y \in \mathsf{cof}(X)} \sup_{\mathbf{y} \in S_{Y \cap Y_1}} \|\mathbf{f_1} + t\mathbf{y}\| - 1 = (1+t^p)^{1/p} - 1.$$

W celu uzyskania nierówności w drugą stronę ustalmy dowolnie $\mathbf{x} \in S_X$ oraz $\varepsilon > 0$. Niech $M \subset \mathbb{N}$ będzie takim zbiorem skończonym, że $\|\mathbf{x} - P_M\mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon$, gdzie $P_M\mathbf{x}$ oznacza wektor, którego współrzędne pokrywają się ze współrzędnymi wektora $\mathbf{x}$ na zbiorze M, a poza nim są równe zero. Zdefiniujmy $Y_0 = \{\mathbf{y} \in X \colon P_M\mathbf{y} = \mathbf{0}\}$; oczywiście Y_0 jest podprzestrzenią o skończonym kowymiarze. Dalej, jeżeli $\mathbf{y} \in S_{Y_0}$, to

$$\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^p = \|P_M\mathbf{x}\|^p + \|\mathbf{x} - P_M\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^p \leqslant 1 + (t+\varepsilon)^p,$$

co pokazuje, że $\bar{\varrho}(t, \mathbf{x}, Y_0) \leqslant (1 + (t+\varepsilon)^p)^{1/p} - 1$. W konsekwencji, wobec dowolności ε oraz $\mathbf{x}$, otrzymujemy $\bar{\varrho}(t) \leqslant (1+t^p)^{1/p} - 1$. □

Przykład 1.23. Przestrzeń ℓ_1 jest asymptotycznie jednostajnie wypukła, ale nie ma jednostajnie wypukłego przenormowania (ponieważ nie jest refleksywna).

Przytoczymy teraz, bez (dosyć trudnych) dowodów, dwa kluczowe twierdzenia, które wiążą pojęcia asymptotycznej geometrii przestrzeni Banacha z indeksem Szlenka oraz jego typem potęgowym. Pierwsze z nich pochodzi z pracy [23] i jest daleko idącym analogonem twierdzenia Enflo o równoważności superrefleksywności z możliwością jednostajnie wypukłego przenormowania.

Twierdzenie 1.24 (Knaust, Odell i Schlumprecht)**.** *Załóżmy, że X jest przestrzenią ośrodkową. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $\mathrm{Sz}(X) \leqslant \omega$*;*

(ii) *przestrzeń X ma asymptotycznie jednostajnie gładkie przenormowanie;*

(iii) *przestrzeń X^* ma *-słabo asymptotycznie jednostajnie wypukłe przenormowanie.*

Następne twierdzenie podaje związek między typem potęgowym Szlenka a zachowaniem modułu asymptotycznie jednostajnej gładkości oraz *-słabego modułu asymptotycznie jednostajnej wypukłości; jest ono konsekwencją [15, Theorem 4.8] (por. także [6, Corollary 6.2]). Wynik ten jest analogonem twierdzenia Pisiera o możliwości takiego przenormowania przestrzeni superrefleksywnej, że moduł wypukłości zachowuje się potęgowo (zob. [37]).

Twierdzenie 1.25 (Godefroy, Kalton i Lancien)**.** *Załóżmy, że X jest przestrzenią ośrodkową oraz* $\mathrm{Sz}(X)=\omega$. *Wówczas*

$$\begin{aligned}\mathsf{p}(X)=\inf\{q>1\colon\ & \textit{istnieją równoważna norma } |\cdot| \textit{ w przestrzeni } X\\ & \textit{i taka stała } c>0, \textit{ że dla każdego } t>0 \textit{ zachodzi}\\ & \textit{nierówność } \bar{\varrho}_{|\cdot|}(t)\leqslant ct^p, \textit{ gdzie } p^{-1}+q^{-1}=1\,\}\end{aligned}\tag{1.5}$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathsf{p}(X)=\inf\{p>1\colon\ & \textit{istnieją równoważna norma } |\cdot| \textit{ w przestrzeni } X\\ & \textit{i taka stała } c>0, \textit{ że dla każdego } t\in(0,1)\\ & \textit{zachodzi nierówność } \bar{\delta}^*_{|\cdot|}(t)\geqslant ct^p\}.\end{aligned}$$

Uwaga 1.26. Wzory występujące w tezie powyższego twierdzenia są równoważne w tym sensie, że na podstawie jednego z nich można otrzymać drugi. Wynika to z [15, Proposition 2.8], które mówi, że moduł asymptotycznej gładkości jest 8-równoważny funkcji dualnej Younga (zob. definicja 2.4) *-słabego modułu asymptotycznej wypukłości oraz *-słaby moduł asymptotycznej wypukłości jest 4-równoważny funkcji dualnej Younga modułu asymptotycznej gładkości.

Uwaga 1.27. Nietrywialną konsekwencją wcześniejszych twierdzeń jest fakt, iż jeśli ośrodkowa przestrzeń Banacha dopuszcza asymptotycznie jednostajnie gładkie przenormowanie, to dopuszcza też takie przenormowanie, że moduł asymptotycznej gładkości zachowuje się potęgowo, to znaczy istnieje taki wykładnik $p\in[1,\infty)$, że dla pewnej stałej $c>0$ i każdego $t\in(0,1)$ zachodzi nierówność

$$\bar{\varrho}\,(t)\leqslant ct^p.\tag{1.6}$$

Kres górny wykładników o wspomnianej własności nazywamy *typem potęgowym* modułu asymptotycznej gładkości, a jeżeli istnieje najmniejszy z nich, to będziemy mówić, że typ ten jest *osiągany.* Zastępując nierówność (1.6) nierównością

$$\bar{\delta}\,(t)\geqslant ct^p,\tag{1.7}$$

a kres górny dolnym, analogicznie definiujemy pojęcia typu potęgowego oraz jego osiągania dla modułu asymptotycznej wypukłości. Tematyka ta jest szerzej poruszona w pracy Kaltona [22], gdzie między innymi dla każdego $p\in(1,\infty)$ skonstruował on dwie jednostajnie homeomorficzne przestrzenie Banacha o tej własności, że typy potęgowe modułów asymptotycznej gładkości i wypukłości w jednej z nich są osiągane i wynoszą p, podczas gdy druga z tych przestrzeni nie posiada żadnego przenormowania, dla którego zachodziłaby nierówność (1.6) lub (1.7).

Powyższy przykład, w szczególności, pokazuje, że kres dolny we wzorze (1.5) nie zawsze jest przyjmowany. Podobny efekt zachodzi także dla wzoru (1.4); stosowny przykład zostanie podany w sekcji 4.4.

W dalszej części użyteczne będą także spostrzeżenia, które pozwolą wyrazić moduły asymptotycznie jednostajnej gładkości oraz wypukłości nieco inaczej (por. [6, Lemma 6.5]).

Lemat 1.28. *Załóżmy, że X^* jest przestrzenią ośrodkową. Wtedy dla wszelkich $t>0$ i $x\in S_X$ zachodzą równości*

$$\bar{\varrho}(t,x)=\sup\Big\{\limsup_{n\to\infty}\|x+x_n\|-1\colon (x_n)_{n=1}^\infty \textit{ jest ciągiem słabo zbieżnym do zera, } \|x_n\|=t\Big\}$$

oraz

$$\bar{\delta}(t,x)=\inf\Big\{\liminf_{n\to\infty}\|x+x_n\|-1\colon (x_n)_{n=1}^\infty \textit{ jest ciągiem słabo zbieżnym do zera, } \|x_n\|=t\Big\}.$$

Dowód. Ustalmy $t>0$, $x\in S_X$, podprzestrzeń Y o skończonym kowymiarze oraz słabo zbieżny do zera ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty\subset X$ spełniający warunek $\|x_n\|=t$. Słaba zbieżność ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty$ implikuje $\lim_{n\to\infty}\operatorname{dist}(x_n,Y)=0$. Istnieje więc taki ciąg $(y_n)_{n=1}^\infty\subset Y$, $\|y_n\|=t$, że $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$. Zatem

$$\limsup_{n\to\infty}\|x+x_n\|-1=\limsup_{n\to\infty}\|x+y_n\|-1\leqslant\bar{\varrho}(t,x,Y).$$

Dowolność Y implikuje $\limsup_{n\to\infty}\|x+x_n\|-1\leqslant\bar{\varrho}(t,x)$.

Dla dowodu nierówności w drugą stronę ustalmy $x\in S_X$, $t>0$ oraz $\varepsilon>0$. Niech $\{x_n^*\colon n\in\mathbb{N}\}$ będzie gęstym podzbiorem przestrzeni X^*. Oznaczmy $Y_N=\bigcap_{n=1}^N\ker x_n^*$; oczywiście Y_N jest podprzestrzenią o skończonym kowymiarze. Dla każdego $n\in\mathbb{N}$ tak wybierzmy $y_n\in S_{Y_n}$, aby

$$\|x+ty_n\|-1\geqslant\bar{\varrho}(t,x,Y_n)-\varepsilon.$$

Stąd $\limsup_{n\to\infty}\|x+ty_n\|-1\geqslant\bar{\delta}(t,x)-\varepsilon$. Słaba zbieżność do zera ciągu $(y_n)_{n=1}^\infty$ wynika z gęstości zbioru $\{x_n^*\colon n\in\mathbb{N}\}$.

Dowód drugiej równości przebiega analogicznie. □

Uwaga 1.29. Przy założeniu ośrodkowości przestrzeni X^* zachodzą równości

$$\bar{\varrho}(t,x)=\sup\Big\{\limsup_{n\to\infty}\|x+x_n\|-1\colon (x_n)_{n=1}^\infty \text{ jest ciągiem słabo zbieżnym do zera, } \|x_n\|\leqslant t\Big\}$$

oraz

$$\bar{\delta}(t,x)=\inf\Big\{\liminf_{n\to\infty}\|x+x_n\|-1\colon (x_n)_{n=1}^\infty \text{ jest ciągiem słabo zbieżnym do zera, } \|x_n\|\geqslant t\Big\}.$$

Dowód. Uzasadnimy pierwszą z równości. Wobec lematu 1.28 nierówność „$\leqslant$" jest oczywista. Dla dowodu nierówności w drugą stronę ustalmy słabo zbieżny do zera ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty\subset X$ spełniający warunek $\|x_n\|\leqslant t$ oraz $\varepsilon>0$. Korzystając z wypukłości normy, otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned}\|x+x_n\|&\leqslant\Big(1-\frac{\|x_n\|}{t}\Big)\|x\|+\frac{\|x_n\|}{t}\Big\|x+\frac{t}{\|x_n\|}x_n\Big\|\leqslant\\&\leqslant 1-\frac{\|x_n\|}{t}+\frac{\|x_n\|}{t}(1+\bar{\varrho}(t,x)+\varepsilon)\leqslant 1+\bar{\varrho}(t,x)+\varepsilon,\end{aligned}$$

która jest prawdziwa dla prawie wszystkich $n\in\mathbb{N}$. Stąd $\limsup_{n\to\infty}\|x+x_n\|-1\leqslant\bar{\varrho}(t,x)$. □

1.4. Typ potęgowy przestrzeni ℓ_p

Celem niniejszej sekcji jest wyznaczenie typu potęgowego Szlenka ℓ_p-sumy prostej przestrzeni skończenie wymiarowych, gdzie $p\in(1,\infty)$. W pracach matematycznych fakt ten traktuje się jako tak zwany folklor. Odpowiedni wzór natychmiast wynika także z wniosku 4.18; tutaj jednak będziemy opierać się tylko na podstawowych własnościach normy w przestrzeni ℓ_p.

Definicja 1.30. Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma własność (M), jeżeli dla dowolnych $u, v \in S_X$ oraz słabo zbieżnego do zera ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ zachodzi równość

$$\limsup_{n\to\infty} \|u + x_n\| = \limsup_{n\to\infty} \|v + x_n\|.$$

Przykład 1.31. Przestrzeń $X \coloneqq (\bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n)_{\ell_p}$, gdzie $p \in [1, \infty)$, a $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem przestrzeni skończenie wymiarowych, ma własność (M).

Dowód. Pokażemy, że równość

$$\limsup_{n\to\infty} \|u + x_n\|^p = \|u\|^p + \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^p \tag{1.8}$$

zachodzi dla dowolnych $u \in X$ oraz słabo zbieżnego do zera ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$.

Ponieważ słabo zbieżny do zera ciąg elementów przestrzeni X jest zbieżny po współrzędnych (w normach przestrzeni F_n), równość (1.8) zachodzi dla wektorów u o skończonym nośniku. W przypadku dowolnego u niech $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ będzie takim ciągiem wektorów o skończonych nośnikach, że $\|u - u_m\| < 1/m$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Oczywiście równość (1.8) zachodzi, gdy w miejsce u wstawimy dowolny z wektorów u_m. Dla zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że $\lim_{m\to\infty} \|u_m\| = \|u\|$ oraz

$$\big|\|u + x_n\| - \|u_m + x_n\|\big| \leqslant \|u - u_m\| < \frac{1}{m}.$$ □

Przykład 1.32. Przestrzeń $X \coloneqq (\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_2)_{\ell_p}$, gdzie $p \in [1, \infty)$ i $p \neq 2$, nie ma własności (M). W szczególności ℓ_p-suma prosta przestrzeni z własnością (M) nie musi mieć własności (M).

Dowód. Niech $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie kanoniczną bazą przestrzeni ℓ_2 oraz niech

$$u = (e_1, 0, 0, \dots) \quad \text{i} \quad v = (0, e_1, , 0, \dots);$$

oczywiście $u, v \in S_X$. Zdefiniujmy słabo zbieżny do zera ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ wzorem

$$x_n = (e_n, 0, 0, \dots) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Mamy wówczas

$$\limsup_{n\to\infty} \|u + x_n\| = \sqrt{2} \neq 2^{1/p} = \limsup_{n\to\infty} \|v + x_n\|.$$ □

Własność (M) została wprowadzona przez Kaltona w artykule [21]; zostały tam też podane jej powiązania z pewnymi ideałami w algebrach operatorów. Związki własności (M) z indeksem Szlenka badane były w pracy [10]. W szczególności norma mająca własność (M) jest w pewnym asymptotycznym sensie optymalna, co wyraża poniższy lemat.

Lemat 1.33. *Załóżmy, że X jest ośrodkową przestrzenią Asplunda z własnością (M). Wówczas dla każdej równoważnej normy $|\cdot|$ w przestrzeni X istnieje taka stała $d \geqslant 1$, że $\bar{\varrho}_{\|\cdot\|}(t) \leqslant \bar{\varrho}_{|\cdot|}(dt)$.*

Dowód. Połóżmy

$$m = \inf_{x\neq 0} \frac{|x|}{\|x\|} \qquad \text{oraz} \qquad M = \sup_{x\neq 0} \frac{|x|}{\|x\|}.$$

Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$ i weźmy taki wektor $x_0 \in X$, że $\|x_0\| = 1$ i $|x_0| \leqslant m(1+\varepsilon)$. Wówczas, na mocy własności (M) oraz uwagi 1.29, nierówności

$$\limsup_{n\to\infty} \|x + x_n\| = \limsup_{n\to\infty} \|x_0 + x_n\| \leqslant \frac{1}{m}|x_0| \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_0}{|x_0|} + \frac{x_n}{|x_0|}\right| \leqslant (1+\varepsilon)\bar{\varrho}_{|\cdot|}(dt) + 1 + \varepsilon,$$

gdzie $d = M/m$, zachodzą dla dowolnych $x \in X$, $\|x\| = 1$, oraz słabo zbieżnego do zera ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ spełniającego warunek $\|x_n\| = t$. Stąd $\bar{\varrho}_{\|\cdot\|}(t) \leqslant (1+\varepsilon)\bar{\varrho}_{|\cdot|}(dt) + \varepsilon$, co wobec dowolności ε kończy dowód. □

Stwierdzenie 1.34. *Niech $X = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n)_{\ell_p}$, gdzie $p \in (1,\infty)$, a $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem przestrzeni skończenie wymiarowych. Wówczas zachodzi równość $\mathsf{p}(X) = q$, gdzie $p^{-1}+q^{-1}=1$; w szczególności $\mathsf{p}(\ell_p) = q$.*

Dowód. Ponieważ
$$\bar{\varrho}(t) = (1+t^p)^{1/p} - 1 \leqslant \frac{1}{p}\, t^p \qquad \text{dla } t \in (0,1),$$
na mocy wzoru (1.5) mamy $\mathsf{p}(X) \leqslant q$. Dla dowodu nierówności $\mathsf{p}(X) \geqslant q$ pokażemy, że dla każdej równoważnej normy $|\cdot|$ w przestrzeni X istnieje taka stała $c > 0$, że dla każdego $t \in (0,1)$ zachodzi nierówność $\bar{\varrho}_{|\cdot|}(t) \geqslant ct^p$.

Ustalmy zatem równoważną normę $|\cdot|$ w przestrzeni X. Na mocy lematu 1.33 istnieje taka stała $d \geqslant 1$, że $\bar{\varrho}(t) \leqslant \bar{\varrho}_{|\cdot|}(dt)$. Ponieważ
$$\lim_{t\to 0} \frac{(1+t^p)^{1/p}-1}{t^p} = \frac{1}{p},$$
istnieje taka stała $c_1 > 0$, że $\bar{\varrho}(t) \geqslant c_1 t^p$ dla $t \in (0,1)$. Zatem
$$\bar{\varrho}_{|\cdot|}(t) \geqslant \bar{\varrho}(t/d) \geqslant \frac{c_1}{d^p}\, t^p \qquad \text{dla } t \in (0,1).$$
□

Wniosek 1.35. Każda przestrzeń ilorazowa i każda podprzestrzeń przestrzeni ℓ_p, dla $p \in (1,\infty)$, ma typ potęgowy Szlenka q, gdzie $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Dowód. Załóżmy, że X jest przestrzenią ilorazową lub podprzestrzenią przestrzeni ℓ_p. Nierówność $\mathsf{p}(X) \leqslant q$ wynika wprost z wniosku 1.17. Nierówność $\mathsf{p}(X) \geqslant q$ wynika zaś stąd, że przestrzeń ℓ_p zanurza się w przestrzeń X (zob. [18] w przypadku ilorazu oraz [1, Proposition 2.2.1] w przypadku podprzestrzeni). □

1.5. Oryginalna przestrzeń Tsirelsona

Typowymi przykładami przestrzeni z sumowalnym indeksem Szlenka, wśród klasycznych przestrzeni Banacha, są przestrzeń c_0 oraz jej podprzestrzenie. Rozważając ilorazy przestrzeni c_0, nie otrzymamy żadnego nowego przykładu, gdyż każdy taki iloraz zanurza się w przestrzeń c_0 (zob. [19]). W niniejszej sekcji podamy (bez dowodu) przykład refleksywnej przestrzeni Banacha z bazą 1-bezwarunkową oraz sumowalnym indeksem Szlenka.

Przypomnijmy, że ciąg $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów przestrzeni Banacha X nazywamy *bazą Schaudera* (krótko: *bazą*) tej przestrzeni, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje jedyny ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ o tej własności, że $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Zachowując te oznaczenia, możemy zdefiniować ciąg *funkcjonałów współrzędnościowych* $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ wzorami $e_n^*(x) = a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Okazuje się, że funkcjonały e_n^* są ciągłymi funkcjonałami liniowymi (zob. [1, Theorem 1.1.3]).

Bazę $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywamy *K-bezwarunkową*, gdzie $K \geqslant 1$, jeśli dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1,\dots,a_N$, $b_1,\dots,b_N$, spełniających warunek $|a_n| \leqslant |b_n|$ dla $n = 1,\dots,N$, zachodzi nierówność
$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \Big\| \leqslant K \Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n e_n \Big\|.$$
Bazę nazwiemy *bezwarunkową*, jeśli jest ona K-bezwarunkowa dla pewnego $K \geqslant 1$. Można wykazać (zob. [1, Proposition 3.1.3]), że baza $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ przestrzeni X jest bezwarukowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n$ jest zbieżny bezwarunkowo.

Rozpoczniemy od konstrukcji przestrzeni Tsirelsona, która została podana przez Figiela i Johnsona w artykule [14]. Dla dowolnych niepustych zbiorów $E, F \subset \mathbb{N}$ będziemy pisać $E < F$, o ile $\max E < \min F$, oraz $n < E$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, o ile $n < \min E$. Oznaczając przez $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ kanoniczną bazę (Hamela) przestrzeni c_{00} wszystkich ciągów rzeczywistych, których prawie wszystkie wyrazy są zerami, dla dowolnych $x = \sum_{n=1}^{N} a_n t_n \in c_{00}$ oraz $E \subset \mathbb{N}$ definiujemy $Ex = \sum_{n \in E} a_n t_n$. *Przestrzenią Tsirelsona*, oznaczaną w dalszym ciągu przez T, nazywać będziemy uzupełnienie przestrzeni c_{00} z (jedyną) normą $\|\cdot\|$ spełniającą zależność rekurencyjną

$$\|x\| = \max\left\{\|x\|_{c_0}, \frac{1}{2}\sup\left\{\sum_{n=1}^{N}\|E_n x\| \colon N < E_1 < \ldots < E_N\right\}\right\} \qquad \text{dla } x \in c_{00}. \tag{1.9}$$

Można pokazać, że T jest refleksywną przestrzenią Banacha, która nie zawiera izomorficznej kopii przestrzeni c_0 ani przestrzeni ℓ_p dla żadnego $p \in [1, \infty)$. Ponadto $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ jest 1-bezwarunkową bazą przestrzeni T; zob. [3, Theorem I.8].

Oryginalną przestrzenią Tsirelsona, oznaczaną w dalszym ciągu przez $\mathfrak{T}$, nazywać będziemy przestrzeń T^*. Podobnie jak T, przestrzeń $\mathfrak{T}$ jest refleksywną przestrzenią Banacha, niezawierającą izomorficznej kopii przestrzeni c_0 ani przestrzeni ℓ_p dla żadnego $p \in [1, \infty)$, a $(t_n^*)_{n=1}^{\infty}$ jest jej bazą 1-bezwarunkową; zob. [3, str. 16].

Uwaga 1.36. We wzorze (1.9) warunek $N < E_1 < \ldots < E_N$ możemy zastąpić warunkiem $N \leqslant E_1 < \ldots < E_N$. Okazuje się, że zdefiniowana w ten sposób przestrzeń jest izomorficzna z przestrzenią Tsirelsona T (zob. [3, str. 9]). Dokładniej bazy w tak zdefiniowanych przestrzeniach są równoważne jako ciągi bazowe; definicję odkładamy do sekcji 3.1.

Uwaga 1.37. Oryginalna przestrzeń Tsirelsona była pierwszym znanym przykładem nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha, niezawierającej izomorficznej kopii przestrzeni c_0 ani ℓ_p. Pierwotna konstrukcja podana w artykule [41] była jednak dość skomplikowana i nie zawierała żadnego wzoru definiującego normę, a jedynie opis kuli jednostkowej.

Stwierdzenie 1.38. *Oryginalna przestrzeń Tsirelsona ma sumowalny indeks Szlenka.*

Dowód powyższego stwierdzenia pomijamy, można go znaleźć w pracy [23]. Powierzchownie rzecz ujmując, fakt ten wynika z „podobieństwa” przestrzeni Tsirelsona do przestrzeni ℓ_1.

Uwaga 1.39. W artykule [23] nie zostało literalnie dowiedzione stwierdzenie 1.38, a pokazane zostało, że przestrzeń Tsirelsona ma sumowalny tak zwany *H-indeks* (dokładną jego definicję pomijamy, gdyż jest dość żmudna w sformułowaniu). Jednak przy dość naturalnych założeniach, które w szczególności spełnia przestrzeń Tsirelsona, sumowalność indeksu Szlenka przestrzeni X jest równoważna sumowalności H-indeksu przestrzeni X^* (zob. [23, Proposition 2.8]).

Rozdział 2

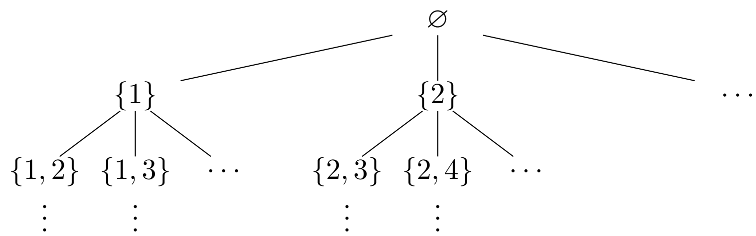
Odwzorowania drzewowe i przenormowania

2.1. Drzewa i słabo zerowe odwzorowania drzewowe

W rodzinie $\mathcal{F}\mathbb{N}$ wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację porządku w następujący sposób: dla $a, b \in \mathcal{F}\mathbb{N}$, gdzie $a = \{m_1, \ldots, m_k\}$ (przy czym $m_1 < \ldots < m_k$) oraz $b = \{n_1, \ldots, n_l\}$ (przy czym $n_1 < \ldots < n_l$), przyjmujemy

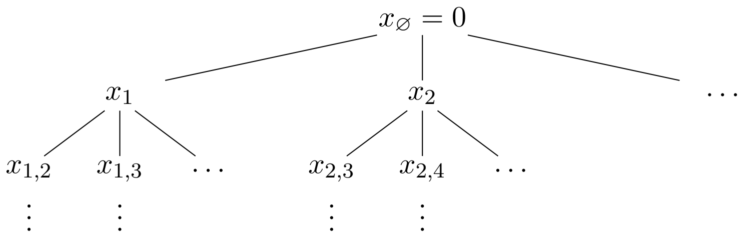
$$a \leqslant b \iff k \leqslant l \text{ oraz } m_i = n_i \text{ dla } i = 1, \ldots, k.$$

Symbolem $|a|$ oznaczać będziemy moc zbioru $a \in \mathcal{F}\mathbb{N}$. Jeżeli $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, to *drzewem wysokości n* nazywać będziemy zbiór $S_{n-1} = \{a \in \mathcal{F}\mathbb{N} \colon |a| < n\}$ ze wcześniej zdefiniowaną relacją porządku. Drzewo nieskończonej wysokości ilustruje poniższy rysunek.



Następnikiem elementu $a \in \mathcal{F}\mathbb{N}$ nazywać będziemy dowolny element $b \in \mathcal{F}\mathbb{N}$ spełniający warunki $a \leqslant b$ i $|b| = |a| + 1$. Łatwo zauważyć, że b jest następnikiem a wtedy i tylko wtedy, gdy $b = a^\frown k$ dla pewnego $k > \max a$, gdzie symbol $^\frown$ oznacza konkatenację. *Poprzednikiem* elementu $b \in \mathcal{F}\mathbb{N} \setminus \{\varnothing\}$ nazywać będziemy jedyny element $a \in \mathcal{F}\mathbb{N}$, którego następnikiem jest b. Zbiór $\Gamma \subset S_n$ (dla pewnego $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) nazywać będziemy *gałęzią*, jeśli wszystkie jego elementy można zapisać w postaci (skończonego lub nieskończonego) ciągu $(a_i)_{i<n}$, gdzie $a_0 = \varnothing$, a a_i jest następnikiem a_{i-1} dla $0 < i < n$. Innymi słowy gałęzią jest każdy maksymalny zbiór następujących po sobie elementów danego drzewa.

Załóżmy, że V jest przestrzenią liniowo-topologiczną. *Odwzorowaniem drzewowym w V* będziemy nazywać dowolną funkcję $a \mapsto x_a \colon S_n \to V$ spełniającą warunek $x_\varnothing = 0$; w przypadku, gdy $n = \infty$, dodatkowo wymagać będziemy, aby $|\{a \in \Gamma \colon x_a \neq 0\}| < \infty$ dla każdej gałęzi $\Gamma \subset S_\infty$. Odwzorowanie drzewowe $(x_a)_{a \in S_\infty}$ ilustruje poniższy rysunek.



Odwzorowanie drzewowe $(x_a)_{a\in S_n} \subset V$ nazywać będziemy *zerowym*, jeżeli dla każdego $a \in S_{n-1}$ zachodzi równość $\lim_{k\to\infty} x_{a^\frown k} = 0$. W szczególności, w przypadku gdy V jest przestrzenią Banacha, rozważać będziemy słabo zerowe odwzorowania drzewowe w V oraz *-słabo zerowe odwzorowania drzewowe w V^*.

Następne stwierdzenie stanowi bardzo ważne narzędzie, które wykorzystamy w dowodach głównych twierdzeń. Łączy ono derywacje Szlenka z dualnymi *-słabo zerowymi odwzorowaniami drzewowymi. Jest ono prawie dosłownym sformułowaniem [15, Proposition 3.4].

Stwierdzenie 2.1. *Załóżmy, że X jest przestrzenią ośrodkową, a $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$. Warunkiem koniecznym na to, aby $\iota_{\varepsilon_1} \dots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing$ jest istnienie *-słabo zerowego odwzorowania drzewowego $(x_a^*)_{a\in S_n} \subset X^*$ spełniającego warunki*

(i) $\|x_a^*\| \geqslant \frac{1}{4}\varepsilon_{|a|}$ *dla każdego* $a \in S_n \setminus \{\varnothing\}$;

(ii) $\|\sum_{a\in\Gamma} x_a^*\| \leqslant 1$ *dla każdej gałęzi* $\Gamma \subset S_n$.

Warunkiem wystarczającym na to, aby $\iota_{\varepsilon_1} \dots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing$ jest istnienie *-słabo zerowego odwzorowania drzewowego $(x_a^*)_{a\in S_n} \subset X^*$ spełniającego warunek

(i') $\|x_a^*\| \geqslant \varepsilon_{|a|}$ *dla każdego* $a \in S_n \setminus \{\varnothing\}$

oraz wcześniejszy warunek (ii).

Zdefiniujemy jeszcze jedną wielkość związaną z odwzorowaniami drzewowymi w przestrzeniach Banacha. Mianowicie, dla przestrzeni Banacha X i danego $\sigma > 0$, symbolem $N(\sigma)$ oznaczać będziemy najmniejszą liczbę naturalną n o tej własności, że istnieje słabo zerowe odwzorowanie drzewowe $(x_a)_{a\in S_n} \subset X$ spełniające warunki

(i) $\|x_a\| \leqslant \sigma$ dla każdego $a \in S_n \setminus \{\varnothing\}$;

(ii) $\|\sum_{a\in\Gamma} x_a^*\| > 1$ dla każdej gałęzi $\Gamma \subset S_n$.

W przypadku, gdy nie istnieje odwzorowanie o żądanych własnościach, przyjmujemy $N(\sigma) = \infty$. Poniższe twierdzenie stanowi dosłowną wypowiedź [15, Theorem 4.10] i precyzyjnie charakteryzuje przestrzenie z sumowalnym indeksem Szlenka.

Twierdzenie 2.2 (Godefroy, Kalton i Lancien)**.** *Załóżmy, że X jest ośrodkową przestrzenią Banacha. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) *Przestrzeń X ma sumowalny indeks Szlenka.*

(ii) *Istnieje taka liczba $\sigma > 0$, że $N(\sigma) = \infty$, czyli dla pewnego $\sigma > 0$ nie istnieje odpowiednie drzewo o skończonej wysokości.*

(iii) *Istnieje taka liczba $K > 0$, że dla każdego $\tau \in (0,1)$ zachodzi nierówność* $\mathrm{Cz}(X,\tau) \leqslant K\tau^{-1}$.

(iv) *Dla każdej funkcji* $f\colon (0,1) \to (0,1)$ *spełniającej warunek* $\lim_{\tau\to 0} \tau^{-1} f(\tau) = 0$ *istnieją równoważna norma* $|\cdot|$ *w przestrzeni* X *oraz stała* $c > 0$ *o następującej własności: jeżeli* $\tau \in (0,1)$, $x^* \in X^*$, $|x^*| = 1$, *a ciąg* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ *jest* **-słabo zbieżny do zera i* $|x_n^*| = \tau$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to*

$$\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*| \geqslant 1 + cf(\tau).$$

2.2. Przenormowanie przestrzeni o sumowalnym indeksie Szlenka

Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha oraz że X^* jest przestrzenią ośrodkową. W celu naszkicowania dowodu stwierdzenia o przenormowaniu przestrzeni z sumowalnym indeksem Szlenka wprowadzimy jeszcze pewne wielkości związane z asymptotyczną geometrią przestrzeni Banacha. Mianowice dla $\sigma \in [0,1]$ przyjmujemy

$$\varphi(\sigma) = \inf\{\bar{\varrho}_Y(\sigma)\colon d_{\mathsf{BM}}(X,Y) \leqslant 2\},$$

gdzie d_{BM} oznacza odległość Banacha–Mazura, to znaczy

$$d_{\mathsf{BM}}(X,Y) = \inf\{\|T\|\cdot\|T^{-1}\|\colon \text{odwzorowanie } T\colon X \to Y \text{ jest izomorfizmem}\}. \tag{2.1}$$

Podobnie dla $\tau \in [0,1]$ kładziemy

$$\psi(\tau) = \sup\{\theta_Y(\tau)\colon d_{\mathsf{BM}}(X,Y) \leqslant 2\},$$

gdzie

$$\theta(\tau) = \inf\Big\{\liminf_{n\to\infty} \|x^* + x_n^*\| - 1\colon (x_n^*)_{n=1}^{\infty} \text{ jest ciągiem } ^*\text{-słabo zbieżnym do zera,} \\ \text{spełniającym warunek } \|x_n\| \geqslant \tau, \text{ oraz } \|x\| = 1\Big\}.$$

Uwaga 2.3. Rozumując podobnie jak w lemacie 1.28 oraz w uwadze 1.29, możemy uzasadnić, że przy naszych założeniach wielkość $\theta(\tau)$ jest równa *-słabemu modułowi asymptotycznej wypukłości.

Definicja 2.4. Załóżmy, że $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ są ciągłymi funkcjami rosnącymi spełniającymi warunek $f(0) = g(0) = 0$.

(i) Powiemy, że funkcje f i g są *C-równoważne*, gdzie C jest pewną dodatnią stałą, jeżeli zachodzą nierówności

$$f(\tau/C) \leqslant g(\tau) \quad \text{oraz} \quad g(\tau/C) \leqslant f(\tau) \quad \text{dla } \tau \in [0,1].$$

Piszemy wówczas $f \simeq_C g$.

(ii) *Funkcją dualną Younga* (lub *transformatą Legendre'a*) funkcji f nazywać będziemy funkcję $f^*\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f^*(\sigma) = \sup\{\sigma\tau - f(\tau)\colon 0 \leqslant \tau \leqslant 1\} \quad \text{dla } \sigma \in [0,1].$$

Podstawowe własności funkcji dualnych Younga można znaleźć w [34, §1.7]; w szczególności funkcja dualna Younga zawsze jest funkcją wypukłą. Dla nas istotne będą jedynie równoważności (zob. [15, Proposition 2.8]):

$$\varphi \simeq_8 \psi^* \quad \text{oraz} \quad \varphi^* \simeq_4 \psi. \tag{2.2}$$

Poniższe stwierdzenie można w zasadzie odczytać z twierdzenia 2.2; dla nas istotna jest informacja, że występująca w jego tezie stała c zależy tylko od stałej sumowalności indeksu Szlenka. Ponieważ wspomniany fakt nie został odnotowany w oryginalnej pracy, dla kompletności zamieszczamy szkic jego dowodu.

Stwierdzenie 2.5. *Załóżmy, że X jest ośrodkową przestrzenią Banacha, która ma sumowalny indeks Szlenka ze stałą M. Wówczas istnieje taka stała $c \in (0,1)$, zależna tylko od M, że dla każdego $\tau \in (0,1)$ istnieje norma $|\cdot|$ w przestrzeni X spełniająca poniższe warunki (symbolu $|\cdot|$ używamy także na oznaczenie odpowiedniej normy dualnej):*

(i) $\frac{1}{2}\|x\| \leqslant |x| \leqslant \|x\|$ *dla każdego* $x \in X$*;*

(ii) *jeśli $x^* \in X^*$, $|x^*| = 1$ oraz $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subset X^*$ jest *-słabo zbieżnym do zera ciągiem spełniającym warunek $|x_n^*| \geqslant \xi \geqslant \tau$ dla $n \in \mathbb{N}$, to*

$$\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*| \geqslant 1 + c\xi.$$

Szkic dowodu. Zauważmy, że powyższe stwierdzenie wystarczy uzasadnić jedynie dla $\xi = \tau$. Istotnie, zakładając, że warunek (ii) spełniony jest dla $\xi = \tau$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*| &\geqslant \liminf_{n\to\infty} \Big|\frac{\xi}{\tau}x^* + x_n^*\Big| - \Big(\frac{\xi}{\tau} - 1\Big)|x^*| \\ &= \frac{\xi}{\tau}\liminf_{n\to\infty} \Big|x^* + \frac{\tau}{\xi}x_n^*\Big| - \frac{\xi}{\tau} + 1 \geqslant 1 + c\xi.\end{aligned}$$

Załóżmy, że $N = N(\sigma) < \infty$ dla pewnego $\sigma \in (0,1)$. Wówczas, na mocy [15, Lemma 4.3], istnieją takie liczby $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N \in (0,1)$, że $\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_N} B_{X^*} \neq \varnothing$ oraz $\sum_{k=1}^N \varepsilon_k > (3\sigma)^{-1}$. Zatem, na mocy sumowalności indeksu Szlenka, $N(\sigma) = \infty$ dla każdego $\sigma < (3M)^{-1}$. Zgodnie z [15, Theorem 4.4] dla pewnej stałej $C \leqslant 19200$ zachodzi równoważność $N(\sigma)^{-1} \simeq_C \varphi(\sigma)$, co pokazuje, że $\varphi(\sigma) = 0$ dla $\sigma < (3CM)^{-1}$. Stąd

$$\varphi^*(\tau) \geqslant \sup\left\{\tau\sigma \colon 0 \leqslant \sigma < (3CM)^{-1}\right\} = (3CM)^{-1}\tau.$$

Związki (2.2) implikują $\psi(\tau) \geqslant (12CM)^{-1}\tau$ dla każdego $\tau \in [0,1]$. To zaś dowodzi, że istnieje norma $|\cdot|$ w przestrzeni X, odległa w sensie Banacha–Mazura od oryginalnej normy co najwyżej o 2, która spełnia żądany warunek (ii), gdzie za c można wziąć dowolną liczbę dodatnia mniejszą od $(3CM)^{-1}$. Odpowiednie przeskalowanie normy $|\cdot|$ pozwala na uzyskanie warunku (i). $\square$

Uwaga 2.6. Ponieważ kres dolny występujący we wzorze (2.1) nie zawsze jest przyjmowany (zob. [12, Ex. 5.44]), rozumowanie z powyższego dowodu może prowadzić jedynie do uzyskania normy $|\cdot|_\varepsilon$, która zamiast warunku (i) spełnia warunek $\frac{1}{2+\varepsilon}\|x\| \leqslant |x|_\varepsilon \leqslant \|x\|$, gdzie $\varepsilon > 0$. Dobierając jednak odpowiednio małe $\varepsilon > 0$ oraz definiując normę $|\cdot|$ wzorem $|x| = \max\{\frac{1}{2}\|x\|, |x|_\varepsilon\}$, otrzymujemy normę, która „dokładnie” spełnia warunek (i).

Uwaga 2.7. Stwierdzenie 2.5 obrazuje podobieństwo przestrzeni z sumowalnym indeksem Szlenka do podprzestrzeni przestrzeni c_0, a także podobieństwo przestrzeni dualnej do przestrzeni ℓ_1. Mianowicie okazuje się, że zmieniając kolejność kwantyfikatorów w jego wypowiedzi, to znaczy żądając, aby istniała norma spełniająca podane warunki dla każdego $\tau \in (0,1)$, uzyskujemy charakteryzację zanurzania się danej przestrzeni w przestrzeń c_0. Wydaje się, że za tę różnicę odpowiada „brak izotropii” derywacji Szlenka (por. z uwagami zawartymi w [15, rozdział 4]).

2.3. Przenormowanie przestrzeni o danym typie potęgowym

Podobnie jak w poprzedniej sekcji, następujące stwierdzenie jest przeformułowaniem [15, Theorem 4.8], a najistotniejszą dla nas informacją jest fakt, iż stała γ występująca w jego wypowiedzi zależy tylko i wyłącznie od ilościowego zachowania indeksu Szlenka. Dla kompletności zamieszczamy szkic dowodu opisanego faktu.

Stwierdzenie 2.8. *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha o indeksie Szlenka ω. Załóżmy, że $\mathsf{p}(X) < r < q$ oraz że $B > 0$ jest taką stałą, że nierówność $\mathrm{Sz}(X,\varepsilon) \leqslant B\varepsilon^{-r}$ zachodzi dla $\varepsilon \in (0,1)$. Wówczas istnieją stała $\gamma \in (0,1)$, zależna tylko od B, q i r, oraz norma $|\cdot|$ w przestrzeni X spełniające poniższe warunki (symbolu $|\cdot|$ używamy także na oznaczenie odpowiedniej normy dualnej):*

(i) $\frac{1}{2}\|x\| \leqslant |x| \leqslant \|x\|$ *dla każdego* $x \in X$*;*

(ii) *jeśli $\tau > 0$, $x^* \in X^*$ oraz $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subset X^*$ jest *-słabo zbieżnym do zera ciągiem spełniającym warunek $|x_n^*| \geqslant \tau$ dla $n \in \mathbb{N}$, to*
$$\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*| \geqslant \big(|x^*|^q + \gamma\tau^q\big)^{1/q}.$$

Szkic dowodu. Na mocy [15, Theorem 4.5] istnieje taka stała $D < 10^6$, że dla $\varepsilon \in (0,1)$ zachodzą nierówności
$$\mathrm{Cz}(X,\varepsilon) \leqslant \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ 2^k\varepsilon/D\leqslant 1}} 2^k\mathrm{Sz}(X, 2^k\varepsilon/D) \leqslant BD^r\sum_{k\geqslant 0} 2^{(1-r)k}\varepsilon^{-r} \leqslant BD^r(1-2^{1-r})^{-1}\varepsilon^{-r}.$$

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ niech $|\cdot|_k$ będzie normą w przestrzeni X, która spełnia warunki

(a) $\frac{1}{2}\|x\| \leqslant |x|_k \leqslant \|x\|$ dla każdego $x \in X$;

(b) jeśli $x^* \in X^*$, $|x|_k = 1$ oraz $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subset X^*$ jest *-słabo zbieżnym do zera ciągiem spełniającym warunek $|x_n^*|_k \geqslant 2^{-k}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to
$$\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*|_k \geqslant 1 + \frac{1}{\mathrm{Cz}(X,(2^kC)^{-1})} \geqslant 1 + c_1 2^{-kr},$$
gdzie $c_1 = B^{-1}(CD)^{-r}(1-2^{1-r})$, a $C \leqslant 19\,200$ jest pewną stałą.

(Istnienie powyższej normy wynika z [15, Theorem 4.7]). Zdefiniujmy normę $|\cdot|$ w przestrzeni X^* wzorem
$$|x^*| = \frac{1-2^{r-q}}{2^{r-q}}\sum_{k=1}^\infty 2^{k(r-q)}|x^*|_k.$$
Ponieważ $|\cdot|$ jest funkcją *-słabo półciągłą z dołu, jest ona normą dualną. Ponadto dla każdego $x^* \in X^*$ zachodzą nierówności $\|x^*\| \leqslant |x^*| \leqslant 2\|x^*\|$, a więc spełniony jest warunek (i). Pokażemy, że norma $|\cdot|$ spełnia także warunek (ii).

Ustalmy $\tau > 0$, $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ oraz *-słabo zbieżny do zera ciąg $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subset X^*$ spełniający warunek $|x_n^*| \geqslant \tau$ dla $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy najpierw, że $\tau \in (0,1)$ oraz $|x^*| = 1$. Niech k będzie liczbą naturalną spełniającą warunek $2^{-k} \leqslant \frac{1}{4}\tau < 2^{1-k}$. Mamy wówczas
$$|x^*|_k \leqslant 2\|x^*\| \leqslant 2|x^*| = 2,$$
skąd
$$|x_n^*|_k \geqslant \|x_n^*\| \geqslant \frac{1}{2}|x_n^*| \geqslant \frac{1}{2}\tau \geqslant 2^{1-k} \geqslant 2^{-k}|x^*|_k.$$

Zatem, na mocy warunku (b),

$$\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*|_k \geqslant |x^*|_k(1 + c_1 2^{-kr}),$$

a stąd oraz z *-słabej półciągłości z dołu normy dualnej, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*| &\geqslant \frac{1-2^{r-q}}{2^{r-q}} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(r-q)} \liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*|_j \geqslant \\
&\geqslant \frac{1-2^{r-q}}{2^{r-q}} \Big(\sum_{j\neq k} 2^{j(r-q)} |x^*|_j + 2^{k(r-q)} |x^*|_k (1 + c_1 2^{-kr}) \Big) = \\
&= \frac{1-2^{r-q}}{2^{r-q}} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(r-q)} |x^*|_j + \frac{1-2^{r-q}}{2^{r-q}} c_1 |x^*|_k 2^{-kq} \geqslant \\
&\geqslant |x^*| + \frac{1-2^{r-q}}{2^{r+q}} c_1 \|x^*\| 2^{(2-k)q} \geqslant 1 + \frac{1-2^{r-q}}{2^{1+r+q}} c_1 |x^*| \tau^q = 1 + \beta\tau^q,
\end{aligned}$$

gdzie $\beta = (1-2^{r-q})2^{-(1+r+q)}c_1$ jest stałą zależną tylko od B, q i r. Wreszcie, na mocy nierówności Bernoulliego, mamy

$$\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*|^q \geqslant (1 + \beta\tau^q)^q \geqslant 1 + \beta q \tau^q \geqslant 1 + \beta\tau^q.$$

Załóżmy teraz jedynie, że $|x^*| = 1$. Jeżeli $\tau \in (0,4)$, to na mocy poprzedniej części oraz wypukłości funkcji $|\cdot|^q$ uzyskujemy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*|^q &\geqslant \liminf_{n\to\infty} \left| \frac{1}{4}(x^* + x_n^*) + \frac{3}{4} x^* \right|^q - \frac{3}{4} |x^*|^q = \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left| x^* + \frac{1}{4} x_n^* \right| - \frac{3}{4} \geqslant 1 + 4^{-q}\beta\tau^q - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + 4^{-q}\beta\tau^q,
\end{aligned}$$

skąd

$$\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*|^q \geqslant 1 + 4^{1-q}\beta\tau^q.$$

Jeżeli zaś $\tau \geqslant 4$, to

$$\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*|^q \geqslant (\tau - 1)^q \geqslant \left(\frac{3}{4}\tau\right)^q \geqslant 1 + \frac{3^q - 1}{4^q}\tau^q \geqslant 1 + 2^{-q}\tau^q \geqslant 1 + \beta\tau^q.$$

Kładąc $\gamma = 4^{1-q}\beta$, widzimy, że teza zachodzi pod warunkiem, że $|x^*| = 1$. W ogólnym przypadku mamy jednak

$$\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*|^q \geqslant |x^*|^q \Big(1 + \gamma \frac{\tau^q}{|x^*|^q}\Big) = |x^*|^q + \gamma\tau^q. \qquad \square$$

Uwaga 2.9. Podobnie jak stwierdzenie 2.5 obrazowało podobieństwo przestrzeni dualnej do przestrzeni z sumowalnym indeksem Szlenka oraz przestrzeni ℓ_1, stwierdzenie 2.8 możemy interpretować w taki sposób, że przestrzeń dualna do przestrzeni o typie potęgowym równym p jest „podobna” do przestrzeni ℓ_p.

Rozdział 3

Sumowalność indeksu Szlenka a sumy proste

3.1. Ogólne sumy proste przestrzeni Banacha

Przedstawimy teraz definicję sumy prostej (względem bazy bezwarunkowej) przestrzeni Banacha, stanowiącą uogólnienie wcześniej wprowadzonej ℓ_p-sumy prostej, a także krótko omówimy podstawowe jej własności. Wzorować będziemy się na ujęciu przedstawionym w artykule [28], skąd pochodzą te z poniższych faktów, do których nie podajemy referencji.

Definicja 3.1. Niech $\mathfrak{E}$ będzie przestrzenią Banacha z unormowaną (czyli złożoną z wektorów o normie 1) bazą 1-bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz niech $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem przestrzeni Banacha. *Sumą prostą względem bazy* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ lub krótko $\mathfrak{E}$-*sumą prostą* ciągu $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywamy przestrzeń

$$\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\mathfrak{E}} := \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : \text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| e_n \text{ jest zbieżny}\right\}$$

wyposażoną w dodawanie i mnożenie przez skalary po współrzędnych oraz w normę

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| := \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| e_n\right\| \quad \text{dla } (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\mathfrak{E}},$$

która okazuje się zupełna. Przestrzeń będącą $\mathfrak{E}$-sumą prostą nieskończenie i przeliczalnie wielu kopii tej samej przestrzeni X oznaczać będziemy symbolem $\mathfrak{E}(X)$.

Uwaga 3.2. Mówienie o $\mathfrak{E}$-sumie prostej, bez wyróżniania żadnej bazy 1-bezwarunkowej przestrzeni $\mathfrak{E}$, może prowadzić do nieporozumień. Często jednak z kontekstu wynikać będzie, jaką bazę mamy na myśli; mówiąc o $\mathfrak{E}$-sumie prostej, gdzie $\mathfrak{E}$ jest klasyczną lub „neoklasyczną” (np. przestrzenią Tsirelsona) przestrzenią Banacha, zawsze będziemy mieć na myśli sumę prostą względem bazy kanonicznej.

Przykład 3.3. Suma prosta $\mathfrak{E}(\mathbb{R})$ jest izometryczna z przestrzenią $\mathfrak{E}$. Istotnie, łatwo zauważyć, że odwzorowanie

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n : \mathfrak{E}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{E}$$

jest izometrycznym izomorfizmem. Ponieważ $\mathbb{R}$ zanurza się (izometrycznie) w każdą przestrzeń Banacha, $\mathfrak{E}$ zanurza się izometrycznie w każdą $\mathfrak{E}$-sumę prostą.

Uwaga 3.4. Łatwo zauważyć, że jeżeli przestrzenie X_n i Y_n (dla $n \in \mathbb{N}$) są „jednakowo” izomorficzne, to znaczy istnieje taki ciąg izomorfizmów $(T_n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $T_n\colon X_n \to Y_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, że $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ i $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n^{-1}\| < \infty$, to sumy proste $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}$ i $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} Y_n)_{\mathfrak{E}}$ są izomorficzne. Istotnie, w tym przypadku odwzorowanie

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (T_n x_n)_{n=1}^{\infty}\colon \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\mathfrak{E}} \longrightarrow \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} Y_n\right)_{\mathfrak{E}}$$

jest izomorfizmem. Na ogół jednak izomorficzność przestrzeni X_n i Y_n (dla każdego $\in \mathbb{N}$) nie implikuje izomorficzności sum prostych $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}$ i $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} Y_n)_{\mathfrak{E}}$; przykład 3.15 obrazuje taką sytuację.

Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha. Ciąg $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ nazywamy *bazowym*, jeżeli jest on bazą przestrzeni $\overline{\mathrm{span}}\{e_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Ciągi bazowe $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ i $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ nazywamy *równoważnymi*, jeżeli odwzorowanie liniowe $T\colon \overline{\mathrm{span}}\{e_n\colon n \in \mathbb{N}\} \to \overline{\mathrm{span}}\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ spełniające warunek $Te_n = f_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest izomorfizmem. Korzystając z twierdzenia o domkniętym wykresie, można wykazać, że ciągi bazowe $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu skalarów $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżność jednego z szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ lub $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ pociąga zbieżność drugiego; zob. [1, §1.3].

Uwaga 3.5. Łatwo zauważyć, że jeżeli $\mathfrak{E}$ i $\mathfrak{F}$ są przestrzeniami Banacha z unormowanymi bazami 1-bezwarunkowymi odpowiednio $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, które są równoważne jako ciągi bazowe, to sumy proste $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}$ i $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{F}}$ są izomorficzne. W tym wypadku żądanym izomorfizmem jest po prostu (formalna) identyczność. Na ogół jednak, podobnie jak we wcześniejszej uwadze, izomorficzność przestrzeni $\mathfrak{E}$ i $\mathfrak{F}$ nie implikuje izomorficzności sum prostych $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}$ i $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{F}}$; odpowiednia konstrukcja zostanie przedstawiona w przykładzie 4.24.

Przejdziemy teraz do opisu przestrzeni dualnych do sum prostych. Zanim to zrobimy, przypomnijmy, że jeżeli ciąg $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ jest bazą przestrzeni X, to ciąg $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem bazowym w przestrzeni X^*; innymi słowy ciąg $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ jest bazą przestrzeni $Z := \overline{\mathrm{span}}\{e_n^*\colon n \in \mathbb{N}\}$. Bazę $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywać będziemy *zwężającą* (ang. *shrinking*), jeżeli $Z = X^*$. Ponadto, jeżeli baza $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ jest K-bezwarunkowa, to baza $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ także jest K-bezwarunkowa. Pewną charakteryzację przestrzeni z bezwarunkowymi bazami zwężającymi, z której często będziemy korzystać, podaje następujące twierdzenie [1, Theorem 3.3.1].

Twierdzenie 3.6. *Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha z bazą bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) *baza $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ nie jest zwężająca;*

(ii) *przestrzeń X zawiera izomorficzną kopię przestrzeni ℓ_1.*

Wniosek 3.7. Każda baza bezwarunkowa przestrzeni Banacha o ośrodkowej przestrzeni dualnej jest zwężająca.

Załóżmy teraz, że $\mathfrak{E}$ jest przestrzenią Banacha z unormowaną bazą 1-bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ i niech $\mathfrak{F} = \overline{\mathrm{span}}\{e_n^*\colon n \in \mathbb{N}\}$. Wobec wcześniejszych uwag możemy mówić o $\mathfrak{F}$-sumach prostych. Ponadto zauważmy, że jeżeli

$$\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\mathfrak{E}} \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{x}^* = (x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n^*\right)_{\mathfrak{F}},$$

to

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x_n^*\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|\|x_n^*\| = \left|\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| e_n, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| e_n^* \right\rangle\right| \leqslant \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}^*\|,$$

gdzie symbolem $\langle x, \varphi\rangle$ oznaczyliśmy wartość funkcjonału φ w punkcie x. Oznacza to, że możemy zdefiniować operator

$$\Upsilon\colon \Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n^*\Big)_{\mathfrak{F}} \longrightarrow \Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\Big)_{\mathfrak{E}}^*$$

wzorem

$$\langle \mathbf{x}, \Upsilon(\mathbf{x}^*)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x_n^*\rangle.$$

Można wykazać, że operator Υ jest izometrycznym zanurzeniem. Ponadto jest on surjekcją dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ przestrzeni Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy baza $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zwężająca.

Wniosek 3.8. Jeśli $\mathfrak{E}$ jest przestrzenią Banacha z unormowaną bazą 1-bezwarunkową, a $\mathfrak{E}^*$ jest przestrzenią ośrodkową, to przestrzenie $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}^*$ i $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n^*)_{\mathfrak{E}^*}$ są liniowo izometryczne.

Przyjmijmy dodatkowo, że baza $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ przestrzeni $\mathfrak{E}$ jest zwężająca. Dla dowolnego przedziału $I \subset \mathbb{N}$ symbolem P_I oznaczać będziemy kanoniczny rzut przestrzeni $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}$ na przestrzeń $(\bigoplus_{n\in I}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}\restriction I}$, gdzie $\mathfrak{E} \restriction I = \overline{\mathrm{span}}\{e_n\colon n \in I\}$. Symbol P_i oznaczać będzie rzut $P_{\{i\}}$. Zauważmy, że zdefiniowane w analogiczny sposób rzuty przestrzeni $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n^*)_{\mathfrak{E}^*}$ są operatorami sprzężonymi do kanonicznych zanurzeń $(\bigoplus_{n\in I}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}\restriction I} \hookrightarrow (\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}$. Zatem rzuty w dualnych sumach prostych są operatorami ciągłymi w topologiach *-słabych.

3.2. Skończone c_0-sumy proste

W niniejszej sekcji wykażemy, że sumowalność indeksu Szlenka zachowuje się przy braniu skończonych sum prostych. Przy dążeniu do głównego wyniku, interesować nas będą przede wszystkim c_0-sumy. Dowiedziemy, że w tym przypadku „jednostajne” ograniczenie stałej sumowalności poszczególnych składników przenosi się na ograniczenie stałej sumowalności sumy prostej (niezależnie od liczby składników!).

Lemat 3.9. *Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, $K, K_1, \dots, K_n \subset X^*$ zbiorami *-słabo zwartymi oraz $a, \varepsilon > 0$. Wówczas*

(i) $\iota_\varepsilon(aK) = a\iota_{\varepsilon/a}K$;

(ii) $\iota_\varepsilon\big(\bigcup_{i=1}^n K_i\big) \subset \bigcup_{i=1}^n \iota_{\varepsilon/2}K_i$.

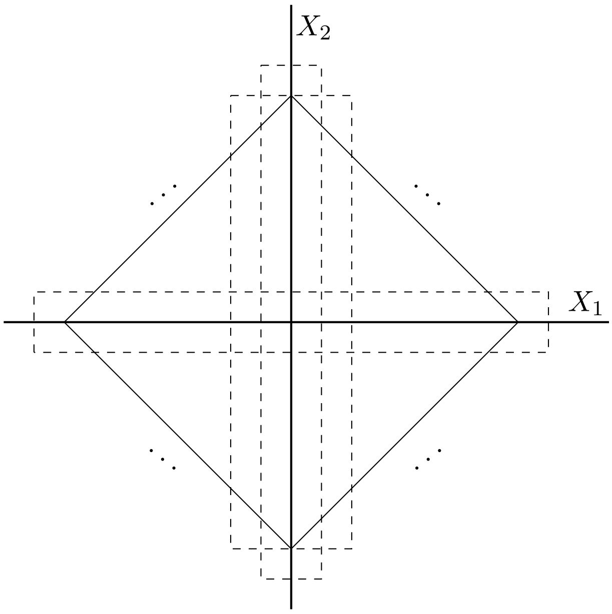
Dowód. Tezę (i) uzyskujemy poprzez bezpośredni rachunek:

$$\begin{aligned}\iota_\varepsilon(aK) &= aK \setminus \{V \subset X^*\colon V \text{ jest zbiorem } ^*\text{-słabo otwartym, } \mathrm{diam}(V \cap aK) \leqslant \varepsilon\} = \\ &= aK \setminus \{aV \subset X^*\colon V \text{ jest zbiorem } ^*\text{-słabo otwartym, } \mathrm{diam}(aV \cap aK) \leqslant \varepsilon\} = \\ &= a\big(K \setminus \{V \subset X^*\colon V \text{ jest zbiorem } ^*\text{-słabo otwartym, } \mathrm{diam}(V \cap K) \leqslant \varepsilon/a\}\big) = a\iota_{\varepsilon/a}K.\end{aligned}$$

Teza (ii) jest szczególnym przypadkiem [2, Lemma 3.1]. □

Stwierdzenie 3.10. *Załóżmy, że $X_1, \dots, X_N$ są ośrodkowymi przestrzeniami Banacha, które mają sumowalny, z tą samą stałą M, indeks Szlenka. Wówczas przestrzeń $X \coloneqq (\bigoplus_{j=1}^N X_j)_{c_0}$ ma sumowalny indeks Szlenka ze stałą $4M$.*

Idea dowodu polega na pokryciu kuli dualnej N-wymiarowymi prostopadłościanami (przypadek $N = 2$ został przedstawiony na rysunku), a następnie na wyrażeniu derywacji tej kuli przy pomocy derywacji kul dualnych w przestrzeniach składowych. Ograniczenie sumy „epsilonów” w derywacjach składowych pozwoli uzyskać ograniczenie sumy „epsilonów” w całej derywacji.



Dowód. Rozpoczniemy od wykazania, że dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{N}$ zachodzi inkluzja

$$B_{X^*} \subset \bigcup_{k_1+\ldots+k_N \leqslant m+N} \frac{k_1}{m} B_{X_1^*} \times \ldots \times \frac{k_N}{m} B_{X_N^*}. \tag{3.1}$$

Ponieważ $X^* = (\bigoplus_{j=1}^N X_j^*)_{\ell_1}$, każdy funkcjonał $x^* \in B_{X^*}$ ma postać $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$, gdzie $x_j^* \in X_j^*$ dla $j = 1, \ldots, N$ oraz $\sum_{j=1}^N \|x_j^*\| \leqslant 1$. Dalej dla każdego $j = 1, \ldots, N$ dobierzmy taką liczbę całkowitą k_j, że $(k_j - 1)/m < \|x_j^*\| \leqslant k_j/m$; oczywiście $x_j^* \in k_j/mB_{X_j^*}$. Ponadto zachodzą nierówności

$$\frac{1}{m}\Big(\sum_{j=1}^N k_j - N\Big) < \sum_{j=1}^N \|x_j^*\| = \|x^*\| \leqslant 1,$$

a w konsekwencji $k_1 + \ldots + k_N \leqslant m + N$.

Oznaczmy przez $\Theta(r)$, dla danej liczby $r \in \mathbb{N}$, rodzinę wszystkich ciągów $(q_1, \ldots, q_N)$ spełniających warunek $\sum_{j=1}^N q_j \geqslant 1 - N/r$, gdzie każda z liczb q_j jest nieujemnym ułamkiem o mianowniku r. Pokażemy, że dla wszelkich *-słabo zwartych zbiorów $K_j \in X_j^*$, gdzie $j = 1, \ldots, N$, $\varepsilon > 0$ oraz $r \in \mathbb{N}$ zachodzi inkluzja

$$\iota_\varepsilon(K_1 \times \ldots \times K_N) \subset \bigcup_{(q_1,\ldots,q_N)\in\Theta(r)} \iota_{q_1\varepsilon/2} K_1 \times \ldots \times \iota_{q_N\varepsilon/2} K_N. \tag{3.2}$$

W tym celu ustalmy $y^* = (y_1^*, \ldots, y_N^*) \in \iota_\varepsilon(K_1 \times \ldots \times K_N)$. Ponieważ przestrzeń X jest ośrodkowa, topologia *-słaba jest metryzowalna na zbiorach ograniczonych. Istnieje zatem ciąg $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subset K_1 \times \ldots \times K_N$, $x_n^* = (x_{n,1}^*, \ldots, x_{n,N}^*)$, *-słabo zbieżny do y^*, który spełnia warunek $\|x_n^* - y^*\| > \varepsilon/2$ dla $n \in \mathbb{N}$. Przechodząc do podciągu ciągu $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ (nadal oznaczanego przez $(x_n^*)_{n=1}^\infty$), możemy założyć, że dla każdego $j = 1, \ldots, N$ ciąg $(\|x_{n,j}^* - y_j^*\|)_{n=1}^\infty$ jest zbieżny do pewnej nieujemnej liczby $\delta_j/2$. Dla każdego $j = 1, \ldots, N$ niech q_j będzie takim ułamkiem o mianowniku r, że $q_j\varepsilon < \delta_j \leqslant (q_j + 1/r)\varepsilon$ (dla $\delta_j = 0$ przyjmujemy $q_j = 0$ i umawiamy się, że $\iota_0 K_j = K_j$). Oczywiście $x_j^* \in \iota_{q_j\varepsilon/2} K_j$ dla $j = 1, \ldots, N$, a ponadto

$$\varepsilon \leqslant 2 \lim_{n\to\infty} \|x_n^* - y^*\| = 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^N \|x_{n,j}^* - y_j^*\| = \sum_{j=1}^N \delta_j \leqslant \Big(\sum_{j=1}^N q_j + \frac{N}{r}\Big)\varepsilon,$$

co dowodzi inkluzji (3.2).

Kolejnym krokiem dowodu będzie wyrażenie derywacji kuli B_{X^*} przy pomocy derywacji kul $B_{X_j^*}$ przestrzeni składowych. Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz $m, r \in \mathbb{N}$. Przyjmując $\eta_j = mq_j\varepsilon/4k_j$ dla $j = 1, \ldots, N$, pokażemy, że zachodzi inkluzja

$$\iota_\varepsilon B_{X^*} \subset \bigcup_{k_1+\ldots+k_N \leqslant m+N} \; \bigcup_{(q_1,\ldots,q_N)\in\Theta(r)} \frac{k_1}{m}\iota_{\eta_1} B_{X_1^*} \times \ldots \times \frac{k_N}{m}\iota_{\eta_N} B_{X_N^*}. \tag{3.3}$$

Istotnie, korzystając z lematu 3.9 oraz wzorów (3.1) i (3.2), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\iota_\varepsilon B_{X^*} &\subset \iota_\varepsilon \left(\bigcup_{k_1+\ldots+k_N \leqslant m+N} \frac{k_1}{m} B_{X_1^*} \times \ldots \times \frac{k_N}{m} B_{X_N^*} \right) \subset \\
&\subset \bigcup_{k_1+\ldots+k_N \leqslant m+N} \iota_{\varepsilon/2} \left(\frac{k_1}{m} B_{X_1^*} \times \ldots \times \frac{k_N}{m} B_{X_N^*} \right) \subset \\
&\subset \bigcup_{k_1+\ldots+k_N \leqslant m+N} \; \bigcup_{(q_1,\ldots,q_N)\in\Theta(r)} \iota_{q_1\varepsilon/4} \frac{k_1}{m} B_{X_1^*} \times \ldots \times \iota_{q_N\varepsilon/4} \frac{k_N}{m} B_{X_N^*} = \\
&= \bigcup_{k_1+\ldots+k_N \leqslant m+N} \; \bigcup_{(q_1,\ldots,q_N)\in\Theta(r)} \frac{k_1}{m}\iota_{\eta_1} B_{X_1^*} \times \ldots \times \frac{k_N}{m}\iota_{\eta_N} B_{X_N^*}.
\end{aligned}$$

Ustalmy teraz $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ i załóżmy, że $\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing$. Weźmy też dowolnie $m, r \in \mathbb{N}$. Wobec wzoru (3.3) mamy

$$\begin{aligned}
\iota_{\varepsilon_1}\iota_{\varepsilon_2} B_{X^*} &\subset \iota_{\varepsilon_1} \left(\bigcup_{k_1+\ldots+k_N \leqslant m+N} \; \bigcup_{(q_{2,1},\ldots,q_{2,N})\in\Theta(r)} \frac{k_1}{m}\iota_{\eta_{2,1}} B_{X_1^*} \times \ldots \times \frac{k_N}{m}\iota_{\eta_{2,N}} B_{X_N^*} \right) \subset \\
&\subset \bigcup_{k_1+\ldots+k_N \leqslant m+N} \; \bigcup_{(q_{2,1},\ldots,q_{2,N})\in\Theta(r)} \iota_{\varepsilon_1/2} \left(\frac{k_1}{m}\iota_{\eta_{2,1}} B_{X_1^*} \times \ldots \times \frac{k_N}{m}\iota_{\eta_{2,N}} B_{X_N^*} \right) \subset \\
&\subset \bigcup_{k_1+\ldots+k_N \leqslant m+N} \; \bigcup_{\substack{(q_{1,1},\ldots,q_{1,N})\in\Theta(r) \\ (q_{2,1},\ldots,q_{2,N})\in\Theta(r)}} \frac{k_1}{m}\iota_{\eta_{1,1}}\iota_{\eta_{2,1}} B_{X_1^*} \times \ldots \times \frac{k_N}{m}\iota_{\eta_{1,N}}\iota_{\eta_{2,N}} B_{X_N^*},
\end{aligned}$$

gdzie $\eta_{i,j} = mq_{i,j}\varepsilon_i/4k_j$ dla $i = 1, 2$ oraz $j = 1, \ldots, N$. Kontynuując to rozumowanie, poprzez indukcję otrzymujemy

$$\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \subset \bigcup_{k_1+\ldots+k_N \leqslant m+N} \; \bigcup_{\substack{(q_{1,1},\ldots,q_{1,N})\in\Theta(r) \\ \vdots \\ (q_{n,1},\ldots,q_{n,N})\in\Theta(r)}} \frac{k_1}{m}\iota_{\eta_{1,1}} \ldots \iota_{\eta_{n,1}} B_{X_1^*} \times \ldots \times \frac{k_N}{m}\iota_{\eta_{1,N}} \ldots \iota_{\eta_{n,N}} B_{X_N^*},$$

gdzie $\eta_{i,j} = mq_{i,j}\varepsilon_i/4k_j$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $j = 1, \ldots, N$. Ponieważ $\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing$, któryś ze składników powyższej sumy musi być niepusty. Oznacza to, że $\iota_{\eta_{1,j}} \ldots \iota_{\eta_{n,j}} B_{X_j^*} \neq \varnothing$ dla każdego $j = 1, \ldots, N$. Wobec założenia sumowalności indeksu Szlenka każdej z przestrzeni X_j mamy $\sum_{i=1}^n \eta_{i,j} \leqslant M$ dla każdego $j = 1, \ldots, N$, co oznacza, że

$$\sum_{i=1}^n q_{i,j}\varepsilon_i \leqslant \frac{4k_jM}{m} \quad \text{dla } j = 1, \ldots, N.$$

Dodając powyższe nierówności stronami, po wszystkich liczbach j, uzyskujemy

$$\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{N}{r}\right)\varepsilon_i \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N q_{i,j}\varepsilon_i \leqslant 4M \sum_{j=1}^N \frac{k_j}{m} \leqslant 4M \cdot \frac{m+N}{m}.$$

W końcu, przechodząc do granicy przy $m, r \to \infty$, dostajemy $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \leqslant 4M$. □

Uwaga 3.11. Rozważając w powyższym dowodzie ciągi uogólnione zamiast ciągów, możemy pominąć założenie ośrodkowości w stwierdzeniu 3.10.

Uwaga 3.12. Ponieważ dowolne skończone ciągi bazowe (tej samej długości) są równoważne, sumy proste względem nich są izomorficzne. Łącząc zatem stwierdzenie 3.10 z wnioskiem 1.18, możemy odnotować, że sumowalność indeksu Szlenka zachowuje się przy braniu dowolnych skończonych sum prostych (czego nie można powiedzieć o „jednostajnym” ograniczeniu stałej sumowalności).

3.3. Nieskończone c_0-sumy proste

W tym podrozdziale wykażemy pierwszą z głównych tez rozprawy, mianowicie pokażemy, że sumowalność indeksu Szlenka zachowuje się także przy braniu nieskończonych c_0-sum prostych (przy bardzo naturalnych założeniach). Dowód prowadzi przez skończone c_0-sumy, jednak przejście na przypadek nieskończony nie jest trywialne.

Definicja 3.13. Będziemy mówić, że rodzina $\{X_i\colon i \in I\}$ przestrzeni Banacha ma *jednakowo sumowalny indeks Szlenka*, jeśli istnieje taka stała $M > 0$, że każda z przestrzeni X_i ma sumowalny indeks Szlenka ze stałą M.

Twierdzenie 3.14. *Dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ ośrodkowych przestrzeni Banacha z jednakowo sumowalnym indeksem Szlenka przestrzeń $X \coloneqq (\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{c_0}$ ma sumowalny indeks Szlenka.*

W dowodzie korzystać będziemy z drzewowego ujęcia derywacji Szlenka. Główna jego idea polega na konstrukcji pewnej gałęzi, a następnie na skorzystaniu z warunku (ii) stwierdzenia 2.1 w celu uzyskania oszacowania sumy „epsilonów”. Aby uzyskać dolne oszacowanie normy sumy elementów konstruowanej gałęzi, musimy rozważyć dwa przypadki: łatwiejszy – kiedy nośniki tych elementów są rozłączne – oraz trudniejszy – kiedy nośniki te skupiają się w pewnym (skończonym) podzbiorze zbioru $\mathbb{N}$. W tym drugim przypadku korzystamy z twierdzenia o przenormowaniu przestrzeni z sumowalnym indeksem Szlenka.

Dowód. Niech M będzie stałą sumowalności indeksu Szlenka dobraną dla rodziny $\{X_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Dalej niech $c \in (0,1)$ będzie stałą ze stwierdzenia 2.5 dla $4M$ oraz niech $\eta > 0$ będzie dowolnie ustalone.

Załóżmy, że $\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing$ dla pewnych $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$. Wówczas istnieje *-słabo zerowe odwzorowanie drzewowe $(x_a^*)_{a \in S_n} \subset X^*$ spełniające warunek $\|x_a^*\| \geqslant \frac{1}{4}\varepsilon_{|a|}$ dla $a \in S_n \setminus \{\varnothing\}$ oraz $\|\sum_{a\in\Gamma} x_a^*\| \leqslant 1$ dla każdej gałęzi $\Gamma \subset S_n$. Przejdziemy teraz do indukcyjnej definicji ciągu $(x^*_{\nu_1,\ldots,\nu_k}\colon k = 0, 1, \ldots, n)$ odpowiadającego gałęzi wyznaczonej przez węzeł $\{\nu_1, \ldots, \nu_n\} \in S_n$.

Połóżmy $\nu_1 = 1$ i weźmy tak duże $N_1 \geqslant 1$, aby $\|P_{(N_1,\infty)} x^*_{\nu_1}\| < \eta$. Zdefiniujmy

$$Z_1 = \left(\bigoplus_{i=1}^{N_1} X_i\right)_{c_0} \qquad \text{oraz} \qquad z_1^* = P_{[1,N_1]} x^*_{\nu_1} \in Z_1^*.$$

Na mocy stwierdzenia 3.10 przestrzeń Z_1 ma sumowalny indeks Szlenka ze stałą $4M$. Stosując stwierdzenie 2.5 dla przestrzeni Z_1 oraz

$$\tau \coloneqq \frac{\eta}{2n(1+\eta)},$$

uzyskujemy normę $|\cdot|_1$ w przestrzeni Z_1 spełniającą warunki: $\|x^*\| \leqslant |x^*|_1 \leqslant 2\|x^*\|$ dla $x^* \in Z_1^*$ oraz

$$\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*|_1 \geqslant 1 + c\xi$$

dla $x^* \in Z_1^*$, $|x^*|_1 = 1$, i *-słabo zbieżnego do zera ciągu $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subset Z_1^*$ spełniającego warunek $|x_n^*|_1 \geqslant \xi \geqslant \tau$ dla $n \in \mathbb{N}$. (Przez cały czas używamy tego samego oznaczenia na normę i wyznaczoną przez nią normę dualną).

Załóżmy, że dla pewnego $1 \leqslant k < n$ wybraliśmy liczby całkowite $0 =: N_0 < N_1 < \ldots < N_k$ oraz zdefiniowaliśmy częściową gałąź $\{\{\nu_1, \ldots, \nu_i\} \colon i \leqslant k\} \subset S_n$. Zdefiniujmy dalej

$$Z_j = \Big(\bigoplus_{i=N_{j-1}+1}^{N_j} X_i \Big)_{c_0} \qquad \text{dla } j = 1, \ldots, k;$$

mamy zatem

$$Z_j^* = \Big(\bigoplus_{i=N_{j-1}+1}^{N_j} X_i^* \Big)_{\ell_1} \qquad \text{dla } j = 1, \ldots, k.$$

Załóżmy także, że w przestrzeniach $Z_1, \ldots, Z_k$ określiliśmy odpowiednio normy $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_k$. Dla każdego $1 \leqslant j \leqslant k$ oznaczmy przez $|\cdot|_{1,\ldots,j}$ normę w ℓ_1-sumie prostej $(\bigoplus_{i=1}^{j}(Z_i^*, |\cdot|_i))_{\ell_1}$. Wreszcie zdefiniujmy $z_2^*, \ldots, z_k^*$ wzorami

$$z_j^* = z_{j-1}^* + P_{[1,N_j]} x^*_{\nu_1,\ldots,\nu_j} \qquad \text{dla } j = 2, \ldots, k.$$

Nasze założenie indukcyjne mówi, że dla każdego $j = 1, \ldots, k$ spełnione są następujące warunki:

(h1) $\|P_{(N_j,\infty)} x^*_{\nu_1,\ldots,\nu_j}\| < \eta$;

(h2) $\frac{1}{2}\|x\| \leqslant |x|_j \leqslant \|x\|$ dla $x \in Z_j$ (zatem $\|x^*\| \leqslant |x^*|_j \leqslant 2\|x^*\|$ dla $x^* \in Z_j^*$);

(h3) jeżeli $x^* \in Z_j^*$, $|x^*|_j = 1$, oraz $(x_m^*)_{m=1}^\infty \subset Z_j^*$ jest *-słabo zbieżnym do zera ciągiem spełniającym warunek $|x_m^*|_j \geqslant \xi \geqslant \tau$ dla $m \in \mathbb{N}$, to $\liminf_{m\to\infty} |x^* + x_m^*|_j \geqslant 1 + c\xi$;

(h4) $|z_j^*|_{1,\ldots,j} \geqslant \frac{c}{4(1+c)}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_j) - j\eta$.

Oczywiście założenie indukcyjne jest spełnione dla $k = 1$. Kontynuując konstrukcję, rozważymy dwa przypadki.

(I): Nierówność $\|P_{(N_k,\infty)} x^*_{\nu_1,\ldots,\nu_k,\nu}\| > \frac{c}{4(1+c)}\varepsilon_{k+1}$ zachodzi dla nieskończenie wielu $\nu \in \mathbb{N}$.

Ponieważ $x^*_{\nu_1,\ldots,\nu_k,\nu} \longrightarrow 0$ w *-słabej topologii przestrzeni X^*, a operator $P_{[1,N_k]}$ jest *-słabo do *-słabo ciągły, $P_{[1,N_k]} x^*_{\nu_1,\ldots,\nu_k,\nu} \longrightarrow 0$ w *-słabej topologii przestrzeni $(\bigoplus_{j=1}^k Z_j^*)_{\ell_1}$. Zatem, jako że norma $|\cdot|_{1,\ldots,j}$ jest dualna, możemy tak dobrać $\nu_{k+1} \in \mathbb{N}$, aby

$$\Big| z_k^* + P_{[1,N_k]} x^*_{\nu_1,\ldots,\nu_{k+1}} \Big|_{1,\ldots,k} > |z_k^*|_{1,\ldots,k} - \eta.$$

Następnie weźmy $N_{k+1} > N_k$ na tyle duże, aby zachodziły nierówności

$$\Big\| P_{(N_k,N_{k+1}]} x^*_{\nu_1,\ldots,\nu_{k+1}} \Big\| > \frac{c}{4(1+c)}\varepsilon_{k+1} \qquad \text{oraz} \qquad \Big\| P_{(N_{k+1},\infty)} x^*_{\nu_1,\ldots,\nu_{k+1}} \Big\| < \eta.$$

Niech teraz $|\cdot|_{k+1}$ będzie normą w przestrzeni $Z_{k+1} := (\bigoplus_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} X_i)_{c_0}$ skonstruowaną według stwierdzenia 2.5 (dla wcześniej ustalonego parametru τ). Zdefiniujmy także $|\cdot|_{1,\ldots,k+1}$ oraz z_{k+1}^* tak samo jak wcześniej, przyjmując $j = k + 1$. Wówczas, na mocy warunku (h4), otrzymujemy

$$\begin{aligned} |z_{k+1}^*|_{1,\ldots,k+1} &> |z_k^*|_{1,\ldots,k} + \frac{c}{4(1+c)}\varepsilon_{k+1} - \eta \\ &\geqslant \frac{c}{4(1+c)}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{k+1}) - (k+1)\eta, \end{aligned}$$

co dowodzi warunku (h4) dla $j = k + 1$. Warunki (h1)–(h3) spełnione są w oczywisty sposób.

(II): Warunek (I) nie zachodzi.

Oczywiście w tym przypadku dla prawie wszystkich liczb naturalnych ν zachodzi nierówność $\|P_{(N_k,\infty)}x^*_{\nu_1,\dots,\nu_k,\nu}\| \leqslant \frac{c}{4(1+c)}\varepsilon_{k+1}$. Ponieważ $\|x^*_a\| \geqslant \frac{1}{4}\varepsilon_{k+1}$ dla każdego $a \in S_n$ o własności $|a| = k + 1$, mamy także

$$\left|P_{[1,N_k]}x^*_{\nu_1,\dots,\nu_k,\nu}\right|_{1,\dots,k} \geqslant \frac{\varepsilon_{k+1}}{4(1+c)} \quad \text{dla prawie wszystkich } \nu \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Skorzystamy teraz z własności norm $|\cdot|_1, \dots |\cdot|_k$. Zauważmy, że normy elementów rozważanego odwzorowania drzewowego nie przekraczają n. Ponadto z^*_k jest jednym z takich elementów, powstałym poprzez „obcięcie” k wektorów o normie mniejszej od η. Mamy zatem

$$\|z^*_k\| \leqslant n + k\eta \leqslant n(1+\eta),$$

skąd $|z^*_k|_{1,\dots,k} \leqslant 2n(1+\eta)$. Dla każdego $j = 1, \dots, k$ połóżmy $I_j = (N_{j-1}, N_j]$ i zauważmy, że

$$\liminf_{\nu\to\infty} \left|P_{I_j}(z^*_k + x^*_{\nu_1,\dots,\nu_k,\nu})\right|_j \geqslant \left|P_{I_j}z^*_k\right|_j, \tag{3.5}$$

ponieważ $P_{I_j}x^*_{\nu_1,\dots,\nu_k,\nu} \longrightarrow 0$ w *-słabej topologii przestrzeni Z^*_j. Z drugiej strony, na mocy warunku (h3), dla każdego nieskończonego zbioru $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}$, mamy

$$\begin{aligned}\liminf_{\nu\in\mathcal{M}} \left|P_{I_j}(z^*_k + x^*_{\nu_1,\dots,\nu_k,\nu})\right|_j &= \left|P_{I_j}z^*_k\right|_j \cdot \liminf_{\nu\in\mathcal{M}} \left|\frac{P_{I_j}z^*_k}{\left|P_{I_j}z^*_k\right|_j} + \frac{P_{I_j}x^*_{\nu_1,\dots,\nu_k,\nu}}{\left|P_{I_j}z^*_k\right|_j}\right|_j \geqslant \\ &\geqslant \left|P_{I_j}z^*_k\right|_j + c\cdot\liminf_{\nu\in\mathcal{M}} \left|P_{I_j}x^*_{\nu_1,\dots,\nu_k,\nu}\right|_j,\end{aligned} \tag{3.6}$$

przy założeniu, że $\liminf_{\nu\in\mathcal{M}} |P_{I_j}x^*_{\nu_1,\dots,\nu_k,\nu}|_j \geqslant \tau|P_{I_j}z^*_k|_j$.

Niech $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}$ będzie takim zbiorem nieskończonym, że ciąg $(|P_{I_j}x^*_{\nu_1,\dots,\nu_k,\nu}|_j)_{\nu\in\mathcal{M}}$ jest zbieżny dla każdego $j = 1, \dots, k$. Niech dalej

$$a_j = \liminf_{\nu\in\mathcal{M}} \left|P_{I_j}x^*_{\nu_1,\dots,\nu_k,\nu}\right|_j \quad \text{oraz} \quad b_j = \left|P_{I_j}z^*_k\right|_j \quad \text{dla } j = 1, \dots, k.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\sum_{\{j\colon a_j\geqslant\tau b_j\}} a_j &= \sum_{j=1}^k a_j - \sum_{\{j\colon a_j<\tau b_j\}} a_j \geqslant \sum_{j=1}^k a_j - \tau \sum_{\{j\colon a_j<\tau b_j\}} b_j \geqslant \\ &\geqslant \sum_{j=1}^k a_j - \tau\sum_{j=1}^k b_j \geqslant \sum_{j=1}^k a_j - 2n\tau(1+\eta).\end{aligned}$$

Korzystając z tego spostrzeżenia oraz z nierówności (3.4), (3.5) i (3.6), uzyskujemy

$$\begin{aligned}\liminf_{\nu\in\mathcal{M}} \left|z^*_k + P_{[1,N_k]}x^*_{\nu_1,\dots,\nu_k,\nu}\right|_{1,\dots,k} &\geqslant \sum_{j=1}^k \liminf_{\nu\in\mathcal{M}} \left|P_{I_j}(z^*_k + x^*_{(\nu_1,\dots,\nu_k,\nu)})\right|_j \geqslant \\ &\geqslant \sum_{\{j\colon a_j<\tau b_j\}} b_j + \sum_{\{j\colon a_j\geqslant\tau b_j\}} (b_j + ca_j) = |z^*_k|_{1,\dots,k} + c\sum_{\{j\colon a_j\geqslant\tau b_j\}} a_j \geqslant \\ &\geqslant |z^*_k|_{1,\dots,k} + c\Big(\sum_{j=1}^k a_j - 2n\tau(1+\eta)\Big) = \\ &= |z^*_k|_{1,\dots,k} + c\cdot\lim_{\nu\in\mathcal{M}} \left|P_{[1,N_k]}x^*_{\nu_1,\dots,\nu_k,\nu}\right|_{1,\dots,k} - 2nc\tau(1+\eta) \geqslant \\ &\geqslant |z^*_k|_{1,\dots,k} + \frac{c\varepsilon_{k+1}}{4(1+c)} - 2nc\tau(1+\eta) > |z^*_k|_{1,\dots,k} + \frac{c\varepsilon_{k+1}}{4(1+c)} - \eta;\end{aligned}$$

ostatnia nierówność wynika z definicji τ oraz faktu, że $c < 1$. Uwzględniając zatem założenie indukcyjne (h4), znajdujemy taką liczbę naturalną ν_{k+1}, że

$$\left|z_k^* + P_{[1,N_k]}x^*_{\nu_1,\ldots,\nu_{k+1}}\right|_{1,\ldots,k} \geqslant \frac{c}{4(1+c)}\sum_{j=1}^{k+1}\varepsilon_j - (k+1)\eta.$$

Bierzemy teraz $N_{k+1} > N_k$ na tyle duże, aby spełniony był warunek (h1) dla $j = k+1$, definiujemy Z_{k+1} jako $(\bigoplus_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} X_i)_{c_0}$, a ze stwierdzenia 2.5 dostajemy normę $|\cdot|_{k+1}$ w przestrzeni Z_{k+1} spełniającą warunki (h2) i (h3) dla $j = k+1$. Wcześniejsze oszacowania pokazują, że warunek (h4) także zachodzi dla $j = k+1$, gdzie

$$z^*_{k+1} = z_k^* + P_{[1,N_{k+1}]}x^*_{\nu_1,\ldots,\nu_{k+1}}.$$

Kończy to konstrukcję indukcyjną.

Mając już zdefiniowaną gałąź $\Gamma = \{\{\nu_1,\ldots,\nu_i\} : i \leqslant n\}$, uzyskujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} 1 &\geqslant \Big\|\sum_{a\in\Gamma} x_a^*\Big\| \geqslant \Big\|\sum_{k=1}^{n} P_{[1,N_k]}x^*_{\nu_1,\ldots,\nu_k}\Big\| - n\eta \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2}|z_n^*|_{1,\ldots,n} - n\eta \geqslant \frac{c}{8(1+c)}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j - \frac{3}{2}n\eta. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy przy $\eta \to 0$, otrzymujemy $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \leqslant 8(1+c^{-1})$, co kończy dowód. □

3.4. Przykłady

Zgodnie z rozważaniami zawartymi w sekcji 1.2 założenie jednakowej sumowalności indeksu Szlenka dla rodziny $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ w twierdzeniu 3.14 jest konieczne, w takim sensie, że rodzina (wszystkich) podprzestrzeni danej przestrzeni Banacha z sumowalnym indeksem Szlenka musi posiadać tę własność. Okazuje się jednak, że założenie to jest *bardzo* istotne, co obrazuje poniższy przykład 3.15. Zanim jednak do niego przejdziemy, przypomnimy pojęcie topologicznej sumy prostej.

Załóżmy, że $\{S_i : i \in I\}$ jest rodziną przestrzeni topologicznych. Przez *topologiczną sumę prostą* $\bigoplus_{i\in I} S_i$ rodziny $\{S_i : i \in I\}$ rozumiemy zbiór $S \coloneqq \bigcup_{i\in I} S_i \times \{i\}$ wyposażony w najuboższą topologię, w której kanoniczne zanurzenia $\varphi_i : S_i \to S$ dane wzorami $\varphi_i(s) = (s,i)$, dla $i \in I$ oraz $s \in S_i$, są odwzorowaniami ciągłymi. Równoważnie, w zbiorze S wprowadzamy topologię dziedziczoną z produktu $\bigcup_{i\in I} S_i \times I$, gdzie zbiór I wyposażamy w topologię dyskretną.

Przykład 3.15. Na mocy twierdzenia Bessagi–Pełczyńskiego (zob. [16, Lemma 2.57]) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ przestrzeń $\mathcal{C}([0,\omega^n])$ jest izomorficzna z przestrzenią c_0, w szczególności ma ona sumowalny indeks Szlenka. Łatwo też zauważyć, że odwzorowanie $f : \bigoplus_{n=1}^\infty [0,\omega^n) \to [1,\omega^\omega)$ dane wzorem $f(\alpha,n) = \omega^{n-1} + \alpha$, dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\alpha < \omega^n$, jest homeomorfizmem. Łącząc to spostrzeżenie z uwagami zawartymi w [17, rozdział 36], możemy przeprowadzić następujący rachunek:

$$\Big(\bigoplus_{n=1}^\infty \mathcal{C}([0,\omega^n])\Big)_{c_0} \sim \Big(\bigoplus_{n=1}^\infty \mathcal{C}_0([0,\omega^n))\Big)_{c_0} \sim \mathcal{C}_0\Big(\bigoplus_{n=1}^\infty [0,\omega^n)\Big) \sim \mathcal{C}_0([1,\omega^\omega)) \sim \mathcal{C}([0,\omega^\omega]),$$

gdzie zapis $X \sim Y$ oznacza, że przestrzenie X i Y są izomorficzne. Z drugiej strony, na mocy [16, Theorem 2.58], mamy $\mathrm{Sz}(\mathcal{C}([0,\omega^\omega])) = \omega^2$.

Przykład 3.16. Zgodnie z twierdzeniem 3.14 przestrzeń $c_0(\mathfrak{T})$ ma sumowalny indeks Szlenka. Daje to nowy przykład przestrzeni Banacha o tej własności, gdyż fakt ten w bezpośredni sposób trudno odczytać z pracy [23], gdzie rozważane były przestrzenie z sumowalnym H-indeksem.

Warto także zadać pytanie, czy w twierdzeniu 3.14 przestrzeni c_0 nie można zastąpić dowolną przestrzenią z sumowalnym indeksem Szlenka i bazą 1-bezwarunkową. Okazuje się, że nie, i to w bardzo silnym sensie.

Stwierdzenie 3.17. *Ustalmy ciąg $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha i załóżmy, że $\mathfrak{E}$ jest przestrzenią Banacha z sumowalnym indeksem Szlenka oraz unormowaną bazą 1-bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Jeżeli ciąg bazowy $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ nie jest równoważny z bazą kanoniczną przestrzeni ℓ_1, to przestrzeń $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}$ nie ma sumowalnego indeksu Szlenka.*

Dowód. Ponieważ ciąg $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ nie jest równoważny z bazą przestrzeni ℓ_1, istnieje taki ciąg $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \subset [0, \infty)$, że

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e_n^* \Big\| = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty.$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wybierzmy teraz unormowany i *-słabo zbieżny do zera ciąg $(\xi_{n,k}^*)_{k=1}^{\infty} \subset X_n^*$ (ciąg ten istnieje na mocy twierdzenia Josefsona–Nissenzweiga). Skonstruujemy pewne *-słabo zerowe odwzorowania drzewowe w przestrzeni $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}^* = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n^*)_{\mathfrak{E}^*}$.

Ustalmy $N \in \mathbb{N}$ i dla każdego $a \in S_N$ połóżmy

$$x_{a^\frown m}^* = \big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{|a|}, \gamma_{|a|+1} \xi_{|a|+1,m}^*, 0, 0, \ldots \big) \qquad \text{dla } m > \max a.$$

Zauważmy, że dla dowolnej gałęzi $\Gamma \subset S_N$ istnieją takie indeksy $m_1 < \ldots < m_N$, że

$$\sum_{a \in \Gamma} x_a^* = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi_{n,m_n}^*,$$

a zatem, jako że baza $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ także jest 1-bezwarunkowa,

$$\Big\| \sum_{a \in \Gamma} x_a^* \Big\| = \Big\| \sum_{n=1}^{N} \gamma_n \xi_{n,m_n}^* \Big\| = \Big\| \sum_{n=1}^{N} \gamma_n e_n^* \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e_n^* \Big\| = 1.$$

W połączeniu ze stwierdzeniem 2.1 dowodzi to, że

$$\iota_{\gamma_1} \ldots \iota_{\gamma_N} B_{(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}^*} \neq \varnothing.$$

Z dowolności N oraz faktu $\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \gamma_n = \infty$ wynika teza. □

Przykład 3.18. Przestrzeń $\mathfrak{T}(c_0)$ nie ma sumowalnego indeksu Szlenka. W szczególności oznacza to, że przestrzenie $c_0(\mathfrak{T})$ oraz $\mathfrak{T}(c_0)$ nie są izomorficzne.

Przykład 3.19. Przestrzeń $\mathfrak{T}(\mathfrak{T})$ nie ma sumowalnego indeksu Szlenka. Podobnie jak wyżej, oznacza to, że przestrzenie $\mathfrak{T}$ oraz $\mathfrak{T}(\mathfrak{T})$ nie są izomorficzne. Wobec refleksywności przestrzeni Tsirelsona przestrzenie T oraz $T(T)$ także nie są izomorficzne. Przykład ten jest o tyle interesujący, że w przypadku klasycznych przestrzeni Banacha, to jest gdy $\mathfrak{E} = c_0$ lub $\mathfrak{E} = \ell_p$ przestrzenie $\mathfrak{E}$ oraz $\mathfrak{E}(\mathfrak{E})$ są w kanoniczny sposób izomorficzne (a nawet izometryczne).

3.5. Sumowalność indeksu ogólnej sumy przestrzeni skończenie wymiarowych

Wcześniejsze przykłady dowodzą, że w twierdzeniu 3.14 przestrzeń c_0 odgrywa istotną rolę. Okazuje się jednak, że przy ograniczeniu do skończenie wymiarowych składników, sumowalność indeksu Szlenka zachowuje się.

Twierdzenie 3.20. *Załóżmy, że $\mathfrak{E}$ jest przestrzenią Banacha z sumowalnym indeksem Szlenka i bazą 1-bezwarunkową. Wówczas dla dowolnego ciągu $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ przestrzeni skończenie wymiarowych przestrzeń $X := (\bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n)_{\mathfrak{E}}$ ma sumowalny indeks Szlenka.*

Dowód. Pokażemy, że dla każdego $\sigma > 0$ zachodzi równość $N_X(\sigma) = N_{\mathfrak{E}}(\sigma)$ (co wystarczy wobec twierdzenia 2.2). Ponieważ przestrzeń $\mathfrak{E}$ zanurza się izometrycznie w przestrzeń X, nierówność $N_X(\sigma) \leqslant N_{\mathfrak{E}}(\sigma)$ jest oczywista; wystarczy więc pokazać, że $N_X(\sigma) \geqslant N_{\mathfrak{E}}(\sigma)$.

Ustalmy zatem $\sigma > 0$ i załóżmy, że $N_X(\sigma) < \infty$. Istnieją wówczas liczba naturalna N oraz słabo zerowe odwzorowanie drzewowe $(\mathbf{x}_a)_{a\in S_N} \subset X$, gdzie $\mathbf{x}_a = (x_{a,k})_{k=1}^{\infty}$ dla $a \in S_N$, spełniające warunki

- $\|x_a\| \leqslant \sigma$ dla każdego $a \in S_N$;
- $\| \sum_{a\in\Gamma} x_a\| > 1$ dla każdej gałęzi $\Gamma \subset S_N$.

Zdefiniujmy teraz odwzorowanie drzewowe $(y_a)_{a\in S_N} \subset \mathfrak{E}$ wzorem

$$y_a = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{a,k}\| e_k \quad \text{dla } a \in S_N,$$

gdzie $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ oznacza daną bazę unormowaną i 1-bezwarunkową przestrzeni $\mathfrak{E}$. Oczywiście $\|y_a\| = \|\mathbf{x}_a\| \leqslant \sigma$. Dla każdej gałęzi $\Gamma \subset S_N$ zachodzą także nierówności

$$\Big\| \sum_{a\in\Gamma} y_a \Big\| = \Big\| \sum_{a\in\Gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{a,k}\| e_k \Big\| \geqslant \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \Big\| \sum_{a\in\Gamma} x_{a,k} \Big\| e_k \Big\| = \Big\| \sum_{a\in\Gamma} \mathbf{x}_a \Big\| > 1.$$

Ponadto, jako że przestrzenie F_n są skończenie wymiarowe, $\lim_{n\to\infty} \|x_{a^\frown n,k}\| = 0$ dla wszelkich $k \in \mathbb{N}$ i $a \in S_N$. Zatem, na mocy wniosku 3.7, odwzorowanie $(y_a)_{a\in S_N}$ jest słabo zerowe; kończy to dowód. □

Uwaga 3.21. W przypadku gdy $\mathfrak{E} = c_0$ twierdzenie 3.20 nie daje żadnych nowych przykładów. Istotnie, ponieważ każda przestrzeń skończenie wymiarowa zanurza się „prawie izometrycznie" w przestrzeń c_0 (zob. [1, §11.1]), c_0-suma prosta przestrzeni skończenie wymiarowych zanurza się w przestrzeń $c_0(c_0) \cong c_0$.

Uwaga 3.22. Twierdzenie 3.20 można wywnioskować także z [23, Proposition 6.7]; idea polega wtedy na zauważeniu, że „ℓ_1-zachowanie" bazy przestrzeni $\mathfrak{E}^*$ przenosi się na „ℓ_1-zachowanie" naturalnego FDD (zob. definicja 4.1) w przestrzeni $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n^*)_{\mathfrak{E}^*}$. Twierdzenie to prezentujemy jednak ze względu na zupełnie odmienny, oparty na odwzorowaniach drzewowych, dowód.

Rozdział 4

Typ potęgowy Szlenka a sumy proste

4.1. Przestrzenie ℓ_p-asymptotyczne

Celem tego podrozdziału jest wprowadzenie pojęcia przestrzeni ℓ_p-asymptotycznej (względem pewnego FDD) oraz pokazanie, iż odpowiednio „dalekie" skończenie wymiarowe podprzestrzenie takiej przestrzeni zanurzają się, w pewnym sensie jednostajnie, w skończenie wymiarowe przestrzenie ℓ_p. Podobne fakty dotyczące przestrzeni Tsirelsona znajdują się w [3, rozdział 4]. Kluczowym krokiem dowodu będzie lemat o urozłącznianiu, który dla przestrzeni L_p – poprzez zaproponowaną przez Kwapienia metodę sprowadzenia do przypadku L_∞ – został zaprezentowany w artykule [36]. Wersję tego lematu dla ogólnych krat Banacha stanowi [29, Proposition 3]. W dalszej części istotna dla nas będzie dodatniość operatora dającego odpowiedni izomorfizm, więc odtworzymy dowód w miarę dokładnie.

Definicja 4.1. Mówimy, że ciąg $(E_n)_{n=1}^\infty$ skończenie wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni X jest jej *rozkładem skończenie wymiarowym* (w skrócie FDD od ang. *finite-dimensional decomposition*), jeżeli każdy wektor $x \in X$ można jednoznacznie zapisać jako $\sum_{n=1}^\infty x_n$, gdzie $(x_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty E_n$.

Uwaga 4.2. Jeśli dana przestrzeń ma bazę, powiedzmy $(e_n)_{n=1}^\infty$, to jej naturalnym FDD jest ciąg $(\mathrm{span}\{e_n\})_{n=1}^\infty$. Istnieją jednak przestrzenie posiadające FDD, a nieposiadające bazy (zob. [39]).

Wobec powyższej uwagi rozkłady skończenie wymiarowe są uogólnieniami baz Schaudera; wiele pojęć i twierdzeń dotyczących baz bezpośrednio przenosi się na te rozkłady. Na przykład, jeżeli $I \subset \mathbb{N}$ jest przedziałem, to symbolem P_I oznaczać będziemy kanoniczny rzut przestrzeni z danym FDD $(E_n)_{n=1}^\infty$ na przestrzeń $\overline{\mathrm{span}}\bigcup_{n\in I} E_n$. Tak samo jak w przypadku baz, P_n oznaczać będzie rzut $P_{\{n\}}$. *Nośnikiem* (względem danego FDD) wektora x nazywać będziemy zbiór

$$\mathrm{supp}\, x = \{n \in \mathbb{N} \colon P_n(x) \neq 0\}.$$

Ciąg $(x_j)_{j=1}^n$ nazywać będziemy *podciągiem blokowym* ciągu/FDD $(E_j)_{j=1}^\infty$ (lub krótko: *ciągiem blokowym*), jeżeli istnieją takie naturalne wskaźniki $\nu_0 < \nu_1 < \ldots \nu_n$, że

$$x_j \in \mathrm{span}\bigcup\{E_i \colon \nu_{j-1} \leqslant i < \nu_j\} \quad \text{dla } j = 1, \ldots, n.$$

Definicja 4.3. Mówimy, że przestrzeń Banacha X jest *C-ℓ_p-asymptotyczna* (dla pewnych $C \geqslant 1$ i $1 \leqslant p \leqslant \infty$) względem swojego FDD $(E_n)_{n=1}^\infty$, jeżeli dla każdego blokowego podciągu $(x_j)_{j=1}^n$ ciągu $(E_j)_{j=n}^\infty$ zachodzą nierówności

$$\frac{1}{C}\bigg(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\bigg)^{1/p} \leqslant \bigg\|\sum_{j=1}^n x_j\bigg\| \leqslant C\bigg(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\bigg)^{1/p};$$

w przypadku $p = \infty$ w skrajnych stronach powyższych nierówności rozważamy normę maksimum, to jest $\max\{\|x_j\| \colon 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Mówimy, że przestrzeń X jest ℓ_p-*asymptotyczna* względem FDD $(E_n)_{n=1}^{\infty}$, jeżeli jest ona C-ℓ_p-asymptotyczna względem tego FDD dla pewnego $C \geqslant 1$.

Przykład 4.4. Przestrzeń Tsirelsona T jest 2-ℓ_1-asymptotyczna względem FDD danego przez bazę kanoniczną; wynika to wprost z definicji normy w tej przestrzeni.

Uwaga 4.5. Powyższe pojęcie ℓ_p-asymptotyki zostało wprowadzone w pracy [32]. W późniejszym czasie, w artykule [31], rozważana była ogólniejsza definicja ℓ_p-asymptotyki, nieużywająca bazy ani FDD, a wyrażająca się w języku pewnych gier nieskończonych. Związek między tymi pojęciami można znaleźć w pracy Odella, Schlumprechta i Zsáka [35], gdzie pokazali oni między innymi, że każda ośrodkowa i refleksywna przestrzeń ℓ_p-asymptotyczna (w sensie wspomnianych gier) zanurza się izomorficznie w przestrzeń refleksywną posiądająca FDD, względem którego jest ona ℓ_p-asymptotyczna.

Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha X nazywamy *kratą Banacha*, jeżeli wyposażona jest ona w relację kratowego porządku $\leqslant$ spełniającą warunki

(i) jeżeli $x \leqslant y$, to $x + z \leqslant y + z$ dla $x, y, z \in X$;

(ii) jeżeli $0 \leqslant x$, to $0 \leqslant \alpha x$ dla $x \in X$ i $\alpha \in [0, \infty)$;

(iii) jeżeli $|x| \leqslant |y|$, to $\|x\| \leqslant \|y\|$ dla $x, y \in X$;

stosujemy tu standardowe oznaczenia: $x \wedge y \coloneqq \inf\{x, y\}$, $x \vee y \coloneqq \sup\{x, y\}$ oraz $|x| \coloneqq x \vee (-x)$. Operator liniowy pomiędzy kratami Banacha X i Y nazwiemy *dodatnim*, jeżeli $T(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in X$ spełniającego warunek $x \geqslant 0$. Można wykazać, że dodatniość operatora implikuje jego ciągłość (zob. [30, tom II, §1.a]). Powiemy, że kraty X i Y są *porządkowo izomorficzne*, jeśli istnieje izomorfizm $T \colon X \to Y$, który zachowuje porządek, to znaczy T i T^{-1} są operatorami dodatnimi.

Przykład 4.6. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. W przestrzeni $L_\infty(\Omega)$ wprowadzamy strukturę kratową, przyjmując dla $f, g \in L_\infty(\Omega)$

$$f \leqslant g \;:\Longleftrightarrow\; f(\omega) \leqslant g(\omega) \text{ dla } \mu\text{-prawie wszystkich } \omega \in \Omega.$$

Przykład 4.7. Niech X będzie przestrzenią Banacha z bazą 1-bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Przestrzeń X posiada naturalną strukturę kratową, mianowicie dla $x, y \in X$ przyjmujemy

$$x \leqslant y \;:\Longleftrightarrow\; e_n^*(x) \leqslant e_n^*(y) \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Przed wysłowieniem głównego wyniku tej sekcji krótko przypomnijmy jeszcze, że *hierarchią szybko rosnącą* nazywamy ciąg funkcji $g_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (gdzie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) zdefiniowany indukcyjnie w następujący sposób: $g_0(n) = n+1$ oraz $g_{k+1}(n) = g_k^n(n)$ dla $k \geqslant 0$ (symbolem f^n oznaczyliśmy n-krotną iterację funkcji f). Łatwo zauważyć, że

$$g_1(n) = 2n, \quad g_2(n) = n \cdot 2^n \quad \text{i} \quad g_3(n) \geqslant 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}} \qquad (n \text{ wystąpień } 2).$$

Tak naprawdę, w rozumowaniach prowadzących do głównego twierdzenia, użyjemy tylko trzech powyższych wyrazów tej hierarchii.

Stwierdzenie 4.8. *Niech X będzie przestrzenią Banacha z bazą 1-bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, względem której jest ona C-ℓ_p-asymptotyczna dla pewnych $1 \leqslant p \leqslant \infty$ oraz $C \geqslant 1$. Wówczas każda n-wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni X rozpięta przez wektory o nośniku zawartym w przedziale $[n+1, \infty)$ jest izomorficzna z podprzestrzenią przestrzeni ℓ_p^N, gdzie $N \leqslant (4n)^n$, przy czym odległość Banacha–Mazura tych podprzestrzeni nie przekracza $3C^8$. Ponadto odpowiedni izomorfizm można zadać przez operator dodatni.*

Dowód. Rozważymy tylko przypadek, gdy $p < \infty$. W przypadku, gdy $p = \infty$ dowód przebiega analogicznie; poza tym przypadek ten nie będzie potrzebny do uzyskania głównego wyniku. Dowód podzielimy na trzy etapy.

KROK 1. Pokażemy, że dla każdego $k \geqslant 0$ dowolny ciąg blokowy $(v_i)_{i=1}^{g_k(n)}$ unormowanych wektorów przestrzeni X, których nośniki są zawarte w przedziale $[n+1, \infty)$, jest C^{k+1}-równoważny bazie kanonicznej przestrzeni $\ell_p^{g_k(n)}$, to znaczy spełnione są nierówności

$$\frac{1}{C^{k+1}}\left(\sum_{i=1}^{g_k(n)}|a_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{g_k(n)} a_i v_i\right\| \leqslant C^{k+1}\left(\sum_{i=1}^{g_k(n)}|a_i|^p\right)^{1/p}$$

dla dowolnego ciągu skalarów $(a_i)_{i=1}^{g_k(n)}$.

Zastosujemy indukcję względem k. Jeżeli $k = 0$, to otrzymujemy ciąg blokowy $n+1$ wektorów unormowanych, których nośniki są zawarte w przedziale $[n+1, \infty)$, a zatem żądane nierówności wynikają wprost z definicji.

Załóżmy więc, że teza zachodzi dla pewnego $k \geqslant 0$ i niech $(v_i)_{i=1}^{g_{k+1}(n)}$ będzie unormowanym podciągiem blokowym ciągu $(e_m)_{m=1}^{\infty}$ spełniającym warunek

$$n < \operatorname{supp} v_1 < \ldots < \operatorname{supp} v_{g_{k+1}(n)}.$$

Niech dalej

$$E_j = \left\{g_k^{j-1}(n)+1, g_k^{j-1}(n)+2, \ldots, g_k^j(n)\right\} \qquad \text{dla } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

(Umawiamy się, że $g_k^0(n) = 0$). Zauważmy, że zbiory E_j stanowią podział zbioru indeksów $\{1, \ldots, g_{k+1}(n)\}$ na n kolejnych kawałków. Ponieważ przestrzeń X jest C-ℓ_p-asymptotyczna, dla dowolnego ciągu skalarów $(a_i)_{i=1}^{g_{k+1}(n)}$ zachodzą nierówności

$$\frac{1}{C}\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i\in E_j} a_i v_i\right\|^p\right)^{1/p} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{g_{k+1}(n)} a_i v_i\right\| \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i\in E_j} a_i v_i\right\|^p\right)^{1/p}. \tag{4.1}$$

Zauważmy, że dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$ ciąg $(v_i)_{i\in E_j}$ spełnia warunek

$$g_k^{j-1}(n) < \operatorname{supp} v_{\min E_j} < \ldots < \operatorname{supp} v_{\max E_j}.$$

Ponadto $|E_j| \leqslant g_k^j(n) = g_k(g_k^{j-1}(n))$, zatem na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\frac{1}{C^{k+1}}\left(\sum_{i\in E_j}|a_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left\|\sum_{i\in E_j} a_i v_i\right\| \leqslant C^{k+1}\left(\sum_{i\in E_j}|a_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{dla } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Dalej, na mocy nierówności (4.1), uzyskujemy

$$\left\|\sum_{i=1}^{g_{k+1}(n)} a_i v_i\right\| \geqslant \frac{1}{C}\left(\frac{1}{C^{p(k+1)}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in E_j}|a_i|^p\right)^{1/p} = \frac{1}{C^{k+2}}\left(\sum_{i=1}^{g_{k+1}(n)}|a_i|^p\right)^{1/p}$$

oraz

$$\left\|\sum_{i=1}^{g_{k+1}(n)} a_i v_i\right\| \leqslant C\left(C^{p(k+1)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in E_j}|a_i|^p\right)^{1/p} = C^{k+2}\left(\sum_{i=1}^{g_{k+1}(n)}|a_i|^p\right)^{1/p},$$

co kończy dowód pierwszego etapu.

Krok 2. Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ zdefiniujmy $N(n,\varepsilon) = \lceil 2n/\varepsilon \rceil^n$. Niech L będzie kratą Banacha, a $F \subset L$ jej n-wymiarową podprzestrzenią. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją parami rozłączne elementy $g_1, \dots, g_{N(n,\varepsilon)} \in L$ (to znaczy $|g_i| \wedge |g_j| = 0$ dla $i \neq j$) oraz dodatni operator $V\colon F \to \operatorname{span}\{g_i\colon 1 \leqslant i \leqslant N(n,\varepsilon)\}$ spełniający warunek $\|Vx - x\| \leqslant \varepsilon\|x\|$ dla $x \in F$.

Podamy jedynie szkic dowodu oparty na dowodzie [29, Proposition 3]. W szczególności, mówiąc o elementach przestrzeni $L_\infty(\Omega)$, będziemy posługiwać się reprezentantami odpowiednich klas abstrakcji.

Niech $(f_i)_{i=1}^n$ będzie bazą Auerbacha przestrzeni F, to jest taką bazą, że $\|f_i\| = \|f_i^*\| = 1$ dla $i = 1, \dots, n$. Oczywiście dla dowolnego ciągu skalarów $(a_i)_{i=1}^n$ zachodzi nierówność

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right\| \geqslant \max\{|a_i|\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}. \tag{4.2}$$

Połóżmy $f_0 = n^{-1} \sum_{i=1}^n |f_i|$ i zdefiniujmy kratę Banacha $(Z, |||\cdot|||)$ wzorami

$$Z = \{f \in L\colon |f| < tf_0 \text{ dla pewnego } t > 0\}$$

oraz

$$|||f||| = \inf\{t > 0\colon |f| < tf_0\} \quad \text{dla } f \in Z.$$

Spełnione są tu założenia twierdzenia Kakutaniego (zob. [30, tom II, Theorem 1.b.6]), a zatem krata Z jest porządkowo izometryczna z podkratą kraty $L_\infty(\Omega)$ dla pewnego zbioru Ω, z którą będziemy ją utożsamiać.

Niech $d = \lceil 2n/\varepsilon \rceil$. Weźmy parami rozłączne przedziały $I_1, \dots, I_d \subset [-1,1]$, o długości co najwyżej ε/n, pokrywające przedział $[-1,1]$. Dla każdego $\gamma = (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, d\}^n$ zdefiniujmy

$$G_\gamma = \{\omega \in \Omega\colon f_j(\omega) \in I_{i_j} \text{ dla każdego } 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Oczywiście $\{G_\gamma\colon \gamma \in \{1, \dots, d\}^n\}$ jest rodziną mocy co najwyżej $d^n = N(n,\varepsilon)$, składającą się z parami rozłącznych zbiorów mierzalnych. Oznacza to, że krata generowana przez funkcje charakterystyczne zbiorów G_γ jest porządkowo izometryczna z kratą ℓ_∞^m dla pewnego $m \leqslant d^n$.

Będziemy teraz przybliżać wektory f_i kombinacjami liniowymi funkcji charakterystycznych zbiorów G_γ z dokładnością do ε/n. W tym celu dla każdego $\gamma \in \{1, \dots, d\}^n$, dla którego $G_\gamma \neq \varnothing$, wybierzmy punkt $\omega_\gamma \in G_\gamma$ i przyjmijmy $t_{\gamma,i} = f_i(\omega_\gamma)$. Wówczas zachodzą nierówności

$$\left|\left|\left| f_i - \sum_{\gamma \in \{1,\dots,d\}^n} t_{\gamma,i} \chi_{G_\gamma} \right|\right|\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{4.3}$$

Dla każdego $x \in F$ postaci $x = \sum_{i=1}^n a_i f_i$ zdefiniujmy

$$Vx = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{\gamma \in \{1,\dots,d\}^n} t_{\gamma,i} \chi_{G_\gamma} \tag{4.4}$$

i zauważmy, że $V\colon F \to \operatorname{span}\{\chi_{G_\gamma}\colon \gamma \in \{1, \dots, d\}^n\}$ jest operatorem liniowym. Pokażemy, że V jest także operatorem dodatnim. Ustalmy zatem $x \geqslant 0$ (postaci jak wyżej) i dla każdego $\omega \in \Omega$ dobierzmy (jedyne) $\gamma \in \{1, \dots, d\}^n$, dla którego $\omega \in G_\gamma$. Wówczas

$$(Vx)(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i t_{\gamma,i} = \sum_{i=1}^n a_i f_i(\omega_\gamma) = x(\omega_\gamma) \geqslant 0.$$

Pozostaje do pokazania, że $\|Vx-x\| \leqslant \varepsilon\|x\|$ dla $x \in F$. Ustalmy więc wektor $x = \sum_{i=1}^n a_i f_i \in F$ i załóżmy, że $\|x\| = 1$. Korzystając z warunków (4.2), (4.3) i (4.4), uzyskujemy

$$|||Vx-x||| = \left|\left|\left|\sum_{i=1}^n a_i\Big(f_i - \sum_{\gamma\in\{1,\ldots,d\}^n} t_{\gamma,i}\chi_{G_\gamma}\Big)\right|\right|\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i|\cdot\frac{\varepsilon}{n} \leqslant n\cdot\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

To z kolei oznacza, że $|Vx-x| \leqslant \varepsilon f_0$, skąd wreszcie $\|Vx-x\| \leqslant \varepsilon$.

Krok 3. Ustalmy dowolnie n-wymiarową podprzestrzeń F przestrzeni X rozpiętą przez wektory, których nośniki zawarte są w przedziale $[n+1,\infty)$. Jako że przestrzeń X posiada bazę 1-bezwarunkową, ma ona naturalną strukturę kratową. Możemy zatem zastostować poprzedni krok do kraty $L = \mathrm{span}\{e_k\colon k \geqslant n+1\}$ oraz $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Zauważmy, że $N(n,\frac{1}{2}) = (4n)^n \leqslant g_3(n)$ (trywialny przypadek $n=1$ pomijamy), a więc stosując pierwszy krok dowodu dla $k=3$, otrzymujemy izomorfizm na swój obraz $\Phi = W\circ V\colon F \to \ell_p^N$, gdzie $N \leqslant (4n)^n$, V jest operatorem jak wyżej, a W jest operatorem zadanym przez warunki $Wg_i = e_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant N$. Ponieważ V jest operatorem dodatnim, Φ także ma tę własność. Ponadto

$$\|\Phi\|\cdot\|\Phi^{-1}\| \leqslant \|V\|\cdot\|V^{-1}\|\cdot\|W\|\cdot\|W^{-1}\| \leqslant \frac{3}{2}\cdot 2\cdot C^4\cdot C^4 = 3C^8,$$

co kończy dowód. □

4.2. Oszacowania norm w przestrzeniach ℓ_p-asymptotycznych

Kolejnym krokiem w stronę głównego twierdzenia tego rozdziału będzie uzyskanie pewnego logarytmicznego oszacowania w przestrzeniach ℓ_p-asymptotycznych. Z grubsza rzecz biorąc, będziemy chcieli oszacować z dołu – odpowiednio rozumianą – sumę wektorów dodatnich przy pomocy norm tych wektorów. Co istotne, nie czynimy żadnych założeń dotyczących nośników owych wektorów.

Rozważmy przestrzeń Banacha X z bazą 1-bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^\infty$ (a zatem także kratę Banacha rozumianą tak, jak w przykładzie 4.7). Dla $x,y\in X$ definiujemy:

$$x \star_p y = \sum_{n=1}^\infty \left(|e_n^*(x)|^p + |e_n^*(y)|^p\right)^{1/p} e_n \in X.$$

Zauważmy, że $\star_p$ definiuje przemienne i łączne działanie w przestrzeni X. Ponadto element $x\star_p y$ pokrywa się z elementem $(|x|^p+|y|^p)^{1/p}$ zdefiniowanym w rachunku Yudina–Krivine'a (zob. [30, tom II, §1.d]); będziemy więc czasami używać także tej notacji. Potrzebować będziemy również następującego lematu (zob. [30, tom II, Proposition 1.d.9]).

Lemat 4.9 (nierówności Krivine'a)**.** *Załóżmy, że X i Y są kratami Banacha, a $\Phi\colon X\to Y$ jest operatorem dodatnim. Wówczas dla każdego ciągu $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ zachodzą nierówności:*

$$\left\|\Big(\sum_{i=1}^n |\Phi(x_i)|^p\Big)^{1/p}\right\| \leqslant \|\Phi\|\cdot\left\|\Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}\right\| \qquad \text{dla } 1\leqslant p<\infty$$

oraz

$$\left\|\bigvee_{i=1}^n |\Phi(x_i)|\right\| \leqslant \|\Phi\|\cdot\left\|\bigvee_{i=1}^n |x_i|\right\|.$$

Stwierdzenie 4.10. *Niech X będzie przestrzenią Banacha z unormowaną bazą 1-bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, względem której jest ona C-ℓ_p-asymptotyczna (dla pewnych $1 \leqslant p \leqslant \infty$ oraz $C \geqslant 1$). Wówczas istnieje taka stała $B > 0$ (zależna tylko od C), że dla dowolnych $n \geqslant 2$ oraz dodatnich wektorów $x_1, \ldots, x_n \in X$ zachodzi nierówność*

$$\|x_1 \star_p \ldots \star_p x_n\| \geqslant \frac{\left(\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p\right)^{1/p}}{B(\log n)^2}.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla $p < \infty$; w przypadku, gdy $p = \infty$, staje się on trywialny (ponadto przypadek ten nie będzie potrzebny do udowodnienia głównego twierdzenia).

Rozważmy $n \geqslant 2$ oraz wektor $x \in \operatorname{span}\{e_i \colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Kładąc $z_j = \sum_{2^{-j}n < i \leqslant 2^{-j+1}n} e_i^*(x)e_i$ dla $1 \leqslant j \leqslant \lceil \log_2 n \rceil$ oraz stosując definicję ℓ_p-asymptotyki, uzyskujemy

$$\frac{1}{C}\|z_j\|_{\ell_p^n} \leqslant \|z_j\| \leqslant C\|z_j\|_{\ell_p^n} \quad \text{dla } 1 \leqslant j \leqslant \lceil \log_2 n \rceil,$$

gdzie umawiamy się, że $\|y\|_{\ell_p^n}^p = \sum_{i=1}^n |e_n^*(y)|^p$ dla $y \in \operatorname{span}\{e_i \colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Dalej mamy

$$\|x\| \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant \lceil \log_2 n \rceil} \|z_j\| \leqslant C\lceil \log_2 n \rceil \cdot \|x\|_{\ell_p^n} \leqslant (A \log n)\|x\|_{\ell_p^n}$$

oraz

$$\|x\| \geqslant \frac{1}{\lceil \log_2 n \rceil} \sum_{1 \leqslant j \leqslant \lceil \log_2 n \rceil} \|z_j\| \geqslant \frac{1}{C\lceil \log_2 n \rceil}\|x\|_{\ell_p^n} \geqslant \frac{1}{A \log n}\|x\|_{\ell_p^n},$$

gdzie $A > 0$ jest taką stałą, że $C\lceil \log_2 n \rceil \leqslant A \log n$. Podsumowując, znaleźliśmy taką stałą $A > 0$, że dla każdego wektora o nośniku zawartym w przedziale $[1, n]$ zachodzą nierówności

$$\frac{1}{A \log n}\|x\|_{\ell_p^n} \leqslant \|x\| \leqslant (A \log n)\|x\|_{\ell_p^n}. \tag{4.5}$$

Połóżmy $z = x_1 \star_p \ldots \star_p x_n$. Jako że definicja ℓ_p-asymptotyki dopuszcza podział na dwie części jedynie wektorów o nośniku zawartym w przedziale $[2, \infty)$, rozpoczniemy od przypadku, kiedy pierwsze współrzędne wektorów x_i są „duże” dla wielu $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zdefiniujmy

$$I = \left\{1 \leqslant i \leqslant n \colon e_1^*(x_i) \geqslant \frac{1}{2}\|x_i\|\right\} \quad \text{oraz} \quad J = \{j_1, \ldots, j_k\} = \{1, \ldots, n\} \setminus I,$$

a następnie zauważmy, że

$$\begin{aligned}\|z\| &\geqslant \left\| \left(\sum_{i \in I} e_1^*(x_i)^p \right)^{1/p} e_1 + P_{[2,\infty)}(x_{j_1} \star_p \ldots \star_p x_{j_k}) \right\| \geqslant \\ &\geqslant \max\left\{ \frac{1}{2}\left(\sum_{i \in I} \|x_i\|^p \right)^{1/p}, \left\| P_{[2,\infty)}(x_{j_1} \star_p \ldots \star_p x_{j_k}) \right\| \right\}.\end{aligned}$$

Jeżeli $\sum_{i \in I} \|x_i\|^p \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p$, to nie ma czego dowodzić. Jeżeli zaś poprzednia nierówność nie zachodzi, czyli zachodzi nierówność $\sum_{j \in J} \|x_i\|^p \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p$, to wystarczy znaleźć oszacowanie normy wektora $P_{[2,\infty)}(x_{j_1} \star_p \ldots \star_p x_{j_k})$. Zatem, bez straty ogólności, możemy założyć, że $\operatorname{supp} z \subset [2, \infty)$. Ponadto możemy założyć, że nośnik każdego z wektorów x_i jest skończony.

Ponieważ przestrzeń X jest C-ℓ_p-asymptotyczna, zachodzi nierówność

$$\|z\| \geqslant \frac{1}{C}\left(\|P_{[2,n]}z\|^p + \|P_{(n,\infty)}z\|^p \right)^{1/p}. \tag{4.6}$$

Oszacujemy oba składniki niezależnie. Na mocy (4.5) mamy

$$\begin{aligned}\|P_{[2,n]}z\|^p &\geqslant \frac{1}{(A\log n)^p}\|P_{[2,n]}z\|^p_{\ell_p^n} = \\ &= \frac{1}{(A\log n)^p}\sum_{i=1}^n \|P_{[2,n]}x_i\|^p_{\ell_p^n} \geqslant \frac{1}{(A\log n)^{2p}}\sum_{i=1}^n \|P_{[2,n]}x_i\|^p.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Połóżmy teraz $F = \operatorname{span}\{P_{(n,\infty)}x_i\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Niech $\Phi\colon F \to \ell_p^N$ będzie operatorem dodatnim spełniającym warunki tezy stwierdzenia 4.8. Stosując lemat 4.9, uzyskujemy

$$\begin{aligned}\|P_{(n,\infty)}z\| &= \left\| P_{(n,\infty)}\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}\right\| \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{\|\Phi\|}\left\|\left(\sum_{i=1}^n |\Phi(P_{(n,\infty)}x_i)|^p\right)^{1/p}\right\|_{\ell_p^N} = \frac{1}{\|\Phi\|}\left(\sum_{i=1}^n \|\Phi(P_{(n,\infty)}x_i)\|^p_{\ell_p^N}\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

(Ostatnia równość wynika ze zmiany kolejności sumowania). Stąd otrzymujemy

$$\|P_{(n,\infty)}z\| \geqslant \frac{1}{\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|}\left(\sum_{i=1}^n \|P_{(n,\infty)}x_i\|^p\right)^{1/p} \geqslant \frac{1}{3C^8}\left(\sum_{i=1}^n \|P_{(n,\infty)}x_i\|^p\right)^{1/p}. \tag{4.8}$$

Bezpośrednio z definicji ℓ_p-asymptotyki wynika, że

$$\|P_{[2,n]}x_i\|^p + \|P_{(n,\infty)}x_i\|^p \geqslant \frac{\|x_i\|^p}{C^p} \qquad \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{4.9}$$

Wreszcie, łącząc (4.6), (4.7), (4.8) i (4.9), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|z\| &\geqslant \frac{1}{C\cdot\max\{3C^8, (A\log n)^2\}}\left(\sum_{i=1}^n \left(\|P_{[2,n]}x_i\|^p + \|P_{(n,\infty)}x_i\|^p\right)\right)^{1/p} \geqslant \\ &\geqslant \frac{\left(\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p\right)^{1/p}}{B(\log n)^2},\end{aligned}$$

gdzie $B > 0$ jest odpowiednią stałą. □

Uwaga 4.11. Jeśli X jest przestrzenią ℓ_1-asymptotyczną (względem pewnej unormowanej bazy 1-bezwarunkowej), to oczywiście zachodzi nierówność $\|x\| \leqslant \|x\|_{\ell_1}$ dla każdego $x \in X$. Oznacza to, że w tym przypadku nie jest konieczne podnoszenie do kwadratu logarytmu występującego w tezie poprzedniego stwierdzenia. Na przykład, dla przestrzeni Tsirelsona, otrzymujemy oszacowanie:

$$\|x_1 + \ldots + x_n\| \geqslant \frac{\|x_1\| + \ldots + \|x_n\|}{B\log n}$$

dla wszelkich $n \geqslant 2$ i dodatnich wektorów $x_1, \ldots, x_n \in T$. Jak zostało zaznaczone już wcześniej, nie zakładamy nic o nośnikach tych wektorów.

Wniosek 4.12. Niech X będzie przestrzenią Banacha z unormowaną bazą 1-bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^\infty$, względem której jest ona C-ℓ_p-asymptotyczna (dla pewnych $1 \leqslant p < \infty$ oraz $C \geqslant 1$). Wówczas istnieje taka stała $B > 0$ (zależna tylko od C), że dla wszelkich $q \geqslant p$, $n \geqslant 2$ i dodatnich wektorów $x_1, \ldots, x_n \in X$ zachodzi nierówność

$$\|x_1 \star_q \ldots \star_q x_n\| \geqslant \frac{\left(\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p\right)^{1/p}}{Bn^{1/p-1/q}(\log n)^2}.$$

Dowód. Stosując nierówność między średnimi potęgowymi i stwierdzenie 4.10, otrzymujemy

$$\|x_1 \star_q \ldots \star_q x_n\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |e_k^*(x_i)|^q \right)^{1/q} e_k \right\| \geqslant \frac{1}{n^{1/p-1/q}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |e_k^*(x_i)|^p \right)^{1/p} e_k \right\| =$$
$$= \frac{\|x_1 \star_p \ldots \star_p x_n\|}{n^{1/p-1/q}} \geqslant \frac{\left(\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p\right)^{1/p}}{Bn^{1/p-1/q}(\log n)^2}. \qquad \square$$

4.3. Główne twierdzenie

Zaprezentujemy teraz drugi z głównych wyników rozprawy, a mianowicie wyprowadzimy wzór na typ potęgowy ogólnej sumy prostej przestrzeni Banacha. Rozważać będziemy $\mathfrak{E}$-sumy proste przy założeniu, że przestrzeń dualna $\mathfrak{E}^*$ jest ℓ_p-asymptotyczna względem bazy dualnej.

Lemat 4.13. *Jeżeli $\mathfrak{E}$ jest przestrzenią Banacha z taką unormowaną i zwężającą bazą bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, że dla pewnego $p \in [1,\infty)$ przestrzeń dualna $\mathfrak{E}^*$ jest ℓ_p-asymptotyczna względem bazy $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$, to $\mathsf{p}(\mathfrak{E}) \geqslant p$, o ile $\mathrm{Sz}(\mathfrak{E}) = \omega$.*

Dowód. Niech $C \geqslant 1$ będzie taką stałą, że przestrzeń $\mathfrak{E}^*$ jest C-ℓ_p-asymptotyczna oraz niech $\varepsilon \in (0, 1/C)$ i $N = \lfloor (C\varepsilon)^{-p} \rfloor$. Zdefiniujmy odwzorowanie drzewowe $(x_a^*)_{a\in S_N} \subset \mathfrak{E}^*$ wzorem

$$x_{a\frown k}^* = \varepsilon e_{kN+|a|}^* \quad \text{dla } a \in S_{N-1} \text{ i } k > \max a.$$

Oczywiście jest to *-słabo zerowe odwzorowanie drzewowe spełniające warunek $\|x_a^*\| = \varepsilon$ dla każdego $a \in S_N$. Co więcej, jeżeli $\Gamma \subset S_N$ jest gałęzią, to na mocy górnego oszacowania występującego w definicji ℓ_p-asymptotyki otrzymujemy

$$\left\| \sum_{a\in\Gamma} x_a^* \right\| \leqslant \varepsilon C N^{1/p} \leqslant 1.$$

Zatem, zgodnie ze stwierdzeniem 2.1, $\mathrm{Sz}(\mathfrak{E}, \varepsilon) > \lfloor (C\varepsilon)^{-p} \rfloor \geqslant (C\varepsilon)^{-p} - 1$. Dowodzi to, że $\mathsf{p}(\mathfrak{E}) \geqslant p$, o ile $\mathrm{Sz}(\mathfrak{E}) = \omega$. $\square$

Uwaga 4.14. W powyższym lemacie teza może zostać wzmocniona do zdania $\mathsf{p}(\mathfrak{E}) = p$ (gdzie $\mathrm{Sz}(\mathfrak{E}) = \omega$ jest częścią tezy), co wyniknie z poniższego twierdzenia 4.17. Jednakże sformułowanie takie oraz odwołanie się do twierdzenia, w którym lemat ten będzie użyty, mogłoby sugerować zapętlające się rozumowanie, czego chcemy uniknąć.

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $\mathfrak{E} = \ell_p$ dla $p \in (1,\infty)$ lub $\mathfrak{E} = c_0$ dla $p = \infty$. Niech q będzie wykładnikiem sprzężonym do p; dla $p = \infty$ przyjmujemy $q = 1$. Wobec faktu, iż przestrzeń $X \coloneqq (\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}$ zawiera izometryczne kopie przestrzeni $\mathfrak{E}$ i X_n dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zachodzi nierówność $\mathsf{p}(X) \geqslant \max\{q, \sup_n \mathsf{p}(X_n)\}$. Z uwagi na przykład 3.15 – bez dodatkowych założeń – nie zachodzi jednak równość

$$\mathsf{p}(X) = \max\Big\{q, \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{p}(X_n)\Big\} \tag{4.10}$$

Powodem, dla którego tak się dzieje, jest nieograniczony wzrost stałych C_n stojących w nierównościach $\mathrm{Sz}(X_n, \varepsilon) \leqslant C_n \varepsilon^{-q}$, gdzie $q > \mathsf{p}(X_n)$. Wobec tego naturalne będzie wprowadzenie następujących definicji.

Definicja 4.15. Dla dowolnej przestrzeni Banacha Y przyjmujemy

$$C_p(Y) = \inf\{c > 0\colon \mathrm{Sz}(Y,\varepsilon) \leqslant c\varepsilon^{-p} \text{ dla } \varepsilon \in (0,1)\}.$$

Będziemy mówić, że ciąg $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ przestrzeni Banacha jest *potęgowo ograniczony*, jeżeli liczba

$$\mathsf{p}(X_n)_{n=1}^{\infty} := \inf\Big\{p \in [1,\infty)\colon \sup_{n\in\mathbb{N}} C_p(X_n) < \infty\Big\}$$

jest skończona.

Uwaga 4.16. Powyższa definicja jest dość naturalna, gdyż dokładna analiza dowodu wniosku 1.17 pokazuje, że jeżeli każda z przestrzeni X_n (dla $n \in \mathbb{N}$) zanurza się izometrycznie w przestrzeń X o indeksie Szlenka ω, to ciąg $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ musi być potęgowo ograniczony.

Po tym wstępie i zachowaniu wcześniejszych oznaczeń możemy powiedzieć, że typ potęgowy przestrzeni X jest najlepszym z możliwych – jest on równy maksimum spośród q i $\mathsf{p}(X_n)_{n=1}^{\infty}$. Co więcej, wzór ten zachodzi dla szerszej klasy przestrzeni Banacha, to jest dla przestrzeni $\mathfrak{E}$, których przestrzeń sprzężona jest ℓ_q-asymptotyczna. Precyzyjnie wyraża to poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.17. *Niech $\mathfrak{E}$ będzie przestrzenią Banacha z taką unormowaną i zwężającą bazą 1-bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, że dla pewnego $p \in [1,\infty)$ przestrzeń dualna $\mathfrak{E}^*$ jest ℓ_p-asymptotyczna względem bazy $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Wówczas dla każdego potęgowo ograniczonego ciągu $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ ośrodkowych przestrzeni Banacha zachodzi wzór*

$$\mathsf{p}\bigg(\Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\Big)_{\mathfrak{E}}\bigg) = \max\{p, \mathsf{p}(X_n)_{n=1}^{\infty}\}. \tag{4.11}$$

Główna idea dowodu podobna jest do tej z dowodu twierdzenia 3.14. Używając drzewowego ujęcia derywacji Szlenka, będziemy chcieli zdefiniować pewną gałąź, a następnie uzyskać dolne oszacowanie normy sumy elementów tej gałęzi w języku pewnej ℓ_p-normy. Rozważamy też dwa przypadki – kiedy nośniki węzłów danej gałęzi skupiają się w pewnym skończonym zbiorze i kiedy są „prawie” rozłączne. W pierwszym przypadku korzystamy z twierdzenia o przenormowaniu przestrzeni o danym typie potęgowym.

Dowód. Połóżmy $X = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}$ oraz ustalmy $\varepsilon \in (0,1)$ i $N \geqslant 2$ o własności $\iota_\varepsilon^N B_{X^*} \neq \varnothing$. Wtedy, na mocy stwierdzenia 2.1, istnieje *-słabo zerowe odwzorowanie drzewowe $(x_a^*)_{a\in S_N} \subset X^*$ spełniające warunki: $\|x_a^*\| \geqslant \frac{1}{4}\varepsilon$ dla $a \in S_N \setminus \{\varnothing\}$ oraz $\|\sum_{a\in\Gamma} x_a^*\| \leqslant 1$ dla każdej gałęzi $\Gamma \subset S_N$.

Ustalmy dowolnie także liczby q, r spełniające nierówność $\mathsf{p}(X_n)_{n=1}^{\infty} < r < q$; w przypadku, gdy $\mathsf{p}(X_n)_{n=1}^{\infty} < p$, dodatkowo żądać będziemy, aby $q < p$. W każdym razie mamy $\mathsf{p}(X_n) < r < q$ dla $n \in \mathbb{N}$, a zatem istnieje taka stała $B > 0$, że dla wszelkich $\varepsilon \in (0,1)$ i $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność $\mathrm{Sz}(X_n,\varepsilon) \leqslant B\varepsilon^{-r}$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $|\cdot|_n$ będzie normą skonstruowaną zgodnie ze stwierdzeniem 2.8 zastosowanym do przestrzeni X_n (symbolu $|\cdot|_n$ używamy też na oznaczenie odpowiedniej normy dualnej); odpowiednia stała γ, która zależy tylko od B, q i r, jest wspólna dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy

$$|||x^*||| = \bigg\|\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*|_n e_n^*\bigg\| \qquad \text{dla } x^* = (x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in X^*.$$

Zauważmy, że funkcjonał $|||\cdot|||$ jest równoważną normą dualną w przestrzeni X^*, która spełnia nierówności $\|x^*\| \leqslant |||x^*||| \leqslant 2\|x^*\|$ dla każdego $x^* \in X^*$.

Dla $a \in S_{N-1}$ symbolem a^+ oznaczmy rodzinę wszystkich następników elementu a. Dalej, dla każdego zbioru nieskończonego $M \subset a^+$, przyjmijmy

$$\nu(a, M) = \sup_{b \in M} \min \left\{ n \in \mathbb{N} \colon \|P_{[1,n]} x_b^*\| \geqslant \frac{1}{8}\varepsilon \right\}.$$

Powiemy, że element $a \in S_{N-1}$ jest *I rodzaju*, jeżeli istnieje taki nieskończony zbiór $M \subset a^+$, że $\nu(a, M) < \infty$; dla każdego takiego elementu ustalamy jeden zbiór M_a o żądanej własności. Powiemy, że element $a \in S_{N-1}$ jest *II rodzaju*, jeżeli nie jest on I rodzaju.

Przechodzimy teraz do indukcyjnej definicji gałęzi wyznaczonej przez węzeł $\{a_1, \ldots, a_N\}$. Mając daną liczbę $0 \leqslant k < N$, zakładamy, że wybraliśmy już $a_1 < \ldots < a_k$, dodatnie wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{E}^*$ o skończonych nośnikach oraz skończone przedziały $I_1, \ldots, I_k \subset \mathbb{N}$ w taki sposób, że spełnione są następujące warunki:

(p1) $\left|\!\left|\!\left| x_{a_j}^* - \tilde{x}_{a_j}^* \right|\!\right|\!\right| < \dfrac{1}{N}$ dla $1 \leqslant j \leqslant k$, gdzie $\tilde{x}_{a_j}^* := P_{I_j} x_{a_j}^*$;

(p2) $\left| P_i \left(\sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_{a_j}^* \right) \right|_i > \left(\dfrac{\gamma}{2} \right)^{1/q} e_i^{**}(v_1 \star_q \ldots \star_q v_k)$ dla $i \in \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{supp} v_j$;

(p3) $\|v_j\| \geqslant \dfrac{1}{24}\varepsilon$ dla $1 \leqslant j \leqslant k$.

(Dla $k = 0$ nie zakładamy nic). Definiując a_{k+1}, rozważymy dwa przypadki.

(I): Element $\{a_1, \ldots, a_k\}$ jest I rodzaju.

Niech $\nu(a_k) = \nu(\{a_1, \ldots, a_k\}, M_{a_1,\ldots,a_k})$. Zgodnie z definicją, dla każdego $b \in M_{a_1,\ldots,a_k}$ mamy $\|P_{[1,\nu(a_k)]} x_b^*\| \geqslant \frac{1}{8}\varepsilon$. Przechodząc do pewnego nieskończonego zbioru $M \subset M_{a_1,\ldots,a_k}$, możemy założyć, że istnieją granice $\lim_{b \in M} |P_i x_b^*|_i$ oraz takie liczby nieujemne $\tau_{k+1,i}$ (dla $1 \leqslant i \leqslant \nu(a_k)$), że dla wszelkich $1 \leqslant i \leqslant \nu(a_k)$ i $b \in M$ spełnione są nierówności:

$$\tau_{k+1,i} \leqslant |P_i x_b^*|_i \leqslant 2\tau_{k+1,i}, \qquad \text{o ile } \lim_{b \in M} |P_i x_b^*|_i > 0;$$

jeżeli $\lim_{b \in M} |P_i x_b^*|_i = 0$, to przyjmujemy $\tau_{k+1,i} = 0$. Zdefiniujmy dodatni wektor $v_{k+1} \in \mathfrak{E}^*$ jako

$$v_{k+1} = \sum_{i=1}^{\nu(a_k)} \tau_{k+1,i} e_i^*.$$

Dalej, przechodząc do kolejnego podzbioru zbioru M (wciąż oznaczanego przez M), możemy założyć, że

$$\|v_{k+1}\| \geqslant \frac{1}{3} |\!|\!| P_{[1,\nu(a_k)]} x_b^* |\!|\!| \geqslant \frac{1}{3} \|P_{[1,\nu(a_k)]} x_b^*\| \qquad \text{dla } b \in M.$$

Skorzystamy teraz z własności norm $|\cdot|_i$ dla $i \in \bigcup_{j=1}^{k+1} \operatorname{supp} v_j$. Stosujemy stwierdzenie 2.8 dla $x^* = P_i \sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_{a_j}^* \in X_i^*$ oraz *-słabo zbieżnego do zera ciągu $(P_i x_b^*)_{b \in M} \subset X_i^*$. W konsekwencji otrzymujemy następnik $a_{k+1} \in M$ elementu a_k spełniający nierówności

$$\begin{aligned} \left| P_i \left(\sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_{a_j}^* + x_{a_{k+1}}^* \right) \right|_i &> \left(\left| P_i \left(\sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_{a_j}^* \right) \right|_i^q + \frac{\gamma}{2} \tau_{k+1,i}^q \right)^{1/q} \geqslant \\ &\geqslant \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{1/q} \left(e_i^{**}(v_1 \star_q \ldots \star_q v_k)^q + \tau_{k+1,i}^q \right)^{1/q} = \\ &= \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{1/q} e_i^{**}(v_1 \star_q \ldots \star_q v_{k+1}), \qquad \text{o ile } e_i^{**}(v_{k+1}) > 0. \end{aligned}$$

Jeżeli $e_i^{**}(v_{k+1}) = 0$, to powyższa nierówność wynika z założenia (p2) i *-słabej półciągłości z dołu normy $|\cdot|_i$. Weźmy teraz dowolny skończony przedział $I_{k+1} \subset \mathbb{N}$, dla którego spełnione są warunek (p1) (dla $j = k+1$) oraz powyższe nierówności, kiedy zamienimy $x^*_{a_{k+1}}$ na $\tilde{x}^*_{a_{k+1}}$. Na koniec zauważmy, że

$$\|v_{k+1}\| \geqslant \frac{1}{3}\left\|P_{[1,\nu(a_k)]}x^*_{a_{k+1}}\right\| \geqslant \frac{1}{24}\varepsilon.$$

(II): Element $\{a_1, \dots, a_k\}$ jest II rodzaju.

W tym przypadku możemy wybrać $a_{k+1} \in \{a_1, \dots, a_k\}^+$, dla którego istnieje skończony przedział $I \subset \mathbb{N}$ spełniający następujące warunki:

- $\max I_j < \min I$ dla $1 \leqslant j \leqslant k$,
- $\max \operatorname{supp}(v_1 \star_q \dots \star_q v_k) < \min I$,
- $\|P_I x^*_{a_{k+1}}\| \geqslant \frac{1}{8}\varepsilon$,

a ponadto

$$\left|P_i\left(\sum_{j=1}^{k}\tilde{x}^*_{a_j} + x^*_{a_{k+1}}\right)\right|_i > \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/q} e_i^{**}(v_1 \star_q \dots \star_q v_k) \quad \text{dla } i \in \bigcup_{j=1}^{k}\operatorname{supp} v_j. \tag{4.12}$$

Możliwość uzyskania ostatniego warunku wynika z warunku (p2), *-słabej zbieżności do zera ciągu $(x_b^*)_{b>a_k}$ oraz *-słabej półciągłości z dołu normy $|\cdot|_i$. Zdefiniujmy dodatni wektor $v_{k+1} \in \mathfrak{E}^*$ jako

$$v_{k+1} = P_I\big(|P_i x^*_{a_{k+1}}|_i\big)_{i=1}^{\infty}.$$

(W powyższej definicji zewnętrzny rzut odnosi się do bazy $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$, zaś wewnętrzny do rozkładu przestrzeni X na sumę prostą). Dalej weźmy dowolny taki skończony przedział $I_{k+1} \subset \mathbb{N}$, że $I \subset I_{k+1}$, warunek (p1) jest spełniony dla $j = k+1$ oraz zachowują się nierówności (4.12), kiedy zamienimy $x^*_{a_{k+1}}$ na $\tilde{x}^*_{a_{k+1}}$. Dla każdego $i \in I$ oczywiście zachodzą równości

$$\left|P_i\left(\sum_{j=1}^{k+1}\tilde{x}^*_{a_j}\right)\right|_i = |P_i x^*_{a_{k+1}}|_i = e_i^{**}(v_{k+1}) = e_i^{**}(v_1 \star_q \dots \star_q v_{k+1}),$$

skąd, na mocy nierówności (4.12), uzyskujemy warunek (p2) dla $k+1$. Warunek (p3) dla $i = k+1$ jest oczywisty.

Podsumowując, otrzymaliśmy taka gałąź $\Gamma = \{\{a_1, \dots, a_i\} \colon i \leqslant N\}$, że

- $\left|P_i\left(\sum_{a\in\Gamma}\tilde{x}^*_a\right)\right|_i \geqslant \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/q} e_i^{**}(v_1 \star_q \dots \star_q v_N) \quad$ dla $i \in \mathbb{N}$;
- $\|v_n\| \geqslant \frac{1}{24}\varepsilon \quad$ dla $1 \leqslant n \leqslant N$.

W przypadku, gdy $p < q$, wniosek 4.12 prowadzi do następujących nierównosci:

$$\begin{aligned}
3 \geqslant \left|\left|\left|\sum_{a\in\Gamma}\tilde{x}^*_a\right|\right|\right| &= \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\left|P_i\sum_{a\in\Gamma}\tilde{x}^*_a\right|_i e_i^*\right\| \geqslant \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/q}\cdot\|v_1 \star_q \dots \star_q v_N\| \geqslant \\
&\geqslant \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/q}\cdot\frac{\big(\|v_1\|^p + \dots + \|v_N\|^p\big)^{1/p}}{BN^{1/p-1/q}(\log N)^2} \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/q}\cdot\frac{N^{1/p}\varepsilon}{BN^{1/p-1/q}(\log N)^2} = \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/q}\cdot\frac{N^{1/q}\varepsilon}{B(\log N)^2}.
\end{aligned}$$

W przypadku zaś, gdy $p > q$, zachodzi nierówność $\|v_1 \star_q \ldots \star_q v_N\| \geqslant \|v_1 \star_p \ldots \star_p v_N\|$. Przeprowadzając rachunek podobny do powyższego i korzystając ze stwierdzenia 4.10, otrzymujemy

$$3 \geqslant \Big(\frac{\gamma}{2}\Big)^{1/q} \cdot \|v_1 \star_q \ldots \star_q v_N\| \geqslant \Big(\frac{\gamma}{2}\Big)^{1/q} \cdot \|v_1 \star_p \ldots \star_p v_N\| \geqslant \frac{1}{24} \cdot \Big(\frac{\gamma}{2}\Big)^{1/q} \cdot \frac{N^{1/p}\varepsilon}{B(\log N)^2}.$$

Łącząc oba przypadki, dochodzimy do nierówności

$$\frac{N^{\min\{1/p,1/q\}}}{(\log N)^2} \leqslant 72B \cdot \Big(\frac{2}{\gamma}\Big)^{1/q} \cdot \varepsilon^{-1}. \tag{4.13}$$

Ustalmy teraz $s > \max\{p, q\}$. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\min\{1/p,1/q\}}}{n^{1/s} \cdot (\log n)^2} = \infty,$$

istnieje taka stała $C_s > 0$, że

$$n^{1/s} \leqslant C_s \cdot \frac{n^{\min\{1/p,1/q\}}}{(\log n)^2} \qquad \text{dla } n \geqslant 2.$$

W połączeniu z nierównością (4.13) daje to

$$N \leqslant (72BC_s)^s \cdot \Big(\frac{2}{\gamma}\Big)^{s/q} \cdot \varepsilon^{-s},$$

skąd $\mathsf{p}(X) \leqslant s$. Jako że s może być dowolnie blisko $\max\{p, q\}$, a q dowolnie blisko $\mathsf{p}(X_n)_{n=1}^{\infty}$, uzyskujemy wreszcie $\mathsf{p}(X) \leqslant \max\{p, \mathsf{p}(X_n)_{n=1}^{\infty}\}$. Nierówność w drugą stronę wynika z faktu, iż każda z przestrzeni X_n zanurza się izometrycznie w przestrzeń X oraz z lematu 4.13. □

Wniosek 4.18. Dla dowolnej ośrodkowej przestrzeni Banacha X spełniającej warunek $\mathrm{Sz}(X) = \omega$ zachodzą równości:

(i) $\mathsf{p}(\ell_p(X)) = \max\{q, \mathsf{p}(X)\}$, gdzie $p \in (1, \infty)$ i $p^{-1} + q^{-1} = 1$;

(ii) $\mathsf{p}(c_0(X)) = \mathsf{p}(X)$;

(iii) $\mathsf{p}(\mathfrak{T}(X)) = \mathsf{p}(X)$.

Wniosek 4.19. Każda z przestrzeni $\mathfrak{T}(c_0)$ i $\mathfrak{T}(\mathfrak{T})$ ma typ potęgowy 1, lecz nie ma sumowalnego indeksu Szlenka. Powołując się na [23, Proposition 6.9], można uzasadnić, że w tych przypadkach typ potęgowy nie jest osiągany.

Uwaga 4.20. Charakteryzacja sumowalności H-indeksu podana przez Knausta, Odella i Schlumprechta wyraża się w języku ℓ_1-asymptotyki pewnych FDD (zob. [23, Proposition 6.7]), co usprawiedliwia przyjęcie założenia ℓ_p-asymptotyki w twierdzeniu 4.17.

4.4. Przykłady

Wrócimy teraz jeszcze do założeń dotyczących przestrzeni $\mathfrak{E}$, która występuje we wzorze (4.11). Jak już zauważyliśmy, równość (4.10) nie zachodzi bez dodatkowych założeń. Można by jednak oczekiwać, że przy założeniu $\mathrm{Sz}(\mathfrak{E}) = \omega$ mamy równość

$$\mathsf{p}\bigg(\Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\Big)_{\mathfrak{E}}\bigg) = \max\{\mathsf{p}(\mathfrak{E}),\, \mathsf{p}(X_n)_{n=1}^{\infty}\}. \tag{4.14}$$

Okazuje się jednak, iż powyższy wzór nie zachodzi w silnym sensie. Oznacza to, że założenie ℓ_p-asymptotyki przestrzeni $\mathfrak{E}^*$ względem bazy dualnej jest istotne. Pokażemy, że nie wystarcza nawet założenie ℓ_p-asymptotyki względem dualnego FDD!

Przykład 4.21. Niech $\mathfrak{E} = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_2^n)_{c_0}$; przestrzeń ta zanurza się izomorficznie w przestrzeń c_0, a zatem $\mathsf{p}(\mathfrak{E}) = 1$. Ponadto przestrzeń dualna $\mathfrak{E}^*$ jest w oczywisty sposób ℓ_1-asymptotyczna względem FDD $(\ell_2^n)_{n=1}^{\infty}$. Jednakże suma prosta $\mathfrak{E}(c_0)$ przeliczalnie wielu kopii c_0 nie ma typu potęgowego Szlenka równego 1.

Istotnie, weźmy $\varepsilon > 0$ i liczbę naturalną $n \leqslant \varepsilon^{-2}$. Rozważmy *-słabo zerowe odwzorowanie drzewowe $(x_a^*)_{a\in S_n} \subset (c_0 \oplus \ldots \oplus c_0)^*_{\ell_2^n}$ skonstruowane w następujący sposób: dla każdego $a \in S_{n-1}$ kładziemy

$$x^*_{a^\frown m} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{|a| \text{ razy}}, \xi_{|a|+1,m}, 0, \ldots, 0) \quad \text{dla } m > \max a,$$

gdzie $(\xi_{|a|+1,m})_{m=1}^{\infty} \subset \ell_1$ jest takim *-słabo zbieżnym do zera ciągiem, że $\|\xi_{|a|+1,m}\| = \varepsilon$ dla $m \in \mathbb{N}$. Wówczas dla każdej gałęzi $\Gamma \subset S_n$ mamy $\|\sum_{a\in\Gamma} x_a^*\| = \varepsilon\sqrt{n} \leqslant 1$. Pokazuje to, że $\mathrm{Sz}(\mathfrak{E}(c_0), \varepsilon) > \varepsilon^{-2}$, a w konsekwencji – $\mathsf{p}(\mathfrak{E}(c_0)) \geqslant 2$.

Ponieważ przestrzeń $\mathfrak{E}(c_0)$ jest w naturalny sposób izometryczna z podprzestrzenia przestrzeni $c_0(\ell_2(c_0))$, na mocy wzoru (4.11) zachodzi równość $p(\mathfrak{E}(c_0)) = 2$; mamy bowiem

$$\mathsf{p}(\mathfrak{E}(c_0)) \leqslant \mathsf{p}(c_0(\ell_2(c_0))) = \mathsf{p}(\ell_2(c_0)) = \max\{2, \mathsf{p}(c_0)\} = 2.$$

Uwaga 4.22. Przy zachowaniu oznaczeń z powyższego przykładu 4.21, przestrzeń $\mathfrak{E}(c_0)$ jest kanonicznie izometryczna z przestrzenią $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_2^n(c_0))$. Pokazuje to, że liczba $\mathsf{p}(X_n)_{n=1}^{\infty}$ może być jednocześnie skończona i większa od $\sup\{\mathsf{p}(X_n) \colon n \in \mathbb{N}\}$.

Możliwy jest także o wiele gorszy scenariusz, co pokazuje poniższy, drastyczny przykład.

Przykład 4.23. Niech $p_n = n/(n-1)$ i $\mathfrak{E} = (\bigoplus_{n=2}^{\infty} \ell_{p_n}^n)_{c_0}$; podobnie jak wcześniej, przestrzeń ta zanurza się izomorficznie w przestrzeń c_0, a jej przestrzeń sprzężona jest ℓ_1-asymptotyczna względem dualnego FDD. Jednakże indeks Szlenka sumy prostej $\mathfrak{E}(c_0)$ wynosi ω^2.

Istotnie, dla każdej liczby naturalnej n rozważmy *-słabo zerowe odwzorowanie drzewowe $(x_a^*)_{a\in S_n} \subset (c_0 \oplus \ldots \oplus c_0)^*_{\ell_{p_n}^n}$ skonstruowane w następujący sposób: dla każdego $a \in S_{n-1}$ kładziemy

$$x^*_{a^\frown m} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{|a| \text{ razy}}, \xi_{|a|+1,m}, 0, \ldots, 0) \quad \text{dla } m > \max a,$$

gdzie $(\xi_{|a|+1,m})_{m=1}^{\infty} \subset \ell_1$ jest takim *-słabo zbieżnym do zera ciągiem, że $\|\xi_{|a|+1,m}\| = 1/2$ dla $m \in \mathbb{N}$. Wówczas dla każdej gałęzi $\Gamma \subset S_n$ mamy $\|\sum_{a\in\Gamma} x_a^*\| = \sqrt[n]{n}/2 \leqslant 1$. Pokazuje to, że $\mathrm{Sz}(\mathfrak{E}(c_0), 1/2) > n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, skąd $\mathrm{Sz}(\mathfrak{E}(c_0), 1/2) > \omega$. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia Causeya [5, Theorem 5.14], $\mathrm{Sz}(\mathfrak{E}(c_0)) \leqslant \omega^2$.

Sekcję tę zakończymy wcześniej obiecanym przykładem nieizomorficznych sum prostych $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}$ i $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{F}}$, gdzie przestrzenie $\mathfrak{E}$ i $\mathfrak{F}$ są izomorficzne.

Przykład 4.24. Niech $p \in (2, \infty)$, $q = p/(p-1)$ i $\mathfrak{E} = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_2^n)_{\ell_p}$. Wówczas, rozumując tak samo jak w przykładzie 4.21, pokazujemy, że $\mathsf{p}(\mathfrak{E}(c_0)) = \max\{2, q\} = 2$.

Z drugiej strony przestrzeń $\mathfrak{E}$ jest izomorficzna z przestrzenią ℓ_p (zob. [30, tom I, str. 73]). Mamy jednak

$$\mathsf{p}(\ell_p(c_0)) = \mathsf{p}(\ell_p) = q < 2.$$

Jako że przestrzenie $\mathfrak{E}(c_0)$ i $\ell_p(c_0)$ mają różne typy potęgowe Szlenka, nie są one izomorficzne.

4.5. Typ potęgowy ogólnej sumy przestrzeni skończenie wymiarowych

Przykłady z poprzedniej sekcji pokazują, że bez dodatkowych założeń na $\mathfrak{E}$ nie ma większych szans na to, aby zachodził wzór (4.14). Okazuje się jednak, że zachodzi on w bardzo szczególnym przypadku, kiedy wszystkie składniki są skończenie wymiarowe – wtedy założenia dotyczące przestrzeni $\mathfrak{E}$ możemy ograniczyć do minimum.

Twierdzenie 4.25. *Niech $\mathfrak{E}$ będzie przestrzenią Banacha z unormowaną i 1-bezwarunkową bazą $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Załóżmy ponadto, że $\mathrm{Sz}(\mathfrak{E})=\omega$. Wówczas dla każdego ciągu $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ skończenie wymiarowych przestrzeni Banacha zachodzi równość*

$$\mathsf{p}\bigg(\Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n\Big)_{\mathfrak{E}}\bigg)=\mathsf{p}(\mathfrak{E}).$$

Dowód. Połóżmy $X=(\bigoplus_{n=1}^{\infty}F_n)_{\mathfrak{E}}$ oraz ustalmy $\varepsilon\in(0,1)$ o tej własności, że $\iota_\varepsilon^N B_{X^*}\neq\varnothing$ dla pewnego $N\in\mathbb{N}$. Wówczas, na mocy stwierdzenia 2.1, istnieje *-słabo zerowe odwzorowanie drzewowe $(\mathbf{x}_a^*)_{a\in S_N}\subset X^*$ spełniające warunki $\|\mathbf{x}_a^*\|\geqslant\frac14\varepsilon$ dla każdego $a\in S_N$ i $\|\sum_{a\in\Gamma}\mathbf{x}_a^*\|\leqslant 1$ dla każdej gałęzi $\Gamma\subset S_N$. Ponieważ $\mathrm{Sz}(\mathfrak{E})=\omega$, przestrzeń $\mathfrak{E}^*$ jest ośrodkowa, a zatem baza $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zwężająca (na mocy wniosku 3.7). Oznacza to, że $X^*=(\bigoplus_{n=1}^{\infty}F_n^*)_{\mathfrak{E}^*}$; będziemy więc pisać $\mathbf{x}_a^*=(x_{a,n}^*)_{n=1}^{\infty}$ dla $a\in S_N$.

Zmniejszając nieco wartość ε, o ile to konieczne, oraz „obcinając” elementy danego odwzorowania drzewowego, możemy otrzymać odwzorowanie drzewowe o analogicznych własnościach, co wyjściowe oraz dodatkowej własności: wszystkie elementy mają skończone nośniki (względem FDD $(F_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Dalej, usuwając skończenie wiele następników każdego elementu (dla którego ma to sens), możemy także założyć, że elementy dowolnej gałęzi mają rozłączne nośniki; innymi słowy każda gałąź stanowi podciąg blokowy FDD $(F_n^*)_{n=1}^{\infty}$). W konsekwencji możemy zbudować *-słabo zerowe odwzorowanie drzewowe w przestrzeni X^*, wciąż oznaczane przez $(\mathbf{x}_a^*)_{a\in S_N}$, które spełnia następujące warunki:

(i) $\|\mathbf{x}_a^*\|\geqslant\frac18\varepsilon$ dla każdego $a\in S_N$;

(ii) $\|\sum_{a\in\Gamma}\mathbf{x}_a^*\|\leqslant 1$ dla każdej gałęzi $\Gamma\subset S_N$;

(iii) $(\mathbf{x}_a^*)_{a\in\Gamma}$ jest ciągiem blokowym dla każdej gałęzi $\Gamma\subset S_N$.

(Warunek (ii) jest spełniony, ponieważ baza $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ także jest 1-bezwarunkowa).

Ustalmy dowolnie $q>\mathsf{p}(\mathfrak{E})$. Niech $|\cdot|$ będzie normą w przestrzeni $\mathfrak{E}$ skonstruowaną zgodnie ze stwierdzeniem 2.8, to znaczy spełniającą warunki (i) oraz (ii) tezy stwierdzenia 2.8 dla $X=\mathfrak{E}$. (Cały czas używamy tego samego symbolu na oznaczenie normy dualnej; oczywiście zachodzą nierówności $\|x^*\|\leqslant|x^*|\leqslant 2\|x^*\|$ dla każdego $x^*\in\mathfrak{E}^*$).

Ponieważ przestrzenie F_n są skończenie wymiarowe, dla dowolnych $a\in S_{N-1}$ i $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\lim_{\nu\to\infty}\|x_{a\frown\nu,n}^*\|=0.$$

Oznacza to, że każdy ciąg postaci $(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_{a\frown\nu,n}^*\|e_n^*)_{\nu>\max a}$, gdzie $a\in S_{N-1}$, jest *-słabo zbieżny do zera. Zatem, używając odpowiednich własności odzworowania drzewowego $(\mathbf{x}_a^*)_{a\in S_N}$ oraz normy $|\cdot|$, możemy przeprowadzić następujący rachunek:

$$\begin{aligned}
1 &\geqslant \liminf_{\nu_2\to\infty}\cdots\liminf_{\nu_N\to\infty}\Big\|\sum_{j=1}^{N}\mathbf{x}^*_{\nu_1,\dots,\nu_j}\Big\| = \liminf_{\nu_2\to\infty}\cdots\liminf_{\nu_N\to\infty}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\Big\|\sum_{j=1}^{N}x^*_{\{\nu_1,\dots,\nu_j\},n}\Big\|e^*_n\Big\| = \\
&= \liminf_{\nu_2\to\infty}\cdots\liminf_{\nu_N\to\infty}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\|x^*_{\{\nu_1,\dots,\nu_j\},n}\|e^*_n\Big\| \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{2}\liminf_{\nu_2\to\infty}\cdots\liminf_{\nu_N\to\infty}\Big|\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\|x^*_{\{\nu_1,\dots,\nu_j\},n}\|e^*_n\Big| \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\|x^*_{\{\nu_1\},n}\|e^*_n\Big|^q + \gamma(N-1)\Big(\frac{1}{8}\varepsilon\Big)^q\right)^{1/q} \geqslant \frac{1}{16}(\gamma N)^{1/q}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Wnosimy stąd, że dla pewnej stałej $C > 0$, zachodzi nierówność $N \leqslant C\varepsilon^{-q}$, skąd $\mathsf{p}(X) \leqslant q$. Wobec dowolności q kończy to dowód. $\square$

Rozdział 5

Przypadek nieośrodkowy

5.1. Sumowalność i typ potęgowy indeksu Szlenka przestrzeni nieośrodkowych

W poniższej sekcji wykażemy, że zarówno sumowalność indeksu Szlenka, jak i jego typ potęgowy, wyznaczane są przez ośrodkowe podprzestrzenie. Rozpoczniemy od lematu zainspirowanego pracą Lanciena [25], w której dowodzi on, że przeliczalny indeks Szlenka wyznaczony jest przez ośrodkową podprzestrzeń.

Lemat 5.1. *Niech X będzie przestrzenią Banacha i niech $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$. Wówczas istnieje taka przestrzeń ośrodkowa $Y \subset X$, że*

$$\iota_{\varepsilon_1/4} \ldots \iota_{\varepsilon_n/4} B_{Y^*} \neq \varnothing, \quad \textit{o ile } \iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing.$$

Dowód. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i niech $(a_m)_{m=0}^{\infty}$ będzie numeracją wszystkich elementów drzewa S_n spełniającą warunek: $\max a_k \leqslant \max a_l$ dla $k < l$ (umawiamy się, że $\max \varnothing = 0$). Zdefiniujmy odwzorowanie $\varphi\colon \mathbb{N} \cup \{0\} \to S_N$ wzorem $\varphi(m) = a_m$ dla $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; zauważmy, że φ jest surjekcją i $\max \varphi(m) \leqslant m$ dla każdego $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Załóżmy, że $\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing$. Indukcyjnie, ze względu na $\max a$, skonstruujemy odwzorowanie drzewowe $(x_a^*)_{a \in S_n} \subset X^*$ oraz rodzinę $\{x_a \colon a \in S_n\} \subset B_X$, które spełniają następujące warunki:

(i) $x_a^*(x_a) > \frac{1}{4}\varepsilon_{|a|}$ dla każdego $a \in S_n \setminus \{\varnothing\}$;

(ii) $\begin{cases} \sum_{b \leqslant a} x_b^* \in \iota_{\varepsilon_{|a|+1}/2} \ldots \iota_{\varepsilon_n/2} B_{X^*} & \text{dla } |a| \leqslant n-1, \\ \sum_{b \leqslant a} x_b^* \in B_{X^*} & \text{dla } |a| = n; \end{cases}$

(iii) $\left|x_{a\frown m}^*(x_{\varphi(k)})\right| \leqslant 2^{-m}$ dla $a\frown m \in S_n$ i $k < m$.

Przyjmijmy $x_\varnothing = 0$ i $x_\varnothing^* = 0$. Ponieważ $\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing$,

$$\begin{aligned} 0 \in & \frac{1}{2}\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} + \frac{1}{2} B_{X^*} = \iota_{\varepsilon_1/2} \ldots \iota_{\varepsilon_n/2}\left(\frac{1}{2}B_{X^*}\right) + \frac{1}{2}B_{X^*} \subset \\ & \subset \iota_{\varepsilon_1/2} \ldots \iota_{\varepsilon_n/2}\left(\frac{1}{2}B_{X^*} + \frac{1}{2}B_{X^*}\right) = \iota_{\varepsilon_1/2} \ldots \iota_{\varepsilon_n/2} B_{X^*}. \end{aligned}$$

Mając daną liczbę $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, załóżmy, że skonstruowaliśmy już wszystkie elementy postaci $x_{a\frown k}$ i $x_{a\frown k}^*$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant m$ i $a\frown k \in S_n$, w taki sposób, że spełnione są warunki (i)–(iii).

Ustalmy $a \in S_{n-1}$, dla którego $\max a < m+1$; musimy teraz zdefiniować $x_{a^\frown m+1}$ i $x^*_{a^\frown m+1}$. Zauważmy, że warunek (ii) implikuje

$$\operatorname{diam}\Big(V \cap \iota_{\varepsilon_{|\alpha|+2}/2} \dots \iota_{\varepsilon_n/2} B_{X^*}\Big) > \frac{\varepsilon_{|a|+1}}{2} \tag{5.1}$$

dla każdego *-słabego otoczenia V punktu $\sum_{b \leqslant a} x^*_b$. W szczególności oznacza to, że istnieje punkt $x^* \in \iota_{\varepsilon_{|a|+2}/2} \dots \iota_{\varepsilon_n/2} B_{X^*}$ spełniający warunki:

$$\Big\|x^* - \sum_{b \leqslant a} x^*_b\Big\| > \frac{\varepsilon_{|a|+1}}{4} \quad \text{i} \quad \Big|\Big(x^* - \sum_{b \leqslant a} x^*_b\Big)(x_{\varphi(k)})\Big| \leqslant \frac{1}{2^{m+1}} \quad \text{dla } k \leqslant m.$$

Zastosowaliśmy tu nierówność (5.1) do otoczenia

$$V = \Big\{x^* \in X^* \colon \Big|\Big(x^* - \sum_{b \leqslant a} x^*_b\Big)(x_{\varphi(k)})\Big| < \frac{1}{2^{m+1}} \text{ dla każdego } k \leqslant m\Big\}.$$

Przyjmijmy $x^*_{a^\frown m+1} = x^* - \sum_{b \leqslant a} x^*_b$. Oczywiście warunki (ii) oraz (iii) są spełnione. W celu zakończenia konstrukcji indukcyjnej obierzmy dowolny punkt $x_{a^\frown m+1} \in B_X$, który spełnia nierówność $x^*_{a^\frown m+1}(x_{a^\frown m+1}) > \frac{1}{4}\varepsilon_{|a|+1}$.

Zdefiniujmy $Y = \overline{\operatorname{span}}\{x_a \colon a \in S_n\}$ i $y^*_a = x^*_a \restriction Y$ dla każdego $a \in S_n$. Warunek (iii) gwarantuje, że odwzorowanie drzewowe $(y^*_a)_{a \in S_n} \subset Y^*$ jest *-słabo zerowe. Ponadto, na mocy warunków (i) oraz (ii), mamy

(i') $\|y^*_a\| > \frac{1}{4}\varepsilon_{|a|}$ dla każdego $a \in S_n$;

(ii') $\|\sum_{a \in \Gamma} y^*_a\| \leqslant 1$ dla każdej gałęzi $\Gamma \subset S_n$.

Ostatecznie, po zastosowaniu stwierdzenia 2.1 już do ośrodkowej przestrzeni Y, uzyskujemy $\iota_{\varepsilon_1/4} \dots \iota_{\varepsilon_n/4} B_{Y^*} \neq \varnothing$. □

Powyższy lemat 5.1, a także lemat 1.16 zastosowany do kanonicznego operatora włożenia, pozwolą już udowodnić zapowiedziane twierdzenia.

Twierdzenie 5.2. *Dana przestrzeń Banacha ma sumowalny indeks Szlenka wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej ośrodkowa podprzestrzeń ma sumowalny indeks Szlenka.*

Dowód. Ponieważ implikacja „$\Longrightarrow$” wynika natychmiast z wniosku 1.17, wystarczy udowodnić implikację „$\Longleftarrow$”.

Ustalmy przestrzeń Banacha X i dla każdego ciągu liczb dodatnich $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ symbolem $Y(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ oznaczmy ośrodkową podprzestrzeń przestrzeni X skonstruowaną zgodnie z lematem 5.1. Dalej, niech $\mathcal{E}$ będzie rodziną wszystkich skończonych skończonych ciągów wymiernych liczb dodatnich. Przyjmijmy

$$Y = \overline{\operatorname{span}} \bigcup_{(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathcal{E}} Y(\delta_1, \dots, \delta_n).$$

Jako że Y jest ośrodkową podprzestrzeną przestrzeni X, wystarczy pokazać, że przestrzeń Y nie ma sumowalnego indeksu Szlenka, o ile przestrzeń X także nie ma sumowalnego indeksu.

Przypuśćmy, w celu uzyskania sprzeczności, że przestrzeń Y ma sumowalny indeks Szlenka ze stałą M. Ustalmy dowolnie $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ i załóżmy, że $\iota_{\varepsilon_1} \dots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing$. Dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$ weźmy liczbę wymierną $\delta_k \in (\varepsilon_k/2, \varepsilon_k)$; oczywiście $\iota_{\delta_1} \dots \iota_{\delta_n} B_{X^*} \neq \varnothing$. Stąd

$$\iota_{\delta_1/4} \dots \iota_{\delta_n/4} B_{Y(\delta_1, \dots, \delta_n)^*} \neq \varnothing.$$

Stosując teraz wspomniany lemat 1.16, wnioskujemy, że $\iota_{\delta_1/8}\ldots\iota_{\delta_n/8}B_{Y^*}\neq\varnothing$. To z kolei implikuje $\delta_1+\ldots+\delta_n\leqslant 8M$. Stąd otrzymujemy $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n\leqslant 16M$, co pokazuje, że przestrzeń X ma sumowalny indeks Szlenka i daje żądaną sprzeczność. □

Twierdzenie 5.3. *Jeżeli X jest przestrzenią Banacha o indeksie Szlenka ω, to istnieje taka przestrzeń ośrodkowa $Y\subset X$, że $\mathsf{p}(Y)=\mathsf{p}(X)$.*

Dowód. Dla wszelkich $\varepsilon>0$ i $n\in\mathbb{N}$ niech $Y(n,\varepsilon)$ będzie ośrodkową podprzestrzenią przestrzeni X skonstruowaną zgodnie z lematem 5.1 zastosowanym do $\varepsilon_1=\ldots=\varepsilon_n=\varepsilon$. Zdefiniujmy

$$Y=\overline{\mathrm{span}}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\delta\in\mathbb{Q}_+}Y(n,\delta).$$

Oczywiście Y jest ośrodkową podprzestrzenią przestrzeni X. Pokażemy, że $\mathsf{p}(Y)=\mathsf{p}(X)$.

Ustalmy dowolnie $\varepsilon>0$ oraz $n\in\mathbb{N}$ spełniające warunek $\iota_\varepsilon^n B_{X^*}\neq\varnothing$. Wybierzmy liczbę wymierną $\delta\in(\varepsilon/2,\varepsilon)$; oczywiście $\iota_\delta^n B_{X^*}\neq\varnothing$, a stąd

$$\iota_{\delta/4}^n B_{Y(n,\delta)^*}\neq\varnothing.$$

Stosując lemat 1.16 w taki sam sposób jak w poprzednim dowodzie, stwierdzamy, że $\iota_{\delta/8}^n B_{Y^*}\neq\varnothing$, skąd $\iota_{\varepsilon/16}^n B_{Y^*}\neq\varnothing$. Podsumowując, wykazaliśmy, że $\mathrm{Sz}(Y,\varepsilon/16)\geqslant\mathrm{Sz}(X,\varepsilon)$, co daje nierówność $\mathsf{p}(Y)\geqslant\mathsf{p}(X)$. Równość wynika z wniosku 1.17. □

5.2. Zastosowanie do sum prostych

Udowodnimy teraz nieośrodkowe odpowiedniki twierdzeń 3.14 oraz 4.17, sprowadzając je do przypadku ośrodkowego. Rozumowanie to uzasadnione jest faktem, iż nie mamy do dyspozycji nieośrodkowych wersji twierdzeń o przenormowaniach, które we wcześniejszych dowodach odgrywały kluczową rolę.

Twierdzenie 5.4. *Dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n=1}^\infty$ przestrzeni Banacha z jednakowo sumowalnym indeksem Szlenka przestrzeń $X:=(\bigoplus_{n=1}^\infty X_n)_{c_0}$ ma sumowalny indeks Szlenka.*

Dowód. Pokażemy, że dowolna ośrodkowa podprzestrzeń Y przestrzeni X ma sumowalny indeks Szlenka. Niech $\{\mathbf{y}_k\colon k\in\mathbb{N}\}$ będzie gęstym podzbiorem przestrzeni Y; powiedzmy $\mathbf{y}_k=(y_{n,k})_{n=1}^\infty$. Dla każdego $n\in\mathbb{N}$ połóżmy $Y_n=\overline{\mathrm{span}}\{y_{n,k}\colon k\in\mathbb{N}\}$; oczywiście każda z przestrzeni Y_n jest ośrodkową podprzestrzenią odpowiedniej przestrzeni X_n. Zgodnie z twierdzeniem 3.14 przestrzeń $Z:=(\bigoplus_{n=1}^\infty Y_n)_{c_0}$ ma sumowalny indeks Szlenka. Teraz wystarczy już tylko zauważyć, że przestrzeń Y zanurza się w przestrzeń Z. □

Twierdzenie 5.5. *Niech $\mathfrak{E}$ będzie przestrzenią Banacha z taką unormowaną i zwężającą bazą 1-bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^\infty$, że dla pewnego $p\in[1,\infty)$ przestrzeń dualna $\mathfrak{E}^*$ jest ℓ_p-asymptotyczna względem bazy $(e_n^*)_{n=1}^\infty$. Wówczas dla każdego potęgowo ograniczonego ciągu $(X_n)_{n=1}^\infty$ przestrzeni Banacha zachodzi wzór*

$$\mathsf{p}\Bigg(\bigg(\bigoplus_{n=1}^{\infty}X_n\bigg)_{\mathfrak{E}}\Bigg)=\max\big\{p,\mathsf{p}(X_n)_{n=1}^\infty\big\}.$$

Dowód. Pokażemy, że dowolna ośrodkowa podprzestrzeń Y przestrzeni $X:=(\bigoplus_{n=1}^\infty X_n)_{\mathfrak{E}}$ ma typ potęgowy nieprzekraczający $\max\big\{p,\mathsf{p}(X_n)_{n=1}^\infty\big\}$. Tak jak we wcześniejszym dowodzie, niech

$\{\mathbf{y}_k\colon k\in\mathbb{N}\}$ będzie gęstym podzbiorem przestrzeni Y, gdzie $\mathbf{y}_k=(y_{n,k})_{n=1}^{\infty}$, i dla $n\in\mathbb{N}$ zdefiniujmy $Y_n=\overline{\operatorname{span}}\{y_{n,k}\colon k\in\mathbb{N}\}$. Twierdzenie 4.17 zastosowane do przestrzeni $Z\coloneqq(\bigoplus_{n=1}^{\infty}Y_n)_{\mathfrak{E}}$ oraz oczywiste zanurzenia $Y\hookrightarrow Z$ i $Y_n\hookrightarrow X_n$ prowadzą do nierówności:

$$\mathsf{p}(Y)\leqslant\mathsf{p}(Z)=\max\{p,\mathsf{p}(Y_n)_{n=1}^{\infty}\}\leqslant\max\{p,\mathsf{p}(X_n)_{n=1}^{\infty}\}.$$

Wobec twierdzenia 5.3 dowodzi to, że $\mathsf{p}(X)\leqslant\max\{p,\mathsf{p}(X_n)_{n=1}^{\infty}\}$. Nierówność w drugą stronę uzasadniamy tak samo, jak w dowodzie twierdzenia 5.3. □

5.3. Inne zastosowania

Na zakończenie podamy przykłady nieośrodkowych przestrzeni Banacha o sumowalnym indeksie Szlenka lub określonym typie potęgowym.

Definicja 5.6. Niech $p\in[1,\infty)$ i niech I będzie zbiorem niepustym. Symbolem $\ell_p(I)$ oznaczać będziemy przestrzeń Banacha

$$\Big\{x\colon I\to\mathbb{R}\colon\sum_{i\in I}|x(i)|^p<\infty\Big\}$$

wyposażoną w normę $\|x\|^p\coloneqq\sum_{i\in I}|x(i)|^p$. *Nośnikiem* elementu $x\in\ell_p(I)$ nazywać będziemy zbiór

$$\operatorname{supp}x=\{i\in I\colon x(i)\neq 0\}.$$

Uwaga 5.7. W przypadku, gdy I jest przestrzenią Banacha wprowadzone wcześniej oznaczenie $\ell_p(I)$ koliduje z oznaczeniem ℓ_p-sumy prostej przeliczalnie wielu kopii przestrzeni I; jednak z kontekstu wynika, które podejście mamy na myśli.

Stwierdzenie 5.8. *Jeżeli $p\in(1,\infty)$, a I jest zbiorem nieskończonym, to $\mathsf{p}(\ell_p(I))=q$, gdzie $p^{-1}+q^{-1}=1$.*

Dowód. Ustalmy ośrodkową (i nieskończenie wymiarową) podprzestrzeń Y przestrzeni $\ell_p(I)$. Jeżeli $\{y_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ jest zbiorem gęstym w Y, to przestrzeń

$$\Big\{x\in\ell_p(I)\colon\operatorname{supp}x\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\operatorname{supp}y_n\Big\}$$

jest nadprzestrzenią przestrzeni Y w kanoniczny sposób izometryczną w przestrzenią ℓ_p. Wobec tego oraz stwierdzenia 1.34 mamy $\mathsf{p}(Y)\leqslant q$. Na mocy twierdzenia 5.3 mamy także $\mathsf{p}(\ell_p(I))\leqslant q$; nierówność w drugą stronę jest oczywista. □

Uwaga 5.9. Definiując, dla danego niepustego zbioru I, przestrzeń Banacha $c_0(I)$ jako przestrzeń

$$\{x\colon I\to\mathbb{R}\colon\ \text{dla każdego }\varepsilon>0\text{ zbiór }\{i\in I\colon|x(i)|>\varepsilon\}\text{ jest skończony}\}$$

wyposażoną w normę $\|x\|\coloneqq\max_{i\in I}|x(i)|$ oraz prowadząc rozumowanie analogiczne do powyższego, stwierdzamy, że przestrzeń ta ma sumowalny indeks Szlenka.

Chociaż powyższa obserwacja daje przykład nieośrodkowej przestrzeni Banacha o sumowalnym indeksie Szlenka, przedstawimy ciekawsze zastosowanie twierdzenia 5.2. Wcześniej jednak przypomnijmy, że pochodną K' zwartej przestrzeni topologicznej K nazywamy zbiór wszystkich jej punktów skupienia. Pochodne wyższych rzędów definiujemy przez indukcję pozaskończoną w następujący sposób: $K^{\alpha+1}=(K^{\alpha})'$ dla liczby porządkowej α oraz $K^{\alpha}=\bigcap_{\beta<\alpha}K^{\beta}$ dla granicznej liczby porządkowej α. *Indeksem Cantora–Bendixsona* przestrzeni K, w dalszym ciągu oznaczanym przez $\mathsf{CB}(K)$, nazywamy najmniejszą liczbę porządkową α, dla której $K^\alpha = \varnothing$; jeżeli liczba taka nie istnieje, to przyjmujemy $\mathsf{CB}(K) = \infty$. Prosty argument zwartościowy pokazuje, że indeks ten jest zawsze liczbą następnikową.

Przestrzeń topologiczną, której indeks Cantora–Bendixsona jest różny od ∞ nazywamy *rozproszoną*. Związek pomiędzy indeksem Cantora–Bendixsona zwartej i rozproszonej przestrzeni Hausdorffa K a indeksem Szlenka przestrzeni $\mathcal{C}(K)$ został podany przez Causeya w artykule [4]; pokazał on, że $\mathrm{Sz}(\mathcal{C}(K)) = \omega^\alpha$, gdzie α jest najmniejszą liczbą porządkową, dla której zachodzi nierówność $\mathsf{CB}(K) \leqslant \omega^\alpha$.

Stwierdzenie 5.10. *Dla zwartej przestrzeni Hausdorffa K następujące warunki są równoważne:*

(i) $\mathsf{CB}(K) < \omega$*;*

(ii) $\mathrm{Sz}(\mathcal{C}(K)) \leqslant \omega$*;*

(iii) *przestrzeń $\mathcal{C}(K)$ ma sumowalny indeks Szlenka.*

Dowód. Oczywiście możemy założyć, że przestrzeń K jest nieskończona.

Równoważność warunków (i) oraz (ii) wynika z przytoczonego twierdzenia z pracy [4]. Jako że implikacja (iii) $\Longrightarrow$ (ii) jest oczywista, wystarczy wykazać implikację (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Załóżmy więc, że $\mathrm{Sz}(\mathcal{C}(K)) \leqslant \omega$ i ustalmy ośrodkową podprzestrzeń Y przestrzeni $\mathcal{C}(K)$. Pokażemy, co zakończy dowód, że przestrzeń Y ma sumowalny indeks Szlenka. Niech $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K)$ będzie domkniętą algebrą z jedynką generowaną przez przestrzeń Y; oczywiście jest to algebra ośrodkowa. Na mocy, na przykład, twierdzenia Albiaca–Kaltona charakteryzującego rzeczywiste algebry postaci $\mathcal{C}(\tilde{K})$ (zob. [1, Theorem 4.2.5]), algebra $\mathcal{A}$ jest izometrycznie izomorficzna z algebrą $\mathcal{C}(L)$ dla pewnej zwartej przestrzeni Hausdorffa L. Ponieważ algebra $\mathcal{C}(L)$ jest ośrodkowa, przestrzeń L jest metryzowalna, a ponieważ $\mathrm{Sz}(\mathcal{C}(L)) \leqslant \omega$, przestrzeń L musi być także przeliczalna (por. z uwagami na początku [16, §2.6]).

Skorzystamy teraz z twierdzenia Samuela (zob. [16, Theorem 2.58]), które mówi, że dwie przestrzenie postaci $\mathcal{C}(\tilde{K})$, gdzie $\tilde{K}$ jest przeliczalną i zwartą przestrzenią Hausdorffa, są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe indeksy Szlenka. Stwierdzamy zatem, że przestrzeń $\mathcal{C}(L)$ jest izomorficzna z przestrzenią c_0; w szczególności ma ona, a więc tym bardziej Y, sumowalny indeks Szlenka. $\square$

Warto zaznaczyć, że istnieją nietrywialne przykłady zwartych przestrzeni Hausdorffa o skończonym indeksie Cantora–Bendixsona, z których jeden przedstawimy poniżej; po raz pierwszy został on opisany w pracy [33].

Przykład 5.11. Niech $\mathscr{A}$ będzie nieprzeliczlną rodziną nieskończonych podzbiorów zbioru ω, które są prawie rozłączne, to znaczy $x \cap y$ jest zbiorem skończonym dla $x, y \in \mathscr{A}$, o ile tylko $x \neq y$. W zbiorze $\omega \cup \mathscr{A}$ wprowadzamy topologię przez bazę otoczeń w następujący sposób: każdy punkt $x \in \omega$ jest izolowany, a jeżeli $x \in \mathscr{A}$, to otoczenia tego punktu są postaci $\{x\} \cup (x \setminus F)$, gdzie $F \subset \omega$ jest zbiorem skończonym. *Przestrzenią Mrówki* nazywamy jednopunktowe uzwarcenie $K_{\mathscr{A}} \coloneqq \omega \cup \mathscr{A} \cup \{\infty\}$ przestrzeni $\omega \cup \mathscr{A}$. Łatwo zauważyć, że $K_{\mathscr{A}}$ jest przestrzenią niemetryzowalną oraz $\mathsf{CB}(K_{\mathscr{A}}) = 3$. Stąd oraz ze stwierdzenia 5.10 możemy wywnioskować, że przestrzeń $\mathcal{C}(K_{\mathscr{A}})$ jest nieośrodkową przestrzenią Banacha z sumowalnym indeksem Szlenka.

Bibliografia

[1] F. Albiac, N.J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics 233, Springer, New York 2006.

[2] P.A.H. Brooker, *Direct sums and the Szlenk index*, J. Funct. Anal. **260** (2011), 2222–2246.

[3] P.G. Casazza, Th.J. Shura, *Tsirelson's space*, Lecture Notes in Mathematics 1363, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg 1989.

[4] R. Causey, *Szlenk and w^*-dentability indices of $C(K)$*, J. Math. Anal. Appl. **447** (2017), 834–845.

[5] R. Causey, *Concerning the Szlenk index*, Studia Math. **236** (2017), 201–244.

[6] S.J. Dilworth, D. Kutzarova, G. Lancien, N.L. Randrianarivony, *Asymptotic geometry of Banach spaces and uniform quotient maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), 2747–2762.

[7] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **64**, 1993.

[8] S. Draga, T. Kochanek, *Direct sums and summability of the Szlenk index*, J. Funct. Anal. **271** (2016), 642–671.

[9] S. Draga, T. Kochanek, *The Szlenk power type and tensor products of Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **145** (2017), 1685–1698.

[10] S. Dutta, A. Godard, *Banach spaces with property (M) and their Szlenk indices*, Mediterr. J. Math. **5** (2008), 211–220.

[11] R. Engelking, *Topologia ogólna*, wyd. 3, PWN, Warszawa 2007.

[12] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, CMS Books in Mathematics, Springer, New York 2011.

[13] M. Fekete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Mathematische Zeitschrift **17** (1923), 228–249.

[14] T. Figiel, W.B. Johnson, *A uniformly convex Banach space which contains no ℓ_p*, Compositio Math. **29** (1974), 179–190.

[15] G. Godefroy, N.J. Kalton, G. Lancien, *Szlenk indices and uniform homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 3895–3918.

[16] P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Vanderwerff, V. Zizler, *Biorthogonal Systems in Banach Spaces*, CMS Books in Mathematics, Springer, New York 2008.

[17] W.B. Johnson, J. Lindenstruass, *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, Volume 2, Elsevier 2003.

[18] W.B. Johnson, M. Zippin, *On subspaces of quotients of* $(\sum G_n)_{\ell_p}$ *and* $(\sum G_n)_{c_0}$, Israel J. Math. **13** (1972), 311–316.

[19] W.B. Johnson, M. Zippin, *Subspaces and quotient spaces of* $(\sum G_n)_{\ell_p}$ *and* $(\sum G_n)_{c_0}$, Israel J. Math. **17** (1974), 50–55.

[20] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss, G. Schechtman, *Almost Fréchet differentiability of Lipschitz mappings between infinite-dimensional Banach spaces*, Proc. London Math. Soc. **84** (2002), 711–746.

[21] N.J. Kalton, *M-ideals of compact operators*, Illinois J. Math. **37** (1993), 147–168.

[22] N.J. Kalton, *Examples of uniformly homeomorphic Banach spaces*, Israel J. Math. **194** (2013), 151–182.

[23] H. Knaust, E. Odell, Th. Schlumprecht, *On asymptotic structure, the Szlenk index and UKK properties in Banach spaces*, Positivity **3** (1999), 173–199.

[24] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality.* 2nd Edition (edited by A. Gilányi), Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin 2009.

[25] G. Lancien, *On the Szlenk index and the weak***-dentability index*, Q. J. Math. **47** (1996), 59–71.

[26] G. Lancien, *A survey on the Szlenk index and some of its applications*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. **100** (2006), 209–235.

[27] G. Lancien, A. Procházka, M. Raja, *Szlenk indices of convex hulls*, J. Funct. Anal. **272** (2017), 498–521.

[28] N.J. Laustsen, *Matrix multiplication and composition of operators on the direct sum of an infinite sequence of Banach spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **131** (2001), 165–183.

[29] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *The uniform approximation property in Orlicz spaces*, Israel J. Math. **23** (1976), 142–155.

[30] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I (Sequence spaces) and II (Function spaces)*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1977.

[31] B. Maurey, V.D. Milman, N. Tomczak-Jaegermann, *Asymptotic infinite-dimensional theory of Banach spaces*, Oper. Theory Adv. Appl. **77** (1994), 149–175.

[32] V.D. Milman, N. Tomczak-Jaegermann, *Asymptotic* ℓ_p *spaces and bounded distortions*, Contemp. Math. **144** (1993), 173–195.

[33] S. Mrówka, *On completely regular spaces*, Fund. Math. **41** (1954), 105–106.

[34] C.P. Niculescu, L.-E. Persson, *Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach*, CMS Books in Mathematics, Springer, New York 2006.

[35] E. Odell, Th. Schlumprecht, A. Zsák, *On the structure of asymptotic* ℓ_p *spaces*, Quart. J. Math. **59** (2008), 85–122.

[36] A. Pełczyński, H.P. Rosenthal, *Localization techniques in L^p spaces*, Studia Math. **52** (1975), 263–289.

[37] G. Pisier, *Martingales with values in uniformly convex Banach spaces*, Israel J. Math. **20** (1975), 326–350.

[38] N.L. Randrianarivony, *Nonlinear classification of Banach spaces*, `http://oaktrust.library.tamu.edu/handle/1969.1/2590`, rozprawa doktorska [dostęp 13 listopada 2015 r.].

[39] S. Szarek, *A Banach space without a basis which has the bounded approximation property*, Acta Math. **159** (1987) 81–98.

[40] W. Szlenk, *The non-existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces*, Studia Math. **30** (1968), 53–61.

[41] B.S. Tsirelson, *Not every Banach space contains an embedding of ℓ_p or c_0*, Functional Anal. Appl. **8** (1974), 138–141.