Uniwersytet Śląski w Katowicach
Wydział Pedagogiki i Psychologii

Ewelina Kawiak

Rozprawa doktorska na temat:

HEURYSTYCZNA METODA G. POLYA A UMIEJĘTNOŚĆ ROZWIĄZYWANIA MATEMATYCZNYCH ZADAŃ PROBLEMOWYCH PRZEZ UCZNIÓW KLAS TRZECICH SZKOŁY PODSTAWOWEJ

Rozprawa doktorska przygotowana pod opieką naukową
prof. zw. dr hab. Stanisława Juszczyka
oraz promotora pomocniczego
dr Marcina Musioła

Katowice 2019

Spis treści

Wstęp

Matematyka uznawana jest za jeden z najważniejszych szkolnych przedmiotów. Nie ulega wątpliwości, iż odgrywa ona istotną rolę w codziennym życiu każdego człowieka. Jednocześnie matematyka jest przedmiotem, który sprawia uczniom, bodaj wszystkich etapów edukacyjnych, wiele trudności. Świadczyć o tym mogą wypowiedzi rodziców, nauczycieli a także samych uczniów. Tymczasem matematyka jest przedmiotem dostępnym dla każdego przeciętnie uzdolnionego dziecka, ponieważ w codziennej działalności i codziennym życiu staramy się postępować tak, jak postępuje się w matematyce, to znaczy racjonalnie, sensownie, praktycznie, planowo i logicznie.[1] H. Moroz zauważył, iż każde dziecko odczuwa potrzebę odkrywania, że bada otaczający go świat za pomocą zmysłów.[2] Matematyka stwarza uczniom znakomite okazje do takich właśnie eksploracji. Umożliwia uczniom poszukiwanie i odkrywanie własnych sposobów na rozumienie i opisywanie otaczającego ich świata.

Matematyka jest jednym z podstawowych przedmiotów nauczania w szkole ogólnokształcącej. Jej uczenie się umożliwia poznanie stosunków ilościowych i form przestrzennych, przyzwyczaja do porządku i konsekwencji w myśleniu oraz działaniu, rozwija samodzielność, systematyczność i wytrwałość w pracy.[3] Ponadto stwarza możliwości rozwijania kompetencji poznawczych, kształcenia logicznego myślenia, kojarzenia, wyciągania wniosków, uzasadniania lub obalania sądów, uogólniania, znajdowania analogii, a także dostrzegania sprzeczności.[4] Matematyka nie powinna być rozumiana wyłącznie jako nabywanie biegłości w posługiwaniu się pojęciami związanymi z liczbami, czy kształtami. Stanowią ją bowiem różne sposoby myślenia i rozumowania, organizowania i przyswajania, a następnie stosowania informacji, w świecie realnym oraz w sferze rozważań o charakterze abstrakcyjnym.[5] Matematykę możemy rozumieć jako „narzędzie niezbędne do poznania i zrozumienia współczesnego świata. Jest to instrument pozwalający na uporządkowanie naszych doświadczeń i idei, oraz na stworzenie nowych modeli myślenia (…) Nauczanie matematyki musi opierać

---

[1] J. Filip: *O współczesnych tendencjach w nauczaniu – uczeniu się matematyki*. W: *Sztuka bycia nauczycielem*. Red. B. Dymara, Cieszyn: Wydawnictwo Filii UŚ, 1993, s. 141.
[2] H. Moroz: *Nasza matematyka. Zabawy i gry dydaktyczne*. Warszawa: Polska Oficyna Wydawnicza „BGW", 1991, s. 10-11.
[3] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2001, s. 227.
[4] D. Zaremba: *Podstawy nauczania matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006, s.17.
[5] M. Skura, M. Lisicki: *Gen liczby. Jak dzieci uczą się matematyki*. Warszawa: Wydawnictwo Mamania, 2018, s. 10.

się na pojęciach i ideach podstawowych dla matematyki jako nauki. Proces nauczania winien być upodobniony do struktury nauczanej dyscypliny naukowej, Nauczanie to ma być koncypowane w jednym ciągu od przedszkola do szkoły wyższej, tak aby na wyższych szczeblach nauczania niczego nie trzeba było poprawiać lub odwoływać”.[6]

Wiedza oraz umiejętności skonstruowane w wyniku uczenia się matematyki są przydatne we wszystkich sytuacjach, zarówno typowo szkolnych, jak i życiowych. Zajęcia matematyczne doskonale nadają się do rozwijania logicznego myślenia, które jest niezbędnym elementem kształcenia ogólnego. Wśród podstawowych sprawności, jakie uczeń nabywa w toku uczenia się matematyki wyróżnić można miedzy innymi opanowanie pojęć liczbowych, działań i umiejętności liczenia, a także operacji na liczbach, poznawanie miar praktycznych, umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych oraz opanowanie specyficznego języka matematycznego. [7] Oczywiście to tylko niektóre walory kształcące matematyki.

W tradycyjnym podejściu do dydaktyki punktem wyjścia w procesie nauczania-uczenia się jest wiedza naukowa, z obszaru której czerpane są zagadnienia wiedzy teoretycznej, traktowane jako obowiązujące do przyswojenia przez uczniów. Finalnie mają one prowadzić do umiejętnego stosowania ich w praktyce. Współczesne podejście do tego procesu zachęca nauczyciela do kształcenia, a ucznia do uczenia się, realizowanych poprzez podejmowanie wysiłku rozwiązywania zadań problemowych. W tak realizowanym procesie dydaktycznym zapamiętanie i zrozumienie wiedzy przez uczniów ma charakter wtórny.[8] Edukacja matematyczna na poziomie pierwszego etapu edukacyjnego stanowi niezwykle ważny element wchodzący w skład zintegrowanego modelu edukacji wczesnoszkolnej. Sednem edukacji matematycznej jest rozwiązywanie zadań. Umiejętność ta jest istotnym kryterium świadczącym o jej opanowaniu. [9] Najdonioślejsza rola przypada rozwiązywaniu zadań o charakterze problemowym.

Przestawione w niniejszej dysertacji rozważania dotyczą teoretycznej wiedzy z zakresu edukacji matematycznej realizowanej w nauczaniu początkowym. Szczególnie miejsce poświęcone zostało rozwiązywaniu matematycznych zadań problemowych. W opracowaniu wyeksponowana została heurystyczna metoda G. Polya.

[6] J. Filip, T. Rams: *Dziecko w świecie matematyki*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 2000, s. 25.
[7] E. I. Lesiak-Laska: *Z teorii i praktyki wczesnoszkolnej*. Rzeszów: Wydawnictwo WSP, 1993, s. 76.
[8] B. Niemierko: *Kształcenie szkolne: podręcznik skutecznej dydaktyki*. Warszawa: Wydawnictwa Akademickie i Profesjonalne, 2007, s. 101.
[9] G. Treliński: *Matematyzowanie jako składowa kompetencji matematycznej*. „*Matematyczna edukacja dzieci*” 2016, nr 1, s. 65.

Autorka tegoż opracowania uznaje ją za szczególnie wartościową i godną uwagi. W rozprawie zaprezentowano także wyniki badań własnych dotyczących wpływu zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej.

Pierwszy rozdział niniejszej dysertacji stanowi element wprowadzający w tematykę matematyki jako dyscypliny naukowej. Przedstawiono w nim syntetyczny opis historii matematyki, która to za sprawą dorobku uczonych kolejnych epok rozwija się dynamicznie po dzień dzisiejszy. Wskazano w nim najważniejsze wydarzenia związane z rozwojem matematyki na świecie i w Polsce. W pracy wyróżniono także najwybitniejsze postaci polskiej dydaktyki matematyki, ze szczególnym akcentem na osoby związane z nauczaniem jej na etapie przedszkolnym i wczesnoszkolnym.

Drugi rozdział rozprawy zawiera informacje dotyczące edukacji matematycznej realizowanej na pierwszym etapie edukacyjnym. Jego początkowa część zawiera opis wybranych elementów rozwoju dziecka, które są istotne w kontekście uczenia się matematyki. W dalszej kolejności przedstawiono podstawy teoretyczne edukacji matematycznej. Określono cele oraz zadania edukacji matematycznej w odniesieniu do podstawowych informacji teoretycznych dotyczących dydaktyki nauczania matematyki w klasach I-III. Przytoczono myśli uczonych takich jak Henryk Moroz, Anna Zofia Krygowska, Edyta Gruszczyk-Kolczyńska czy Zbigniew Semadeni, którzy swoim dorobkiem wnieśli ogromny wkład w rozwój dyscypliny. Ponadto przedstawiono w tym miejscu najważniejsze informacje dotyczące myślenia matematycznego uczniów oraz ich aktywności matematycznej. Zwieńczeniem rozdziału jest charakterystyka rozwoju wybranych umiejętności matematycznych dziecka, w odniesieniu do podstawowych koncepcji rozwoju poznawczego oraz emocjonalnego człowieka.

Rozdział trzeci dysertacji dotyczy problematyki rozwiązywania przez uczniów zadań matematycznych. Nie brakuje tu definicji zaproponowanych przez postaci takie jak Maria Cackowska, czy Helena Siwek. Teoretyczny zarys podejmowanej problematyki zawiera wybrane definicje zadania matematycznego oraz wybrane klasyfikacje zadań matematycznych, ze szczególnym akcentem na podział zaproponowany przez Wincentego Okonia, dzielący je na zadania problemowe i bezproblemowe. Ponadto rozdział zawiera zestawienie głównych celów rozwiązywania zdań przez uczniów. Obszerna część rozdziału trzeciego poświęcona jest charakterystyce matematycznych zadań problemowych. Zakończenie rozdziału zawiera opis heurystycznych metod rozwiązywania matematycznych zadań.

Czwarty rozdział niniejszej rozprawy w całości dotyczy metody, która stała się punktem wyjścia przy planowanych w ramach pracy badaniach empirycznych. W rozdziale tym w szczegółowy sposób opisano heurystyczną metodę rozwiązywania matematycznych zadań, której twórcą jest wybitny węgierski matematyk – George Polya. Metoda ta stanowi jeden z najistotniejszych elementów empirycznej części tejże dysertacji – jest czynnikiem eksperymentalnym wprowadzanym do edukacji matematycznej trzecioklasistów, a zatem stanowi zmienną niezależną główną badań zrealizowanych za pomocą metody eksperymentu pedagogicznego. Opis metody G. Polya zawiera w szczególności główne jej założenia oraz objaśnienie kolejnych etapów rozwiązywania matematycznych zadań, które zaproponował jej twórca. Nie sposób pominąć tu nazwiska Andrzeja Góralskiego, którego prace nawiązują do życia oraz twórczości węgierskiego uczonego. Ponadto w rozdziale czwartym zaakcentowano pożądane postawy osoby nauczyciela, chcącego realizować w swojej pracy złożenia heurystycznej metody G. Polya.

W następnym, piątym rozdziale niniejszej pracy zawarto założenia metodologiczne badań własnych. W następujących po sobie podrozdziałach przedstawione zostały najistotniejsze informacje dotyczące empirycznej części pracy. Na jego początku zamieszczono charakterystykę planowanych badań wraz ze wskazaniem ich celów. W dalszej kolejności przedstawiono problemy badawcze wraz z hipotezami, a także operacjonalizację zmiennych oraz metody, techniki i narzędzia badawcze wykorzystane do prowadzenia badań. Dokonano szczegółowego opisu organizacji i przebiegu zrealizowanych badań. W ostatnim podrozdziale rozdziału piątego zamieszczono charakterystykę terenu badań i populacji generalnej, z podziałam na dwie grupy badanych, które wyróżnione zostały w zrealizowanych eksploracjach. Byli nimi czynni zawodowo nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej, pracujący w szkołach podstawowych znajdujących się na terenach miejskich i wiejskich województwa śląskiego oraz uczniowie czterech klas trzecich Miejskiego Zespołu Szkół Nr 2 im. Huberta Wagnera w Będzinie.

Typowym dla prac o charakterze empirycznym jest zamieszczanie po rozdziale metodologicznym rozdziału zawierającego analizy uzyskanych wyników badań własnych. Mając na uwadze zachowanie ich przejrzystości podjęto decyzję, by analizy badań zrealizowanych metodą sondażu diagnostycznego oraz badań zrealizowanych metodą eksperymentu pedagogicznego zaprezentować w dwóch osobnych rozdziałach.

Rozdział szósty zawiera zatem analizę wyników badań własnych zrealizowanych metodą sondażu diagnostycznego, które obejmowały nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej. W pierwszym podrozdziale ukazane zostały opinie badanych nauczycieli na temat zadań problemowych oraz metod ich rozwiązywania. Podrozdział drugi zawiera opinie badanych na temat heurystycznej metody G. Polya. W rozdziale tym umieszczono także statystyczną weryfikację danych otrzymanych za pomocą kwestionariusza ankiety.

Rozdział siódmy zawiera analizę wyników badań własnych zrealizowanych metodą eksperymentu pedagogicznego, który obejmował uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Pierwszy podrozdział zawiera wyniki uzyskane przez uczniów grupy eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 w preteście. W podrozdziale drugim sprawdzono równoważność dwóch wspomnianych wyżej grup. Kolejny podrozdział zawiera wyniki uzyskane w postteście przez badanych uczniów z grup eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz kontrolnych GK1 i GK2. W kolejnych trzech podrozdziałach zamieszczono wyniki badań własnych dotyczących wpływu zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, a także na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych oraz zadań geometrycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Podrozdział siódmy zawiera wyniki badań dotyczące zależności między umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych a płcią badanych uczniów. W następnym podrozdziale przedstawiono weryfikację postawionych hipotez. Ostatni, dziesiąty podrozdział zawiera analizę wyników badań własnych zrealizowanych techniką obserwacji grup eksperymentalnych i kontrolnych oraz analizy rozmów z nauczycielami prowadzącymi zajęcia matematyczne w tych grupach.

Podsumowanie powyższych analiz zawarte zostało w części pracy zatytułowanej *Wnioski końcowe na podstawie analizy wyników badań własnych zrealizowanych metodą sondażu diagnostycznego* oraz *Wnioski końcowe na podstawie analizy wyników badań własnych zrealizowanych metodą eksperymentu pedagogicznego*. Konkluzje praktyczne, sformułowane jako wnioski na potrzeby praktyki pedagogicznej zamieszczone zostały w ostatniej części rozprawy, jaką są *Uogólnienia i wnioski dla praktyki pedagogicznej*.

Każdy rozdział przedstawionej rozprawy zapoczątkowany jest cytatem – myślą węgierskiego matematyka Georgea Polya, którego sposób postrzegania matematyki i jej nauczania stanowi nieustające źródło inspiracji dla autorki tejże dysertacji. Myśli te urzekają prostotą i jasnym, mocnym przekazem. Ich zadaniem jest wprowadzenie do tematyki każdego kolejnego rozdziału.

W tym miejscu pragnę serdecznie podziękować osobom, dzięki którym stała się możliwa realizacja zaplanowanych w ramach niniejszej dysertacji badań empirycznych. Gorące podziękowania składam Szanownej Dyrekcji oraz Pracownikom Miejskiego Zespołu Szkół Nr 2 im. Huberta Wagnera w Będzinie, w szczególności Paniom Wychowawczyniom czterech klas trzecich, w których miałam przyjemność prowadzić działania w ramach eksperymentu pedagogicznego. Podziękowania składam także Szanownej Dyrekcji oraz Pracownikom Szkoły Podstawowej Nr 1 w Wojkowicach, w której miałam możliwość przeprowadzenia badań pilotażowych.

Złożona dysertacja nie powstałaby w tej postaci i jakości, gdyby nie uwagi i wymagania zarówno w odniesieniu do treści merytorycznych, jak i rozważań metodologicznych stawiane mi przez opiekuna naukowego. Dlatego też składam serdeczne podziękowania Szanownemu Panu Profesorowi zwyczajnemu dr hab. Stanisławowi Juszczykowi za wszelką pomoc udzieloną mi zarówno w fazie koncepcyjnej, jak i realizacyjnej.

Słowa podziękowania kieruję także w stronę osoby promotora pomocniczego Szanownego Pana doktora Marcina Musioła, którego cenne wskazówki oraz pomoc okazały się być ogromnym wsparciem w tracie powstawania niniejszej rozprawy.

1. Matematyka jako dyscyplina nauki

„Tak, matematyka ma dwa oblicza: jest ona rygorystyczną nauką Euklidesa, lecz jest także czymś innym (...) matematyka w procesie tworzenia staje się nauką eksperymentalną, indukcyjną. Oba aspekty matematyki są tak stare, jak sama matematyka.”

/George Polya/

Matematyka, nazywana często *„królową nauk”* to dyscyplina naukowa, należącą do dziedziny nauk ścisłych, która ma silnie ugruntowane miejsce w życiu człowieka. Rozmaite czynności życia codziennego wymagają w mniejszym lub większym stopniu korzystania z umiejętności związanych z operacjami matematycznymi, takimi jak np. liczenie. Współczesna matematyka znajduje swoje zastosowanie zarówno w naukach przyrodniczych, jak i humanistycznych.

Z uwagi na to, iż matematyka jest bardzo dynamiczną dyscypliną nauki, której rozwój wciąż następuje, aktualnie nie ma jednej definicji, która w sposób wyczerpujący mogłaby opisać przedmiot jej zainteresowania. Dawniej matematyka rozumiana była jako nauka o liczbach i figurach geometrycznych. Słowo matematyka (łac. *mathematica, gr. mathēmatikḗ*) oznacza poznanie.[10] Celem matematyki od samego początku była próba opisu otaczającego człowieka świata, próba zrozumienia praw nim rządzących. Obecnie przyjmuje się, iż matematyka jest „*zespołem nauk posługujących się metodą dedukcyjną, które zajmują się głównie badaniem zborów liczb, punktów oraz innych elementów abstrakcyjnych*”.[11] Ponadto przyjmuje się, iż jest nauką o strukturach matematycznych, a co za tym idzie zajmuje się mnogościami, których elementy są w pewien sposób powiązane.[12] Aktualnie matematyka wciąż się rozwija, stale poszerzając obszar swoich dociekań.

---

[10] Matematyka. W: *Encyklopedia PWN*. https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/matematyka;3938552.html. Data dostępu: 01.09.2018 r.
[11] E. Sobol: *Słownik wyrazów obcych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1997, s. 698.
[12] M. Kowalski, E. Pawłowa: *Rozwój matematyki na przestrzeni wieków*. Warszawa: Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego, 2007, s. 26.

Szerokie pole zainteresowania tej nauki odzwierciedla klasyfikacja gałęzi matematyki, prowadzona przez Amerykańskie Towarzystwo Matematyczne AMS [13] (*American Mathematical Society*). Aktualna postać klasyfikacji obowiązuje od 2010 roku. *The Mathematics Subject Classification 2010* (*MSC2010*)[14] dzieli matematykę na kilka głównych działów, które w dalszej kolejności zostały bardziej uszczegółowione, tworząc węższe dziedziny przedmiotu. Do głównych dziedzin, wyróżnionych w MSC210 należą miedzy innymi: logika, algebra, analiza matematyczna, geometria, topologia, matematyka dyskretna, statystyka wraz z rachunkiem prawdopodobieństwa oraz matematyka stosowana. Ponadto w klasyfikacji wyróżniono dziedziny takie jak historia, czy filozofia matematyki oraz jej nauczanie.

Niniejsza dysertacja dotyczy nauczania matematyki na pierwszym etapie edukacyjnym. Zgodnie z obowiązującą Podstawą programową kształcenia ogólnego[15], osiągnięcia uczniów klas I-III z zakresu edukacji matematycznej skupiają się wokół liczby naturalnej oraz pojęć geometrycznych. W związku z tym działami matematyki, na których skoncentrowano uwagę w tejże dysertacji są arytmetyka oraz geometria, a także proces ich nauczania-uczenia się.

Pomimo, iż arytmetyka oraz geometria są oddzielnymi działami matematyki, są od siebie współzależne. Dokonując dużego uproszczenia można powiedzieć, iż przedmiotem arytmetyki jest liczba, podczas gdy przedmiotem geometrii jest przestrzeń. [16] Arytmetyka jest najstarszym i najbardziej podstawowym działem matematyki. Pierwotnie zajmowała się właściwościami liczb oraz regułami wykonywania działań na liczbach. We współczesnym ujęciu, arytmetyka zajmuje się teorią rachunków w ustalonych tworach algebraicznych. Można zatem wyróżnić arytmetykę liczb naturalnych, arytmetykę liczb całkowitych, arytmetykę liczb rzeczywistych, liczb wymiernych i niewymiernych, a także arytmetykę liczb zespolonych lub liczb kardynalnych.[17] Geometria zaś jest działem matematyki, którego zakres obejmuje badania

---

[13] American Mathematical Society. https://www.ams.org/home/page. Data dostępu: 01.09.2018 r.
[14]The Mathematics Subject Classification 2010. https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/pdfs/classifications2010.pdf. Data dostępu: 01.09.2018 r.
[15] *Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej*. http://www.dziennikustaw.gov.pl/DU/2017/356. Data dostępu: 16.11.2018 r.
[16] J. Mioduszewski: *Continuity. Eleven sketches from the past of mathematics*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, 2016, s. 9.
[17] A. Podsiad: *Słownik terminów i pojęć filozoficznych*. Warszawa: Instytut Wydawniczy Pax, 2001, s. 74.

figur i stosunków przestrzennych. Można wyróżnić geometrię euklidesową oraz geometrie nieeuklidesowe, a także geometrię metryczną, afiniczną, a także geometrię rzutową.[18]

W kolejnych podrozdziałach dokonano syntetycznego opisu rozwoju matematyki jako dziedziny nauki na przestrzeni dziejów.

1.1. Rozwój matematyki na świecie – rys historyczny

Z uwagi na szeroki zakres zainteresowania matematyki jako dyscypliny nauki nie sposób w syntetycznym skrócie opisać wszystkich dokonań matematyków, które to przyczyniły się do jej rozwoju. Każda spośród obecnie wyróżnionych gałęzi matematyki w kolejnych stuleciach dynamicznie się rozwijała, przez co rozwój każdej z osobna można scharakteryzować w sposób szczegółowy. Nie jest to jednak konieczne z punktu widzenia rozważań podjętych w niniejszej rozprawie. By nie pominąć całkowicie wątku rozwoju matematyki poniżej zaprezentowano wybór najistotniejszych informacji z tego zakresu. Jest to wybór subiektywny o bardzo dużym stopniu ogólności. Oczywistym jest, iż nie wyczerpuje on w zupełności zagadnienia, jakim jest rozwój matematyki jako nauki. Umożliwia natomiast ogólny zarys podjętej tematyki w stopniu wystarczającym dla problematyki niniejszej pracy.

Na przestrzeni wieków ludzie rozwijali różne sfery swego życia, w tym wiedzę teoretyczną i praktyczną. Rozwojowi takiemu podlegała także matematyka. Prawie zawsze na jej rozwój wpływ wywierały inne dziedziny życia człowieka. Początkowo było to rolnictwo, handel, rzemiosło, czy sztuka wojenna. W późniejszych dziejach do tych praktycznych dziedzin dołączyły także dyscypliny naukowe i techniczne takie jak inżynieria, filozofia, a także fizyka i astronomia.

Na początku XIX wieku polski matematyk Józef Maria Hoene-Wroński wyróżnił cztery okresy rozwoju matematyki na świecie.[19] Okres pierwszy powiązał z udziałem starożytnych cywilizacji Wschodu oraz Egiptu, a okres drugi z dokonaniami cywilizacji starożytnych Greków. Trzeci okres zestawił z odrodzeniem się nauk w Europie. Ostatnim okresem wyróżnionym przez uczonego była matematyka nowożytna XIX wieku. Rozwój matematyki od zarania dziejów związany jest z rozwojem poszczególnych kultur. Można

---

[18] Ibidem, s. 315.
[19] J.M. Hoene-Wroński: *Wstęp do wykładu mathematyki*. Paryż: Biblioteka Polska, 1880, s. 7-10.

przyjąć, iż zwięzła chronologia rozwoju matematyki przebiegała w następującej kolejności i dotyczyła kolejno kultur: Egiptu (lata od 3000 p.n.e. do 1600 p.n.e.), Babilonu (lata od 1700 p.n.e. do 300 p.n.e.), Grecji (lata od 600 p.n.e. do 200 p.n.e.), cywilizacji grecko-rzymskiej (lata od 150 p.n.e. do 525 n.e.), Islamu (lata od 750 do 1450), cywilizacji Zachodu (lata od 1100 do 1600) oraz czasów współczesnych (lata od 1600 roku do dnia dzisiejszego). [20] W dalszej części pracy dokonano krótkiej charakterystyki najważniejszych osiągnięć z zakresu rozwoju matematyki w poszczególnych okresach historycznych.

Początki matematyki wiążą się ściśle z liczeniem. Pierwsze pojęcia związane z liczbą oraz formą datowane są na starszy okres kamienny – paleolit, o czym świadczą malowidła jaskiniowe we Francji i Hiszpanii sprzed około 15000 lat.[21] Na podstawie badań kultury i języka ludów pierwotnych przyjmuje się, iż pierwsze terminy liczbowe miały charakter bardziej jakościowy, niż ilościowy i pozwalały na odróżnienie większej ilości przedmiotów od pojedynczego egzemplarza. [22] Miało to kluczowe znaczenie podczas zdobywania pożywienia przez koczownicze ludy. Zmiana stosunku człowieka wobec natury z postawy biernej na czynną, która miała miejsce w okresie kamiennym – neolicie, wiązała się rozwojem myślistwa oraz rolnictwa, co w sposób bezpośredni przyczyniło się do rozwoju języka, a tym samym do rozwoju liczenia. Rozwój handlu spowodował, iż liczby zaczęto porządkować i łączyć ze sobą, tworząc większe jednostki, które dały początek podstawowym systemom liczenia. Oznaczanie liczb przybierało różnoraką formę, w zależności od kultury, która je wytworzyła. Korzystano z palców rąk, supłano węzły na sznurze, wykonywano nacięcia na kijach, posługiwano się grupowanymi w kupki kamieniami lub muszlami. Wszystkie tego typu działania służyły do próby uporządkowania otaczającej rzeczywistości. Kolejnym krokiem było pojawienie się symboli, którym przypisana została konkretna wartość liczbowa. Znaki służące do ich zapisu pojawiły się w początkach historii pisanej, nazywanej świtem cywilizacji.[23]

Poszczególne cywilizacje wytworzyły swoją własną kulturę w zakresie zapisywania liczb i matematycznych znaków, a także sposobów posługiwania się nimi. W kolejnych wiekach pojawiali się mędrcy oraz filozofowie, których odkrycia stworzyły

[20] P. J. Davis, R. Hersh: *Erfahrung Mathematik*. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1985, s. 6.
[21] D. J. Struik: *Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku*. Przeł. P. Szeptycki. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1963, s.13.
[22] M. Kandulski: *Zarys historii matematyki. Od czasów najdawniejszych do średniowiecza*. Poznań: Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, 1983, s. 5.
[23] D. J. Struik: *Krótki zarys historii…*, s. 6.

podwaliny współczesnej matematyki. Nie sposób wymienić wszystkich postaci, którym ludzkość zawdzięcza wkład w rozwój matematyki jako dziedziny nauki. Można jednak spróbować wskazać postacie oraz te wydarzenia z historii matematyki, które uznaje się za kamienie milowe dla jej rozwoju.

Starożytne cywilizacje posiadały rozległą wiedzę matematyczną, której świadectwem są zachowane do dnia dzisiejszego artefakty. W starożytnym Egipcie matematyka miała charakter algorytmiczny. Starożytni Egipcjanie posługiwali się dziesiętnym systemem liczbowym. Rozwinęli arytmetykę o charakterze addytywnym, którego cechą było sprowadzanie mnożenia do kolejno powtarzanych dodawań.[24] Cała ich wiedza matematyczna opierała się na rozwiązywaniu najprostszych zadań z zakresu arytmetyki algebry i geometrii. Brakowało w niej natomiast systematyzacji wiedzy teoretycznej.[25] Wiedza na temat matematycznych osiągnięć starożytnych Egipcjan pochodzi między innym z zachowanych dokumentów takich jak *Papirus moskiewski* (1850 p.n.e.) oraz *Papirus Rhinda* (1575 p.n.e.).[26] Odkrycia matematyczne starożytnego Egiptu były rozwijane w kolejnych wiekach przez przedstawicieli poszczególnych kultur.

Starożytną kulturą, która wniosła swój wkład w rozwój matematyki była kultura Babilonu. Mieszkańcy starożytnej Babilonii potrafili wykonywać podstawowe operacje na liczbach, włącznie z mnożeniem i dzieleniem. Jako pierwsi zastosowalni oni pozycyjny sposób zapisu liczb.[27] Był to system sześćdziesiątkowy. W Babilonii pojawił się także pierwszy w historii symboliczny zapis zera. Matematyka Babilończyków miała, podobnie jak u Egipcjan, charakter algorytmiczny. Pomimo to, wśród istotnych z punktu widzenia rozwoju matematyki odkryć tej kultury wymienić należy miedzy innymi znajdowanie przybliżeń odwrotności liczb pierwszych, wyznaczanie pierwiastków z dowolnych liczb, a także badanie wielokątów foremnych.[28] Warto dodać, iż w Babilonii powstała algebra równań liniowych i kwadratowych oraz, że zajmowano się tam także najprostszymi równaniami wyższych stopni.[29] Te, wybitne jak na starożytne czasy, dokonania okazały się mieć znaczenie w dalszym rozwoju matematyki.

---

[24] Ibidem, s. 29.
[25] I. Bondecka-Krzykowska: *Przewodnik po historii matematyki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, 2006, s. 24.
[26] W. Więsław: *Matematyka*. W: *Wielka encyklopedia PWN*. T. 17. Red. J. Wojnowski. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003, s. 120.
[27] M. Kandulski: *Zarys historii matematyki…*, s. 10.
[28] I. Bondecka-Krzykowska: *Przewodnik po historii…,* s. 32.
[29] A. P. Juszkiewicz: *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*. T. 1. Przeł. S. Dobrzycki. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1975, s. 62.

Bodaj największy wpływ na rozwój matematyki we współczesnym jej kształcie mieli antyczni myśliciele greccy, których dzieła odbijały swe piętno na matematyce w kolejnych stuleciach. Tworzona przez nich w V i IV wieku p.n.e. matematyka stała się nauką we współczesnym jej rozumieniu.[30] Spośród jej twórców warto wspomnieć postać Talesa z Miletu, który jako wybitny filozof, astronom i matematyk zaliczany jest do grona „siedmiu mędrców greckich".[31] W czasach dzisiejszych postać Talesa kojarzona jest głownie z twierdzeniami geometrycznymi, szczególnie z twierdzeniem noszącym jego imię. Tales uznawany jest za ojca matematyki greckiej. Jego dzieła stworzyły podstawy nowoczesnej matematyki, wiedzy i filozofii.[32] Kolejnym wybitnym matematykiem starożytności był Pitagoras z Samos, który w Krotonie założył Związek Pitagorejski – szkołę filozoficzną, skupiającą wokół siebie uczonych i myślicieli – uczniów samego Pitagorasa.[33] Pitagorejczycy jako pierwsi zaczęli opracowywać matematykę w sposób naukowy, łącząc jej symboliczny i praktyczny wymiar.[34] Duży wkład w rozwój teorii nauki poczynił grecki filozof Platon.[35] Matematyka była dziedziną najbliższą zaproponowanemu przez niego ideałowi nauki, który zakładał ograniczenie jej zakresu do wyłącznie racjonalnych dociekań.[36] W dalszej kolejności warto wspomnieć o Arystotelesie.[37] Ten grecki uczony uznawał matematykę, obok fizyki i pierwszej filozofii, za jedną z trzech dziedzin filozofii teoretycznej. Matematyka była przez niego rozumiana w sposób bardzo szeroki, zaliczał do niej prócz arytmetyki i geometrii także muzykę, optykę (perspektywę), astronomię oraz mechanikę.[38]

Jednym z pierwszych dzieł naukowych, zbierających dokonania wczesnych matematyków były *Elementy (org. Stoicheia geometra)* autorstwa Euklidesa.[39] Dzieło greckiego filozofa przez lata było uważane za wzór w naukach ścisłych. Za najwybitniejszego matematyka czasów starożytnych uważany jest Archimedes. Ten grecki uczony i wynalazca zajmował się głownie geometrią, której to, w odróżnieniu

[30] R. Courant, H. Robbins*: Co to jest matematyka*. Przeł. R. Bittner. Warszawa: PWN, 1959, s. 11.
[31] W. Kopaliński: *Słownik mitów i tradycji kultury*. T. III. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Rytm, 2007, s. 297.
[32] D. J. Struik: *Krótki zarys historii…,* s. 50.
[33] Pitagoras. W: *Encyklopedia PWN*. https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/Pitagoras;3957737.html. Data dostępu: 01.09.2018 r.
[34] W. Tatarkiewicz: *Historia filozofii*. T. 1. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003, s. 55.
[35] Platon. W: *Encyklopedia PWN*. https://encyklopedia.pwn.pl/szukaj/platon.html. Data dostępu: 01.09.2018 r.
[36] W. Tatarkiewicz: *Historia filozofii*…, s. 97.
[37]Arystoteles. W: *Encyklopedia PWN*. https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/Arystoteles;3871513.html. Data dostępu: 01.09.2018 r.
[38] W. Tatarkiewicz: *Historia filozofii…*, s. 110.
[39] Euklides. W: *Encyklopedia PWN*. https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/Euklides;3899054.html. Data dostępu: 01.09.2018 r.

od arytmetyki, poświęcił większą część swoich prac. Wśród wielu dokonań Archimedesa, za najistotniejsze dla rozwoju późniejszej matematyki można uznać między innymi oszacowanie dokładnej wartości liczby π.[40] Za najważniejsze osiągnięcia matematyczne nauki greckiej uznaje się przede wszystkim teorię podzielności liczb, teorię wielkości niewymiernych, paradoksy nieskończoności, metodę wyczerpywania, metody całkowe i różniczkowe, a także geometrię sferyczną, trygonometrię cięciw Ptolemeusza i algebrę Diofanta.[41] Uczeni kolejnych epok, wzorując się na starożytnych mistrzach dokonywali kolejnych odkryć. Te z kolei tworzyły podwaliny myśli ich następcom.

Snując rozważania dotyczące historii matematyki nie sposób pominąć odkryć cywilizacji Chin, Indii oraz krajów cywilizacji islamu. Matematyka chińska przez wiele stuleci miała charakter algorytmiczny. Za najważniejszy wkład uczonych z Chin w rozwój dziedziny uznaje się wprowadzenie liczb ujemnych wraz z regułami wykonywania na nich działań, a także podanie ich najprostszej interpretacji. Ponadto chińscy matematycy stworzyli ogólną metodę rozwiązywania równań algebraicznych stopni wyższych.[42] Zbiór chińskiej wiedzy z zakresu matematyki zawierały przede wszystkim księgi *Matematyka w dziewięciu kręgach* oraz *Matematyka w dziesięciu księgach*.[43]

Ogromny wpływ na matematykę w skali światowej miała matematyka uprawiana w Indiach. Hindusi są twórcami dziesiętnej numeracji pozycyjnej, a także symboli oznaczających cyfry od 0 do 9. Cyfry te są współcześnie w powszechnym użyciu. Podstawowe zasady wykonywania obliczeń arytmetycznych w systemie dziesiętnym są również zasługą indyjskich uczonych. Ponadto wnieśli oni duży wkład w rozwój algebry.[44]

Matematyka krajów islamu przyczyniła się nie tylko do rozwoju tej dyscypliny, ale w pewnym sensie także do zachowania jej antycznych dzieł. Dzięki Arabom do czasów średniowiecznych przetrwały prace starożytnych uczonych greckich. W średniowiecznej Europie ich prace były przekładane na język łaciński właśnie z języka arabskiego, a nie z oryginalnej greki.[45] Najważniejszymi osiągnięciami matematyków krajów islamu było rozszerzenie pojęcia liczby do liczb rzeczywistych dodatnich,

[40] Archimedes. W: *Encyklopedia PWN*. https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/Archimedes;3870783.html. Data dostępu: 01.09.2018 r.
[41] A. P. Juszkiewicz: *Historia matematyki od…*, s. 166.
[42] I. Bondecka-Krzykowska: *Przewodnik po historii…,* s. 73.
[43] W. Więsław: *Matematyka.* W: *Wielka encyklopedia PWN.* T. 17. Red. J. Wojnowski. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003, s. 120.
[44] I. Bondecka-Krzykowska: *Przewodnik po historii…,* s. 82.
[45] Ibidem, s. 91.

rozwinięcie algebry w zakresie rozwiązywania równań liniowych, kwadratowych i sześciennych oraz przekazanie do Europy hinduskiego dziesiętnego pozycyjnego systemu liczenia. [46] Można zatem zaryzykować stwierdzenie, iż obecny kształt matematyki zawdzięczamy w dużej mierze arabskim uczonym.

Matematyka w średniowieczu w zdecydowanej większości skupiała się na komentowaniu i analizowaniu dzieł starożytnych myślicieli. Za ważniejsze osiągnięcia matematyczne z tamtych czasów uznaje się powstanie nauki o zmienności, która to z kolei wprowadziła do dziedziny pojęcie zmiany jakości (funkcji) oraz graficznego jej przedstawienia. [47] Pomimo swoich korzeni sięgających wieków średnich, ta gałąź matematyki rozwinęła się dopiero w XVII wieku.

W okresie renesansu nastąpił wielki postęp w zakresie rozwoju matematyki. W XVI wieku matematyka składała się z arytmetyki, algebry, geometrii oraz trygonometrii. [48] Istotnym osiągnięciem renesansowych matematyków było stworzenie symboliki arytmetycznej i algebraicznej, dzięki którym możliwy stał się postęp w zakresie teorii równań. Pojawiły się także potęgi o wykładnikach ułamkowych i ujemnych, a także liczby ujemne i urojone. Pojęcie liczby rozszerzono natomiast o zbiór liczb rzeczywistych. Ponadto nastąpił rozwój trygonometrii płaskiej i sferycznej.[49]

W XVII i XVIII stuleciu matematyka rozwijała się nadal w sposób dynamiczny. Szczególne zainteresowanie uczonych tamtego okresu dotyczyło pojęcia funkcji oraz rachunku nieskończenie małych, a także rachunku różniczkowego i całkowego.[50] Rachunek nieskończenie małych stworzył podstawy do rozwoju takich działów matematyki jak teoria szeregów nieskończonych, całkowanie równań różniczkowych zwyczajnych oraz rachunek wariacyjny i geometria różniczkowa.[51] Ponadto matematycy tamtych czasów stworzyli nowe dziedziny, takie jak geometria rzutowa oraz rachunek prawdopodobieństwa wraz z wieloma problemami teorii liczb. Wtedy też pojawiły się pierwsze prototypy maszyn matematycznych, miedzy innymi arytmometry, suwak logarytmiczny oraz maszyny liczące Pascala i Leibniza.[52] Tego typu urządzenia można uznać za pierwszy krok w kierunku stworzenia maszyn takich jak kalkulatory i komputery.

---

[46] Ibidem, s. 90-91.
[47] Ibidem, s. 101.
[48] A. P. Juszkiewicz: *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*. T. 2. Przeł. S. Dobrzycki. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1976, s. 18.
[49] I. Bondecka-Krzykowska: *Przewodnik po historii…,* s. 110-111.
[50] Ibidem, s. 132.
[51] A. P. Juszkiewicz: *Historia matematyki od…*. T. 2, s. 19.
[52] I. Bondecka-Krzykowska: *Przewodnik po historii…,* s. 132.

Wiek XIX zaowocował wieloma odkryciami matematycznymi. Matematyka tamtych czasów stała się nauką bardziej abstrakcyjną niż dotychczas, a przedmiot jej zainteresowania stał się bardziej ogólny, co stworzyło warunki do poszerzenia zastosowań matematyki w różnych dziedzinach życia człowieka. Powstała wtedy tak zwana matematyka czysta, której zadaniem było szukanie rozwiązań zagadnień matematycznych, bez zwracania uwagi na ich ewentualne zastosowania. W związku z powyższym w XIX wieku wyraźnie oddzielono matematykę stosowaną od matematyki czystej.[53] Za najistotniejsze osiągnięcia tamtych lat uznaje się dalszy rozwój teorii liczb i rachunku prawdopodobieństwa, zapoczątkowanie nowoczesnej algebry, dalszy rozwój funkcji oraz powstanie teorii mnogości.[54] Ogromne znaczenie miało także odkrycie geometrii nieeuklidesowej.[55] Warto nadmienić, iż w XIX wieku matematyka uległa bardzo dużemu rozproszeniu na ściśle określone działy. Spowodowało to stopniową specjalizację poszczególnych jej dziedzin, a tym samym coraz węższe specjalizacje matematyków w konkretnych jej obszarach.

W XX wieku matematyka rozwijała się nadal prężnie, co zaowocowało powstaniem wielu nowych dziedzin matematyki czystej i matematyki stosowanej. W pierwszej połowie XX wieku stworzono podstawowe kierunki filozofii matematyki współczesnej – formalizm, intuicjonizm oraz logicyzm.[56] Nowymi gałęziami matematyki stały się teoria całki, rachunek operatorowy i tensorowy.[57] Szerokie zastosowanie matematyki w niemal wszystkich dziedzinach życia człowieka zaowocowało rozwojem matematyki finansowej, matematycznej psychologii, matematycznej biologii, czy matematycznej ekologii. Warto wspomnieć również o dynamicznym rozwoju komputerów i techniki cyfrowej.

Współcześnie obserwujemy dalszy rozwój matematyki. Obecnie prognozuje się, iż wiek XXI może przynieść rozwój matematyki i informatyki kwantowej oraz szeroko rozumianej geometrii, w tym nieprzemiennej geometrii Alaina Connesa, geometrii niskich wymiarów 2, 3 i 4 oraz geometrii arytmetycznej.[58] Kolejni uczeni rozbudowują istniejące już teorie i uzupełniają je o nowe odkrycia. Odzwierciedlenie tego

[53] Ibidem, s. 154.
[54] W. Więsław: *Matematyka*. W: *Wielka encyklopedia PWN*. T. 17. Red. J. Wojnowski. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003, s. 120-121.
[55] A. P. Juszkiewicz: *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*. T. 3. Przeł. S. Dobrzycki. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1977, s. 16.
[56] R. Murawski: *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1995.
[57] I. Bondecka-Krzykowska: *Przewodnik po historii…,* s. 199.
[58] M. Kowalski, E. Pawłowa: *Rozwój matematyki na…,* s. 175.

stanu rzeczy odnaleźć można we wspomnianej w poprzednim podrozdziale obowiązującej klasyfikacji gałęzi matematyki Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego AMS.

W dalszej części pracy zebrano najistotniejsze wydarzenia związane z postępem tej dyscypliny na ziemiach polskich na przestrzeni kolejnych wieków. Wspomniano również o najważniejszych polskich ośrodkach naukowych zajmujących się matematyką oraz o jej najwybitniejszych twórcach.

1.2. Rozwój matematyki w Polsce – rys historyczny

Według źródeł historycznych, w Polsce matematyki nauczano od chwili przyjęcia chrześcijaństwa. Początkowo nauczanie arytmetyki ograniczało się do wykonywania czterech podstawowych działań na liczbach całkowitych, natomiast nauczanie geometrii sprowadzało się do obliczania pól powierzchni oraz objętości najprostszych figur.[59] Kolejne stulecia przyniosły rozkwit matematyki oraz jej upowszechnienie.

Pierwszym znanym polskim matematykiem i fizykiem był żyjący w latach od ok. 1230 do ok. 1280 Erazm Witelo.[60] W swoich poglądach dotyczących matematyki nawiązywał do myśli starożytnych greckich uczonych, takich jak Euklides, Ptolemeusz, czy Archimedes. Witelo stworzył w języku łacińskim dwa dzieła – *O wnioskach z Elementów Euklidesa* oraz *Perspectiva*,[61] które przez lata stanowiły podstawowy zbiór informacji z zakresu matematyki. Rozwój matematyki jako nauki w Polsce przyśpieszyło założenie w 1364 roku przez Kazimierza Wielkiego w Krakowie pierwszego polskiego uniwersytetu. Aktualnie nosi on nazwę Uniwersytet Jagielloński.[62] Od tamtej pory, dzięki współpracy z ośrodkami naukowymi z innych części Europy, nastąpił rozkwit tej dziedziny w Polsce. Z Akademią Krakowską związani byli najwięksi polscy matematycy tamtych czasów. Można wśród nich wymienić: Jana z Olkusza, Marcina Króla z Żurawicy, Jana z Głogowa Wielkiego, czy też Mikołaja Kopernika.[63] W kolejnych stuleciach z krakowskim ośrodkiem naukowym związanych było wielu wybitnych matematyków. W epoce Odrodzenia nastąpił dalszy rozwój polskiej nauki.

---

[59] E. Kofler: *Z dziejów matematyki*. Warszawa: Wiedza Powszechna, 1956, s. 240-241.
[60] Witelo. W: *Encyklopedia PWN*. https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/Witelo;3996873.html. Data dostępu: 01.09.2018 r.
[61] E. Kofler: *Z dziejów matematyki…,* s. 241.
[62] Uniwersytet Jagielloński. https://www.uj.edu.pl. Data dostępu: 01.09.2018 r.
[63] J. Dianni, A. Wachułka: *Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1963, s. 34-57.

Wtedy to zaczęły powstawać pierwsze dzieła naukowe w ojczystym języku. Pierwsze podręczniki z matematyki napisane w języku polskim, a nie jak dotąd języku łacińskim, to *Algorithmus* z 1538 roku autorstwa Tomasza Kłosa, *Algorithm* Bernarda Wojewódki z 1553 roku oraz powstała w roku 1566 *Geometria* Stanisława Grzepskiego.[64]Powstanie pierwszych podręczników w języku ojczystym spowodowało upowszechnieniem matematyki, do której we wcześniejszych latach dostęp, ze względu na barierę językową, był utrudniony. W 1579 roku powstał kolejny polski ośrodek naukowy, mający silny wpływ na rozwój matematyki w kolejnych latach. Był nim Uniwersytet Wileński[65] założony przez Stefana Batorego. Najwybitniejszymi postaciami związanymi z Uniwersytetem Wileńskim w XVII wieku byli Oswald Krygier oraz Adam Adamandy Kochański. W Akademii Krakowskiej w tym czasie działali natomiast Jan Brożek, Stanisław Pudłowski oraz Jan Toński.[66] W wieku XVIII rozwój polskiej nauki zwolnił, czego przyczyną była głownie zmieniająca się sytuacja polityczna oraz rozbiory. Pomimo trudnej sytuacji, pojawili się przedstawiciele nauki ze znaczącym dorobkiem w zakresie matematyki. Spośród wielkich polskich uczonych XVIII oraz XIX wieku wymienić należy Jana Śniadeckiego, Józefa Czecha, Grzegorza Hreczynę, Kajetana Garbińskiego, czy Tytusa Babczyńskiego.[67]

Największy jak do tej pory rozkwit polskiej myśli matematycznej miał miejsce w latach 1920 – 1939. Twórczość polskich matematyków miała wtedy największy w historii wpływ na matematykę na świecie. Głównymi ośrodkami naukowymi istotnymi dla rozwoju tej dziedziny była Warszawa oraz Lwów. Równie prężne działania na rzecz rozwoju matematyki podejmowano w Krakowie, Poznaniu oraz w Wilnie.[68] Działalność twórców tak zwanej Polskiej Szkoły Matematycznej sprawiła, iż Polska znalazła się w światowej czołówce w zakresie topologii, teorii mnogości, analizy funkcjonalnej, teorii równań różniczkowych, logiki, algebry oraz w zakresie zastosowania matematyki. Trudno wymienić wszystkie osoby tworzące sukcesy polskiej matematyki w tamtym okresie. Wartymi wspomnienia są tu m.in.: Bronisław Knaster, Jerzy Spława-Neyman, Tadeusz Ważewski, Antoni Zygmund, Alfred Tarski, Władysław Orlicz, Witold Hurewicz, Stanisław Mazur, Stanisław Ulam, Andrzej Mostowski, czy Marek Kac.[69]

---

[64] E. Kofler: *Z dziejów matematyki…,* s. 23.
[65] Vilniaus Universitetas. https://www.vu.lt. Data dostępu: 01.09.2018 r.
[66] J. Dianni, A. Wachułka: *Tysiąc lat polskiej…, s.* 74-104.
[67] R. Duda: *Matematycy XIX i XX wieku związani z Polską*. Wrocław: Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, 2012, s. 21-22.
[68] Ibidem, s. 18.
[69] M. Kordos: *Wykłady z historii matematyki,* Warszawa: Wydawnictwo Script, 2005, s. 290.

Kolejne lata były tragiczne w skutkach dla polskiej nauki. Podczas II wojny światowej zginęło wielu naukowców, w tym również wybitnych matematyków. Po ustaniu działań wojennych prężnie działającymi ośrodkami matematycznymi stały się Warszawa, Kraków, Poznań, Lublin oraz Łódź. Do wybitnych twórców powojennej matematyki polskiej zaliczamy miedzy innymi: Zygmunta Charzyńskiego, Romana Sikorskiego, Zygmunta Butlewskiego, Zdzisława Krygowskiego, Mieczysława Biernackiego, Hugona Steinhausa, Edwarda Marczewskiego, Bronisława Knastera czy Helenę Rasiową.[70]

Aktualnie w Polsce największymi matematycznymi ośrodkami uniwersyteckimi są Warszawa, Kraków oraz Wrocław. Ponadto istotne znaczenie ma również Instytut Matematyki Polskiej Akademii Nauk utworzony w 1948 roku jako Państwowy Instytut Matematyczny. [71] Organizacją zrzeszająca społeczność rodzimych matematyków jest Polskie Towarzystwo Matematyczne [72], którego działalność obejmuje pracę badawczą, dydaktykę matematyki oraz jej popularyzowanie. Krzewieniem kultury matematycznej w Europie zajmuje się Europejskie Towarzystwo Matematyczne [73] (*European Mathematical Society*), natomiast organizacją o szerszym zasięgu jest Międzynarodowa Unia Matematyczna[74] (*International Mathematical Union*).

Dla potrzeb niniejszej rozprawy najistotniejsze znaczenie ma rozwój dydaktyki matematyki, w szczególności nauczanie matematyki w pierwszych latach edukacji. W kolejnym podrozdziale wymieniono najważniejsze postacie współczesnej dydaktyki matematyki, których działania przyczyniły się do rozwoju edukacji matematycznej na poziomie przedszkolnym i wczesnoszkolnym.

1.3. Wybitni twórcy polskiej dydaktyki matematyki

Snując rozważania dotyczące twórców polskiej matematyki, wspomnieć należy tych uczonych, których wkład w najistotniejszy sposób przyczynił się do rozwoju dydaktyki matematyki, ze szczególnym uwzględnieniem edukacji matematycznej na poziomie elementarnym.

---

[70] Z. Pawlikowska-Brożek: *Matematyka*. W: *Zarys dziejów nauk przyrodniczych w* Polsce. Red. B. Suchodolski. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo „Wiedza Powszechna", 1983, s. 210-215.
[71] Instytut Matematyki Polskiej Akademii Nauk. https://www.impan.pl. Data dostępu: 26.08.2018 r.
[72] Polskie Towarzystwo Matematyczne. https://www.ptm.org.pl. Data dostępu: 26.08.2018 r.
[73] European Mathematical Society. http://euro-math-soc.eu. Data dostępu: 26.08.2018 r.
[74] International Mathematical Union. https://www.mathunion.org. Data dostępu: 26.08.2018 r.

Dydaktyka jest jednym z działów pedagogiki. Zajmuje się analizą celów, treści, metod, zasad i form organizacyjnych procesów kształcenia, a także ich psychologicznymi i społecznymi uwarunkowaniami. [75] Pojęcie to obejmuje swoim zakresem wszystkie zjawiska i procesy związane z nauczaniem oraz z uczeniem się. Wyróżniamy dydaktykę ogólną, zajmującą się podstawowymi zagadnieniami dotyczącymi nauczania i uczenia się oraz dydaktykę szczegółową. Dydaktyka szczegółowa obejmuje specyficzne zagadnienia nauczania określonego przedmiotu, w szkole określonego typu lub stopnia.[76] Dla potrzeb niniejszej rozprawy najistotniejsze znaczenie ma dydaktyka matematyki na pierwszym etapie edukacyjnym.

Dydaktyka matematyki jest dyscypliną zajmującą się problemami nauczania matematyki, która wykorzystuje metody samej matematyki oraz innych nauk.[77] W Polsce do rozwoju dydaktyki matematyki jako dziedziny nauki w przyczyniła się żyjąca w latach 1904-1988 prof. dr Anna Zofia Krygowska [78], która to była pierwszym w Polsce profesorem dydaktyki matematyki. [79] Przez większą część swojego życia A.Z. Krygowska związana była z Wyższą Szkołą Pedagogiczną w Krakowie, która w roku 2008 zmieniła nazwę na Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie. [80] W roku 1958 na Wydziale Matematyczno-Fizycznym WSP w Krakowie powstała pierwsza w Polsce Katedra Metodyki Nauczania Matematyki (w kolejnych latach nazwa została zmieniona na Katedrę Dydaktyki Matematyki)[81], nad którą kierownictwo objęła A.Z. Krygowska. Autorka scharakteryzowała dydaktykę matematyki jako naukę, której problematyka obejmuje wszelkie zagadnienia związane z uczeniem się i nauczaniem matematyki. [82] W bardziej szczegółowym ujęciu dydaktyka matematyki obejmowała twierdzenia dotyczące najbardziej efektywnych treści i metod nauczania matematyki oraz zawierała programy jej nauczania. Ponadto zadaniem dydaktyki matematyki jest spójne ujęcie wszystkich aspektów działalności nauczyciela, wśród których

---

[75] Dydaktyka, w: *Encyklopedia PWN*. https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/dydaktyka;3895277.html. Data dostępu: 01.09.2018 r.

[76] Dydaktyka szczegółowa, w: *Encyklopedia PWN*. https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/dydaktyka-szczegolowa;3895279.html. Data dostępu: 01.09.2018 r.

[77] W. Nowak: *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1989, s. 10.

[78] W. Bobrowska-Nowak, D. Drynda: *Słownik pedagogów polskich*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, 1998, s. 106.

[79] Krygowska Anna Zofia. http://www.bg.up.krakow.pl/biografik/?p=954. Data dostępu: 28.08.2018 r.

[80] Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie. http://www.up.krakow.pl. Data dostępu: 01.09.2018 r.

[81] B. J. Nowecki: *Krakowska szkoła dydaktyki matematyki*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe WSP, 1984, s. 16.

[82] A. Z. Krygowska: *Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki*. W: „*Dydaktyka matematyki*". Nr 1. Warszawa PWN, Warszawa 1982, s. 11.

wyróżniamy aspekty rzeczowy, pedagogiczny, społeczny, psychologiczny, socjologiczny oraz konstruktywny.[83] Uczona postulowała autonomizację dydaktyki matematyki, która zmierzała w kierunku zarysowania problematyki teoretycznej tej dyscypliny, wypracowania specyficznej metodologii, pozwalającej na ulepszanie nauczania w szkole oraz wykształcenie odpowiedniej kadry.[84] Jej dzieło *Zarys dydaktyki matematyki* (cz. 1., 2., 3., 1969, 1977, 1980) do dnia dzisiejszego stanowi jedną z najistotniejszych publikacji naukowych związanych z dydaktyką tego przedmiotu. Uczona przez wiele lat łączyła pracę naukową z praktyką dydaktyczną. Dzięki zdobytemu doświadczeniu w swoich licznych pracach naukowych proponowała konkretne rozwiązania dydaktyczne, mające na celu pogłębienie rozumienia pojęć matematycznych przez uczniów. Istotnym zagadnieniem była dla niej reforma dotychczasowego nauczania matematyki. Ponadto zajmowała się metodologicznymi aspektami matematyki szkolnej oraz koncepcją matematyki dla wszystkich.[85] Współczesna dydaktyka matematyki na etapie nauczania wczesnoszkolnego wciąż czerpie z dorobku A.Z. Krygowskiej. Uczona stworzyła koncepcję czynnościowego nauczania matematyki[86], która jest jedną z podstawowych strategii nauczania matematyki w pracy z uczniem w młodszym wieku szkolnym. Prócz *Zarysu dydaktyki matematyki* dziełami autorstwa A.Z. Krygowskiej wartymi wspomnienia są *Geometria. Podstawowe własności płaszczyzny* (cz. I , II, 1965, 1967) oraz *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960 – 1980* (1984).

Kolejną wybitną postacią wśród przedstawicieli polskiej dydaktyki matematyki jest prof. dr hab. Helena Siwek[87], która współpracowała i rozwijała się u boku A.Z. Krygowskiej. H. Siwek zawodowo związana jest z Uniwersytetem Pedagogicznym im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie i Uniwersytetem Rzeszowskim[88], a także z Wyższą Szkołą Pedagogiczną im. Janusza Korczaka w Warszawie[89], z którą współpracuje aktualnie. Uczona rozwinęła koncepcję czynnościowego nauczania

[83] Ibidem, s. 11.
[84] R. Duda: *Matematycy XIX i XX wieku…,* s. 230.
[85] H. Siwek: *Anna Zofia Krygowska – w stulecie urodzin*. W: „*Matematyka*" 6/2004. http://www.absolwencilo-zakopane.pl/czlonkowie_html/krygowska/Zofia%20Krygowska.pdf. Data dostępu: 01.09.2018 r.
[86] Z. Krygowska: *Zarys dydaktyki matematyki*. Cz. 1. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1979, s. 127-129.
[87] prof. dr hab. Helena Siwek. Nauka Polska. http://nauka-polska.pl/#/profile/scientist?id=20268&_k=007v47. Data dostępu: 02.09.2018 r.
[88] Uniwersytet Rzeszowski. http://www.ur.edu.pl. Data dostępu: 02.09.2018 r.
[89] Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Janusza Korczaka w Warszawie. https://www.wspkorczak.eu. Data dostępu: 02.09.2018 r.

matematyki. W kręgu zainteresowań naukowych H. Siwek znajdują się także: nauczanie logiki, rozpoznawanie i rozwijanie możliwości matematycznych dzieci z upośledzeniem intelektualnym w stopniu lekkim oraz działania związane z reformowaniem systemu edukacji matematycznej w Polsce. [90] Wśród najważniejszych publikacji H. Siwek wymienić należy dzieła takie jak *Naśladowanie wzorca i dostrzeganie prawidłowości w prostych sytuacjach matematycznych i paramatematycznych przez dzieci upośledzone w stopniu lekkim* (1985), *Możliwości matematyczne uczniów szkoły specjalnej* (1992), *Czynnościowe nauczanie matematyki* (1998), *Kształcenie zintegrowane na etapie wczesnoszkolnym. Rola edukacji matematycznej* (2004) oraz *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej* (2005).[91] H. Siwek jest ponadto autorką i współautorką serii podręczników szkolnych, w tym pierwszych w Polsce podręczników matematyki dla klas I-III szkoły specjalnej.

Ogromny wkład w rozwój edukacji matematycznej na poziomie przedszkola i pierwszych klas szkoły podstawowej wniosła prof. dr hab. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska [92] , aktualnie związana z Akademią Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie[93], gdzie pełni funkcję dyrektora Instytutu Wspomagania Rozwoju Człowieka i Edukacji oraz kierownika Katedry Pedagogiki Małego Dziecka. Zainteresowania naukowe E. Gruszczyk-Kolczyńskiej obejmują niepowodzenia w nauce matematyki oraz działania naprawcze, intensywne wspomaganie rozwoju dzieci wraz z ich edukacją matematyczną, a także diagnozowanie możliwości umysłowych dzieci oraz ich wiadomości i umiejętności matematycznych. [94] Imponujący dorobek naukowy Autorki obejmują prace przybliżające tematykę umiejętności matematycznych dzieci w kontekście ich rozwoju umysłowego. E. Gruszczyk-Kolczyńska jest autorką bazującej na teorii rozwoju myślenia J. Piageta koncepcji dojrzałości dziecka do uczenia się matematyki. Równie istotnym osiągnięciem Uczonej jest stworzenie wraz z Ewą Zielińską autorskiego programu edukacji matematycznej dla dzieci w wieku przedszkolnym – *Dziecięca matematyka*. Program ten do dnia dzisiejszego jest

[90] L. Zaręba: *Sylwetka jubilatki [prof. Helena Siwek]*. W: „*Didacta Mathematicae*". T. 33, 2010, s. 3. https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/didactica-mathematicae/article/view/33/33. Data dostępu: 28.08.2018 r.

[91] Helena Siwek. Instytut Matematyczny Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie. http://matematyka.up.krakow.pl/50ZDM/siwek.htm. Data dostępu: 01.09.2018 r.

[92] prof. dr hab. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska. Nauka Polska. http://nauka-polska.pl/#/profile/scientist?id=72105&_k=fesusw. Data dostępu: 02.09.2018 r.

[93] Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie. http://www.aps.edu.pl. Data dostępu: 02.09.2018 r.

[94] J. Kapuścik: *Współcześni uczeni polscy. Słownik bibliograficzny*. Tom V. Warszawa: Ośrodek Przetwarzania Informacji, 2006, s. 323-324.

z powodzeniem wykorzystywany w pracy z dziećmi przez nauczycieli przedszkoli i klas początkowych. Wśród licznych publikacji autorskich i współautorskich E. Gruszczyk-Kolczyńskiej warto wymienić pozycje takie jak: *Niepowodzenia w uczeniu się matematyki u dzieci z klas początkowych. Diagnoza i terapia* (1985), *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki* (1992), *Dziecięca matematyka. Książka dla rodziców i nauczycieli* (1997), *Wspomaganie rozwoju umysłowego trzylatków i dzieci starszych wolniej rozwijających się. Książka dla rodziców, terapeutów i nauczycielek przedszkola* (2000), *Wspomaganie dzieci w rozwoju do skupienia uwagi i zapamiętywania. Uwarunkowania psychologiczne i pedagogiczne, programy i metodyka* (2005), *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej. Cele i treści kształcenia, podstawy psychologiczne i pedagogiczne oraz opisy zajęć z dziećmi w domu, w przedszkolu i w szkole. Książka dla nauczycieli i rodziców* (2009), *Nauczycielska diagnoza gotowości do podjęcia nauki szkolnej. Jak prowadzić obserwację dzieci, interpretować wyniki i formułować wnioski* (2011), *O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli* (2012), *Nauczycielska diagnoza edukacji matematycznej dzieci. Metody, interpretacja i wnioski* (2013), *Edukacja matematyczna w klasie I. Książka dla nauczycieli i rodziców. Cele i treści kształcenia, podstawy psychologiczne i pedagogiczne oraz opisy zajęć z dziećmi* (2014), *Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później. Książka dla rodziców i nauczycieli starszych przedszkolaków* (2015) oraz najnowsza pozycja – *Zastosowanie darów Froebla w Dziecięcej matematyce. Treści kształcenia, komentarze metodyczne oraz opisy zajęć wspomagających rozwój umysłowy i edukację matematyczną przedszkolaków* (2017). Istotnym elementem pracy E. Gruszczyk-Kolczyńskiej jest łączenie wiedzy naukowej oraz pracy badawczej z praktyką. Uczona formułuje praktyczne wskazania dla nauczycieli oraz rodziców, których celem jest rozwijanie umiejętności matematycznych oraz wspomaganie rozwoju umysłowego dzieci od najmłodszych lat.

Ważną postacią polskiej dydaktyki matematyki jest urodzony w 1934 roku prof. zw. dr hab. Zbigniew Władysław Semadeni.[95] Działalność naukowa uczonego związana jest z Uniwersytetem Warszawskim[96] oraz Wyższą Szkołą Gospodarki Euroregionalnej

[95] prof. zw. dr hab. Zbigniew Semadeni. Nauka Polska. http://nauka-polska.pl/#/profile/scientist?id=56567&_k=hy7ilh. Data dostępu: 02.09.2018 r.
[96] Uniwersytet Warszawski. https://www.uw.edu.pl. Data dostępu: 02.09.2018 r.

im. Alcide De Gasperi w Józefowie.[97] Działalność dydaktyczną prowadził również w University of California w Davis[98], a także w ośrodkach zagranicznych w Seattle, Toronto i Sydney. Z. Semadeni jest redaktorem i współautorem *Nauczania Początkowego Matematyki* (1981-1987, t. 1-4) będącego wciąż aktualnym dziełem dotyczącym nauczania matematyki na poziomie elementarnym. Innymi ważnymi pracami Z. Semadeniego są *Matematyka współczesna w nauczaniu dzieci* (1973) oraz współautorska *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka* (2015).

W tym miejscu warto wspomnieć również postać dr hab. Stefana Jerzego Turnaua[99] urodzonego w 1931 roku w Krakowie[100]. Podczas swojej kariery zawodowej był naukowo związany z Uniwersytetem Pedagogicznym im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie oraz Uniwersytetem Rzeszowskim, a także uczelniami amerykańskimi – University of Georgia[101] w Athenso raz Liberal Arts College[102] w Belmont.[103] Uczony ten w 1979 roku jako pierwszy w Polsce otrzymał stopień doktora habilitowanego nauk matematycznych w zakresie dydaktyki matematyki (na Uniwersytecie Warszawskim).[104] Zainteresowania naukowe S. Turnaua koncentrują się głownie wokół zagadnień współczesnej koncepcji matematyki elementarnej oraz jej nauczania, modernizacji treści i metod nauczania matematyki, naturalnego myślenia ucznia oraz metod matematycznych, a także środków wyrażania i przekazywania treści matematycznych.[105] Wśród wielu prac Autora za najistotniejsze uznać można *Logiczny wstęp do matematyki* (1974), *Rola podręcznika w kształtowaniu pojęć i rozumowań matematycznych na poziomie pierwszej klasy ponadpoczątkowej* (1978) oraz *Wykłady o nauczaniu matematyki* (1990). S. Turnau jest także autorem i współautorem podręczników do matematyki.

Ważną postacią polskiej dydaktyki matematyki jest także urodzony w 1924 roku prof. zw. dr hab. Henryk Moroz[106]. Uczony ten prowadził działalność naukowo-badawczą

[97] Wyższa Szkoła Gospodarki Euroregionalnej im. Alcide De Gasperi w Józefowie. https://wsge.edu.pl/pl. Data dostępu: 02.09.2018 r.
[98] University of California. https://www.ucdavis.edu. Data dostępu: 02.09.2018 r.
[99] dr hab. Stefan Jerzy Turnau. Nauka Polska. http://nauka-polska.pl/#/profile/scientist?id=25919&_k=u9h8gi. Data dostępu: 02.09.2018 r.
[100] Stefan Turnau. http://matematyka.up.krakow.pl/50ZDM/turnau.htm. Data dostępu: 01.09.2018 r.
[101] University of Georgia. https://www.uga.edu. Data dostępu: 02.09.2018 r.
[102] Belmont University. http://www.belmont.edu/liberal-arts/. Data dostępu: 02.09.2018 r.
[103] M. Legutko: *Sylwetka jubilata [Stanisław Turnau]*. „*Dydaktyka matematyki*". T. 23. Warszawa 2001.
[104] M. Ciosek: *O działalności Profesora Stefana Turnaua jako dydaktyka matematyki*. „*Dydaktyka matematyki*". 2001, T. 23, s. 12.
[105] Ibidem, s. 11.
[106] prof. dr hab. Henryk Moroz. Nauka Polska. http://nauka-polska.pl/#/profile/scientist?id=66673&_k=ozc7j8. Data dostępu: 02.09.2018 r.

w ośrodkach takich jak Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Janusza Korczaka w Warszawie, Uniwersytet Jagielloński[107] oraz Uniwersytet Śląski w Katowicach.[108] H. Moroz pracował nad wdrażaniem koncepcji czynnościowego nauczania matematyki w polskich szkołach. Ponadto osiągnięciami uczonego w zakresie dydaktyki matematyki jest opracowanie koncepcji unowocześnienia nauczania matematyki w klasach początkowych, a także opracowanie nowego programu kształcenia pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym oraz uczniów w klasach I-III.[109] Spośród wielu prac H. Moroza warto wymienić *Problemy modernizacji początkowego nauczania matematyki* (1972), *Z doświadczeń nad modernizacją nauczania początkowego matematyki* (1978), *Rozwijanie pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym* (1982) oraz *Kształcenie matematyczne a rozwój społeczno-zawodowy* (1991).

Jak wspominano wyżej, nie sposób wymienić wszystkich uczonych, którzy przyczynili się do rozwoju dydaktyki matematyki w Polsce. Dorobek naukowy wyżej wymienionych naukowców zmienił obraz współczesnego nauczania matematyki na etapie przedszkola i klas I-III.

W dalszej części pracy przedstawiono najistotniejsze informacje dotyczące edukacji matematycznej realizowanej na pierwszym etapie edukacyjnym, wraz z jej celami oraz zadaniami. Scharakteryzowano również te sfery rozwoju ucznia w młodszym wieku szkolnym, które wiążą się z procesem uczenia się matematyki.

[107] Uniwersytet Jagielloński. https://www.uj.edu.pl. Data dostępu: 02.09.2018 r.
[108] Uniwersytet Śląski w Katowicach. https://www.us.edu.pl. Data dostępu: 02.09.2018 r.
[109] S. Palka, *Życie aktywne i twórcze, czyli rzecz o działalności prof. dra hab. Henryka Moroza*. W: *Teoretyczne odniesienia i praktyczne rozwiązania w pedagogice wczesnoszkolnej*. Red. S. Palka. Katowice: Śląsk Sp z o.o., 1994, s. 15.

2. Edukacja matematyczna realizowana na pierwszym etapie edukacyjnym

„Nauczanie matematyki powinno zapoznawać uczniów ze wszystkimi aspektami aktywności matematycznej tak dalece, jak to jest możliwe. W szczególności powinni oni otrzymać możność samodzielnej pracy twórczej – na miarę ich możliwości”.[110]

/George Polya/

Edukacja wczesnoszkolna, nazywana także nauczaniem początkowym, edukacją elementarną lub nauczaniem elementarnym określana jest jako pierwszy etap edukacyjny. Jest ona realizowana w trzech pierwszych klasach szkoły podstawowej. Głównym zadaniem nauczania początkowego jest przygotowanie uczniów do pracy w starszych klasach szkoły ogólnokształcącej oraz zapewnienie im wszechstronnego rozwoju.[111] Aktualnie przeważająca liczba uczniów w wieku wczesnoszkolnym mieści się w przedziale od 7 do 10 roku życia.

Zdecydowana większość działań dydaktycznych, wychowawczych i/lub opiekuńczych realizowanych w instytucjach edukacyjnych ma charakter planowy i celowy. Celami edukacji są zakładane w sposób świadomy skutki, jakie społeczeństwo chce osiągnąć poprzez funkcjonowanie systemu oświaty.[112] Ogólne ujęcie celów edukacji elementarnej zaproponowała J. Bonar. Uznała iż są nimi:

- „tworzenie warunków umożliwiających dziecku aktywny udział w poznawaniu, uczeniu się i konstruowaniu wiedzy,
- organizowanie sytuacji sprzyjających rozwijaniu spontanicznej aktywności dziecka,
- wspieranie wewnętrznie motywowanej i wynikającej z potrzeb dziecka aktywności inspirowanej przez nauczyciela lub rówieśników oraz aktywności kierowanej i motywowanej zewnętrznie przez stawiane dziecku zadania,

[110] G. Polya: *Odkrycie matematyczne: o rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań*. Przeł. A. Góralski. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1975, s. 335.
[111] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 254-255.
[112] Ibidem, s. 53.

– umożliwienie dziecku działań kreatywnych.”[113]

Aprobata tych lub innych celów ogólnych edukacji wczesnoszkolnej przez organy decyzyjne, takiej jak np. Ministerstwo Edukacji Narodowej, a ściślej angażowanych przez nie specjalistów z zakresu edukacji wczesnoszkolnej, umożliwia formułowanie celów obligatoryjnie realizowanych w ramach poszczególnych rodzajów edukacji, razem wyznaczających obszary nauczania początkowego. Oczywiście innymi kryteriami wyboru celów ogólnych mogą kierować się ludzie nauki, którzy w swych rozważaniach teoretycznych lub też działaniach empirycznych proponują cele dla poszczególnych rodzajów edukacji, niekoniecznie zbieżne z celami obowiązującymi w praktyce edukacyjnej w danym czasie.

W pierwszym podrozdziale niniejszego rozdziału przedstawiono wybrane elementy rozwoju ucznia w młodszym wieku szkolnym, które mają istotne znaczenie w procesie uczenia się matematyki.

2.1. Wybrane elementy rozwoju ucznia istotne w procesie uczenia się matematyki

W czasie swojego życia człowiek nieustannie się rozwija. Ontogeneza (gr. *on*, *óntos* „byt”, „będące”, „istniejące” oraz *génesis* „pochodzenie”), nazywana inaczej rozwojem osobniczym człowieka, to badanie i opis stanu organizmu ludzkiego od momentu poczęcia do śmierci.[114] Rozwój jest procesem polegającym na występowaniu w danym przedmiocie określonych zmian ilościowych i jakościowych.[115] Zmiany te mają charakter etapowy. Są powodowane wzajemnym oddziaływaniem na siebie czynników wewnątrzprzedmiotowych i środowiskowych. Kolejne etapy nazywane są następującymi po sobie fazami rozwojowymi.[116] Na rozwój człowieka wpływ ma wiele czynników, wśród których podstawowymi są czynniki natury biologicznej oraz środowiskowej. Równie ważne są czynniki genetyczne, warunkujące szybkość i rytm zachodzących

---

[113] J. Bonar, *Ewaluacja procesu myślenia dywergencyjnego uczniów wczesnej edukacji*. W: *Ewaluacja a jakość edukacji. Koncepcje – doświadczenia – kierunki praktycznych rozwiązań*. Red. G. Michalski. Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 2011, s. 146.

[114] Ontogeneza człowieka. Encyklopedia PWN. https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/ontogeneza-czlowieka;3951173.html. Data dostępu: 04.09.2018 r.

[115] W. Okoń: Nowy s*łownik pedagogiczny*…, s. 343.

[116] S. Jopkiewicz, E. Suliga: *Biomedyczne podstawy rozwoju i wychowania*. Radom-Kielce: Instytut Technologii Eksploatacji – Państwowy Instytut Badawczy w Radomiu, 2005, s. 12.

w organizmie zmian.[117] Rozwój jest cechą bardzo indywidualną, bowiem każda jednostka rozwija się wedle własnego rytmu i tempa. Prawidłowość tą należy uwzględnić podczas planowania i organizowania procesu nauczania. Zgodnie z najnowszymi trendami edukacyjnymi należy wykorzystać różnice tkwiące w rozwoju dzieci tak, by jak najlepiej wykorzystać drzemiący w nich potencjał. Świadome, ukierunkowane działania w tym zakresie noszą nazwę wspomagania rozwoju umysłowego dziecka lub wspomagania dziecka w jego rozwoju. [118] Rozwijając matematyczne zdolności uczniów powinno się uwzględniać w procesie nauczania zarówno logikę tego przedmiotu, jak i psychikę wychowanków oraz prawa rządzące ich rozwojem.[119] Poziom rozwoju w każdym jego aspekcie ma wpływ na nabywanie przez jednostkę wiedzy i umiejętności.

Rozwój człowieka ma charakter postępowych i progresywnych zmian, zmierzających do zapewnienia jednostce równowagi z otoczeniem oraz do doskonalenia form regulacji jej stosunków ze środowiskiem.[120] W ciągu życia człowieka kolejne etapy rozwoju różnią się od siebie. Poszczególne funkcje dojrzewają w zmiennym tempie. Zróżnicowany jest również charakter zachodzących zmian. Życie ludzkie można podzielić na pewne okresy i etapy oraz wskazać zachodzące w jednostce charakterystyczne dla nich zmiany. Istnieją różne kryteria podziałów, które można przyjąć podczas dokonywania próby periodyzacji rozwoju osobniczego człowieka. Biorąc pod uwagę specyfikę podjętych w rozprawie rozważań najbardziej interesującym będzie podział opierający się na rozwoju psychiki, motoryki oraz rozwoju psychospołecznym, który najczęściej stosowany jest w pedagogice i psychologii.

Podziału tego dokonała Maria Żebrowska, wyodrębniając:

- „niemowlęctwo (pierwszy rok życia),
- wiek poniemowlęcy (od 1 do 3 lat),
- wiek przedszkolny (od 3 do 7 lat),
- młodszy wiek szkolny (od 7 do 11-12 lat),
- wiek dorastania (od 11-12 do 17-18 lat)."[121]

---

[117] K. Komosińska: *Biomedyczne podstawy rozwoju i wychowania*. Olsztyn: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, 1995, s. 13.

[118] E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska: *Zajęcia dydaktyczno-wyrównawcze dla dzieci, które rozpoczną naukę w szkole*. Warszawa: Wydawnictwo Edukacja Polska, 2009, s. 24.

[119] J. Hawlicki*: Rozwijanie uzdolnień matematycznych: rozwiązywanie arytmetycznych zadań tekstowych przez uczniów klas I-IV*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1971, s. 36.

[120] M. Przetacznik-Gierowska, G. Makiełło-Jarża: *Psychologia rozwojowa i wychowawcza wieku dziecięcego*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1985, s. 23.

[121] M. Żebrowska: *Teorie rozwoju psychicznego*. W: *Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży*. Red. M. Żebrowska. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1973.

Kryteriami tego podziału były sposób i poziom poznawania i uświadamiania sobie przez dziecko otaczającej rzeczywistości, dominujący rodzaj działalność dziecka oraz specyficzne formy i metody oddziaływania wychowawczego. [122] Interesującym z punktu widzenia problematyki tejże dysertacji okresem rozwoju jest zatem okres młodszego wieku szkolnego. Jest to czas owocujący ogromnymi zmianami w życiu dziecka. Dotyczą one jego rozwoju psychofizycznego, jak również form aktywności oraz przyjmowanych ról społecznych. W okresie młodszego wieku szkolnego, nazywanym także okresem późnego dzieciństwa wyróżnia się cztery podstawowe rodzaje zmian. Po pierwsze przekształceniu ulega dotychczasowa aktywność dziecka, z zabawy w system działań sterowanych przez obowiązki, stałe zadania i normy społeczne. Po drugie następuje dalszy rozwój oraz integracja funkcji psychicznych. Kolejna zmiana dotyczy środowiska, w którym przebywa dziecko. Przedszkole zostaje zastąpione szkołą, która jest zarówno instytucją wychowawczą, ale także miejscem spotkań z rówieśnikami. Ostatnią zmianą jest przyjęcie przez dziecko nowej roli społecznej, jaką jest rola ucznia. [123] W literaturze rozwój człowieka rozpatrywany jest najczęściej w kontekście sfery poznawczej, emocjonalnej, psychicznej, fizycznej, psychomotorycznej, psychospołecznej oraz aksjologicznej. Ponadto można wyróżnić między innymi rozwój języka, mowy, czy rozwój psychoseksualny.

Co istotne, w psychologii rozwojowej coraz częściej zwraca się uwagę nie tylko na „rozwój" jednostki ale także na „rozwojową zmianę", która stale dokonuje się w czasie. We współczesnych badaniach nad rozwojem człowieka mocno akcentuje się podejście kontekstualne. Główne założenie kontekstualizmu opiera się na twierdzeniu, iż człowiek jest dynamicznym układem, którego zmiany są rozpatrywane w kontekście innych, stale zachodzących zmian, mających miejsce w świecie na fizycznym, biologicznym, społecznym oraz psychicznym poziomie jego organizacji. Rozwój natomiast jest tu rozumiany jako efekt ciągłych interakcji zachodzących pomiędzy czynnikami zewnętrznymi i wewnętrznymi, zachodzącymi w trakcie całego życia. [124]

W dalszej części pracy opisano wybrane elementy rozwoju ucznia w młodszym wieku szkolnym, które są istotne w procesie nauczania – uczenia się matematyki. Oczywistym jest, iż każdy aspekt rozwoju człowieka ma znaczenie w procesie jego

[122] J. Strelau, A. Jurkowski, Z. Putkiewicz: *Podstawy psychologii dla nauczycieli*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1976, s. 210.
[123] R. Stefańska-Klar: *Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny*. W: *Psychologia rozwoju człowieka*. Tom 2. Red. B. Harwas-Napierała, J. Trempała. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003, s. 130.
[124] J. Trempała: *Dwa przełomy w badaniach nad rozwojem psychicznym człowieka*. „*Przegląd psychologiczny*" 2001, Tom 44, Nr 1.

uczenia się. Zgodnie z koncepcją zaproponowaną przez E. Gruszczyk-Kolczyńską[125] w uczeniu się matematyki doniosłą rolę odgrywa sfera poznawcza oraz emocjonalna dziecka. W związku z powyższym to na tych dwóch sferach rozwoju skupiono się w niniejszym opracowaniu.

2.1.1. Wybrane elementy rozwoju poznawczego

Rozwój poznawczy jest procesem zmian rozwojowych w zakresie funkcjonowania procesów poznawczych. Procesy poznawcze (*ang. cognition*) są rozumiane jako procesy odpowiedzialne za przetwarzanie i wymianę informacji pomiędzy jednostką a jej otoczeniem.[126] Można powiedzieć, że stanowią one zbiór wszystkich czynności psychicznych, które człowiek wykorzystuje do prawidłowego orientowania się w otoczeniu. W sposób bezpośredni wpływają one na zachowanie jednostki. Poznawczy rozwój dziecka obejmuje procesy kognitywne, wśród których za najistotniejsze w procesie nabywania wiedzy uznać można spostrzeganie, pamięć, myślenie oraz język.[127] Do kluczowych procesów związanych z przyswajaniem przez jednostkę wiedzy zalicza się także uwagę. Wszystkie wymienione elementy rozwoju wpływają na proces uczenia się dziecka, w tym na proces uczenia się matematyki.

Istotnym pojęciem dla podjętych tu rozważań jest myślenie. W literaturze przedmiotu spotkać można wiele jego definicji. W dużej mierze definicja ta zależy od perspektywy danej dziedziny naukowej, w zakresie której myślenie jest rozważane. Należy pamiętać, iż myślenie jest zależne od poziomu rozwoju człowieka. Inaczej myśli dziecko, a inaczej osoba dorosła.

Myślenie (łac. *mens*) w teorii poznania oznacza świadome czynności intelektualne, obejmujące tworzenie pojęć, sądzenie oraz rozumowanie.[128] W psychologii myślenie może być pojmowane w dwojaki sposób. Po pierwsze jako nierozerwalnie związane z całością procesów psychicznych „specyficzne przetwarzanie informacji otrzymanych poprzez spostrzeżenia i przechowywanych w pamięci”. Po drugie jako

---

[125] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1997.
[126] L. Bakiera, Ż. Stelter: *Leksykon psychologii rozwoju człowieka*. Tom 2. Warszawa: Difin SA, 2011, s. 94.
[127] K. Wiejak: *Prawidłowości rozwoju w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym*. W: *Psychopedagogiczne aspekty rozwoju i edukacji małego dziecka*. Red. T. Parczewska. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, 2010, s. 15.
[128] A. Podsiad: *Słownik terminów i pojęć…,* s. 542.

„zinternalizowane czynności ukierunkowane na rozwiązywanie jakiegoś problemu", które mogą przybierać formę mylenia dyskursywnego, czyli opartego na rozumowaniu oraz myślenia intuicyjnego, opartego na samych aktach rozumienia. [129] W postaci najogólniejszej myślenie można definiować jako „czynność poznawania ogólnych i istotnych cech rzeczy i zjawisk oraz stosunków między różnymi elementami rzeczywistości."[130] Inna definicja określa myślenie jako proces psychiczny, polegający na przepływie przez świadomość określonych treści, takich jak obrazy, sądy i pojęcia, przy czym dobór tych treści oraz czynności myślowe dokonywane w tym procesie zależą od celów (zadań), jakie każdorazowo myśleniu się stawia.[131] Myślenie może przebiegać w toku spostrzegania i bezpośredniego odzwierciedlania przedmiotów oraz w trakcie manipulowania nimi. W takim przypadku jest to myślenie sensoryczno –motoryczne. W przypadku, gdy przebiega ono w oderwaniu od przedmiotów, bez spostrzegania ich oraz bez manipulowania nimi, jest myśleniem wyobrażeniowo – pojęciowym.[132]

Koncepcją rozwoju poznawczego (rozwoju myślenia), która została przyjęta na potrzeby niniejszej pracy jest koncepcja autorstwa szwajcarskiego psychologa Jeana Piageta. Rozwój umysłowy jest w niej rozumiany jako „postępujące zdobywanie równowagi, stałe przechodzenie od słabej do wyższej równowagi." [133] W związku z powyższym niedojrzały, „słabszy" umysł dziecka w trakcie rozwoju zmierza w kierunku osiągnięcia ostatecznej równowagi, charakteryzującej umysł osoby dorosłej.

W koncepcji J. Piageta inteligencja dziecka ma charakter dynamiczny, ulega ciągłym zmianom i przekształceniom pod wpływem jego działań w otoczeniu społecznym. [134] Tak rozumiana inteligencja nie służy jedynie biernemu gromadzeniu informacji czy umiejętności. Wiedza dziecka tworzy się w działaniu i podlega stałej aktualizacji. Rozwój procesów poznawczych w ujęciu J. Piaget`a ma charakter stadialny. Autor wyodrębnił cztery główne stadia rozwoju dziecka, nazywane także okresami rozwojowymi. Pierwszym z ich jest okres sensoryczno-motoryczny. Trwa

[129] Ibidem, s. 542.
[130] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 249.
[131] W. Okoń: *Problem samodzielności myślenia i działania*. W: B. Suchodolski (red.): *Studia pedagogiczne. Kształcenie samodzielności myślenia w procesie nauczania*. Tom IV. Wrocław: Zakład Narodowy im. Ossolińskich Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, 1957, s 11.
[132] W. Szewczuk: *Podstawy psychologii*. Warszawa: Wyższa Szkoła Społeczno-Ekonomiczna Fundacja Innowacja, 2000, s. 140.
[133] J. Piaget: *Studia z psychologii dziecka*. Przeł. T. Kołakowska. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1966, s. 8.
[134] R. Vasta, M. M. Haith, S. A. Miller: *Psychologia dziecka*. Przeł. M. Babiuch. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1995, s. 47-49.

on od momentu narodzin dziecka do mniej więcej drugiego roku życia. Kolejne stadium to okres przedoperacyjny, charakteryzujący dziecko w wieku przedszkolnym, gdyż obejmuje lata od 2 do 6 roku życia. Stadium trzecie to okres operacji konkretnych, trwający od ok. 6 do około 11 roku życia dziecka. Ostatnim stadium jest okres operacji formalnych, zaczynający się mniej więcej w 11 roku życia i trwający do dorosłości.[135] Z uwagi na indywidualny charakter rozwoju człowieka, zaproponowane powyżej ramy czasowe, określające czas trwania poszczególnych okresów rozwojowych, mają charakter przybliżony. Może zdarzyć się tak, iż dzieci w tym samym roku życia będą znajdowały się na innym etapie rozwoju myślenia. Jest to zjawisko naturalne i zgodne z prawidłowościami rozwojowymi.

Myślenie człowieka na poszczególnych etapach rozwoju charakteryzuje się innymi cechami jakościowymi. W okresie sensoryczno-motorycznym ma ono charakter sytuacyjny i jest bezpośrednio powiązane z wrażeniami i spostrzeżeniami. [136] Myślenie przedoperacyjne charakteryzuje się symbolicznym manipulowaniem przez dziecko przedmiotami, co jest uznawane za przejaw jego dalszego rozwoju. W stadium operacji konkretnych w myśleniu dziecka przejawiają się określone reguły i strategie, w których najistotniejszą cechą jest odwracalność, np.: A jest mniejsze od B, wiec B jest większe od A.[137] Myślenie formalne oznacza natomiast, iż dziecko „rozszerza zdolność rozumowania na poziomie operacji konkretnych na przedmioty i sytuacje, których nie widziało, nie doświadczało osobiście i których nie może osobiście zobaczyć ani nimi manipulować."[138] Przejście z jednego poziomu rozumowania na kolejny jest możliwie wówczas, gdy myślenie dziecka w pełni osiągnęło etap wcześniejszy.

Niniejsza dysertacja dotyczy uczniów pierwszego etapu edukacyjnego. Rozwój poznawczy uczniów w wieku wczesnoszkolnym w większości charakteryzuje poziom operacji konkretnych. Główne zmiany dotyczące przejścia dziecka z etapu myślenia przedoperacyjnego do etapu operacji konkretnych polegają przede wszystkim na pojawieniu się nowych czynności umysłowych. Dzięki nim możliwie staje

[135] J. Piaget: *Narodziny inteligencji dziecka*. Przeł. M. Przetacznikowa. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1966.
[136] B. Bilewicz-Kuźnia: *Kształtowanie pojęć matematycznych na etapie wczesnej edukacji*. W: *Psychopedagogiczne aspekty rozwoju i edukacji małego dziecka*. Red. T. Parczewska. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, 2010, s. 129.
[137] K. M. Czarnecki: *Psychologia zmian rozwojowych człowieka*. Sosnowiec: Oficyna Wydawnicza „Humantas", 2015, s. 109.
[138] H. Bee: *Psychologia rozwoju człowieka*. Przeł. A. Wojciechowski. Poznań: Wydawnictwo Zysk i S-ka, 2004, s. 344.

się rozumienie wzajemnych relacji zachodzących między całością i częściami, a także zdolność do klasyfikowania oraz stopniowe wytworzenie pojęcia stałości liczby, stałości długości, ciężaru, masy, objętości, powierzchni, czasu i prędkości. Ponadto warunkują one zdolność do dokonywania decentracji oraz do posługiwania się kategoriami społecznymi jako pojęciami.[139] Te cechy myślenia pozwalają uczniom na stopniowe wdrażanie się do rozumienia coraz bardziej abstrakcyjnych pojęć.

Pierwszy etap edukacyjny przypada na czas, w którym w umysłach uczniów dojrzewają operacje na poziomie konkretnym. Myślenie operacyjne na poziomie konkretnym wiąże się ściśle z rzeczywistością.[140] Bywa, iż znaczna część uczniów w momencie rozpoczęcia nauki w warunkach szkolnych funkcjonuje jeszcze na etapie myślenia przedoperacyjnego, bądź też na etapie przejściowym między okresem przedoperacyjnym a myśleniem konkretnym. Sytuacja taka może powodować trudności w zakresie nabywania matematycznych kompetencji. Cechy takie jak decentracja, czy rozumienie pojęcia stałości są bowiem niezbędne w procesie uczenia się matematyki. Dzięki decentracji dziecko jest w stanie między innymi porównywać liczebność obiektów w oderwaniu od ich cech jakościowych, takich jak wielkość czy kształt. Dzięki umiejętności klasyfikowania jest ono zdolne do segregowania przedmiotów ze względu na coraz większą liczbę ich klas lub cech wspólnych. Sprawność w tym zakresie jest z kolei niezbędna do opanowania umiejętności wykonywania podstawowych operacji na zbiorach.

Istotną z punktu widzenia uczenia się matematyki teorią dotycząca rozwoju myślenia stworzył amerykański psycholog – Jarome Seymour Bruner. W koncepcji tej wyróżnione zostały trzy główne sposoby wewnętrznego reprezentowania świata – reprezentacja enaktywna, reprezentacja ikoniczna oraz reprezentacja symboliczna.[141] Myślenie w sposobie enaktywnym opiera się na czynnościach motorycznych, bez udziału wyobraźni ani słów. Reprezentacja ikoniczna pojawia się w momencie, kiedy dziecko staje się zdolne do reprezentowania otoczenia poprzez obrazy umysłowe. Obrazy te są związane ze zmysłami, mogą być wzrokowe, słuchowe, węchowe czy dotykowe. W przypadku reprezentacji symbolicznej dziecko staje się zdolne do reprezentowania

[139] R. Stefańska-Klar: *Późne dzieciństwo…,* s. 156.
[140] I. Gomółka-Walaszek: *Operacyjność myślenia konkretnego i jej uwarunkowania (w aspekcie osiągnięć z matematyki w klasie I).* Częstochowa: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, 1996, s. 11.
[141] J. S. Bruner: *Procesy reprezentacji w dzieciństwie*. W: *Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznawania*. Red. J. S. Bruner.. Przeł. B. Mroziak. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1978, s. 526-543.

świata za pomocą języka i innych umownych symboli.[142] Zaprezentowana teoria jest ściśle powiązana z kształtowaniem w umysłach dzieci pojęć związanych z matematyką. Reprezentacje sensoryczno-motoryczne są przez ucznia wykorzystywane w przypadku dokonywania manipulacji na konkretach. Czynności takie jak ustalanie liczebności zbiorów za pomocą klocków czy posługiwanie się liczmanami podczas wykonywania działań matematycznych mogą być przykładem stosowania przez ucznia tego poziomu reprezentacji. Reprezentacja graficzna występuje w momencie, gdy obiekty konkretne są zastępowane przez ich graficzne odpowiedniki. Przykładem może być tu wykorzystywanie na zajęciach grafów, strzałek, tabel lub innych form przedstawiania operacji matematycznych. Zilustrowanie wykonywanych działań za pomocą form graficznych ułatwia uczniom ich zrozumienie. Posługiwanie się reprezentacją symboliczną jest niezbędne podczas uczenia się matematyki, gdyż jej język ma charakter umowny i symboliczny, już na wczesnym etapie jej nauczania-uczenia się. Dziecko musi być zdolne do prawidłowego kodowania (zapisywania) oraz dekodowania (odczytywania) za pomocą cyfr i znaków poszczególnych operacji matematycznych. Na przykład podczas zapisywania działania „cztery dodać dwa równa się...” uczeń musi zakodować za pomocą symboli matematycznych wszystkie informacje, jakie zostały mu zaprezentowane w sposób werbalny. Posłuży się do tego umownymi znakami – wykorzysta cyfry 4 i 2, które symbolizują pewne wielkości, a także oznaczenie matematycznej operacji dodawania (+) oraz znak równości (=). Innymi przykładami wykorzystania reprezentacji symbolicznej jest język mówiony zapisywany za pomocą liter oraz dźwięki muzyki zapisywane za pomocą nut.

Rozwój poznawczy wedle koncepcji J. S. Brunera polega na „opanowywaniu kolejno każdej z trzech form reprezentacji wraz z częściowym przekładem każdej z nich na pozostałe.”[143] Co istotne, dorosły człowiek jest w stanie, w zależności od zaistniałych okoliczności, posługiwać się wszystkimi wymienionymi sposobami reprezentacji świata. Różne działania ucznia związane z uczeniem się matematyki będą także wymagały uruchamiania w odpowiednich sytuacjach wszystkich trzech sposobów reprezentacji. By mógł on w sposób efektywny uczyć się matematyki powinien zatem zarówno wybierać strategie w sposób adekwatny do zaistniałej sytuacji, jak i sprawnie z nich korzystać.

[142] A. Birch: *Psychologia rozwojowa w zarysie*. Przeł. J. Łuczyński, M. Olejnik. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2005, s. 90-91.
[143] E. Filipiak: *Z Wygotskim i Brunerem w tle: słownik pojęć kluczowych*. Bydgoszcz: Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego, 2011, s. 81.

W nauczaniu, w tym także w nauczaniu matematyki niebagatelne znaczenie odgrywa koncepcja strefy najbliższego rozwoju stworzona przez Lwa S. Wygotskiego. Pojęcie to można zdefiniować jako „strefę określającą różnicę między poziomem rozwiązywania zadań dostępnych pod kierunkiem i przy pomocy dorosłych a poziomem rozwiązywania zadań dostępnych w samodzielnym działaniu.”[144] W koncepcji tej uwaga zostaje zwrócona nie tyle na etap rozwoju, na jakim aktualnie znajduje się dziecko, co na etap, który w nim aktualnie dojrzewa. Istotne jest zatem wykraczanie poza aktualnie prezentowany przez dziecko poziom rozwoju, gdyż liczy się jego gotowość do uczenia się reaktywnego, umiejętność korzystania ze wskazówek i instrukcji udzielanych przez inne osoby. [145] Strefa najbliższego rozwoju wyznacza pewną granicę możliwości poznawczych dziecka, które są aktualnie w jego zasięgu. By stymulować rozwój dziecka w sposób właściwy należy stawiać przed nim zadania uwzględniające dojrzewające w nim możliwości. Oczywiście nie mogą być to zadania zbyt trudne, gdyż te nie przyniosą oczekiwanego rezultatu. Jednocześnie nie mogą być zbyt łatwe, ponieważ nie zaowocują rozwojem.

W młodszym wieku szkolnym następuje zwiększenie sprawności systemu poznawczego. Prócz myślenia, zmianom jakościowym ulegają także takie aspekty procesu przetwarzania informacji jak uwaga i pamięć. Są one niezwykle istotne w kontekście nabywania wiedzy i umiejętności z zakresu edukacji matematycznej.

Uwaga (*ang. attention*) to „proces ukierunkowania czynności poznawczych na otaczające człowieka rzeczy, procesy, zjawiska i wydarzenia, wewnętrzne funkcje jego organizmu czy stany psychiczne.” [146] Rozwój uwagi polega na tym, iż dziecko jest w stanie ją skupić tak długo, jak wymagają tego warunki wykonywanego przez niego zadania. Podczas uczenia się w ogromną rolę pełni umiejętność koncentracji uwagi. Koncentracja uwagi oznacza, iż uczeń jest w stanie skupić się na dowolnym przedmiocie tak intensywnie, że tylko względnie silne bodźce będą w stanie go od tego przedmiotu oderwać.[147] Uwaga pełni cztery podstawowe funkcje. Są nimi selektywność, czujność, przeszukiwanie oraz kontrola. Selektywność rozumiana jest jako zdolność do wyboru jednego bodźca kosztem innych. W przypadku, gdy do człowieka dociera jednocześnie wiele bodźców, za sprawą selektywności uwagi jest on w stanie skupić się na tym, który

---

[144] L. S. Wygotski: *Problem nauczania i rozwoju umysłowego w wieku szkolnym*. W: L.S. Wygotski,: *Wybrane prace psychologiczne*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1971, s. 531-547.
[145] E. Filipiak: *Z Wygotskim i Brunerem…*, s. 16.
[146] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny*…, s. 427.
[147] Ibidem, s. 427.

aktualnie jest mu potrzebny. Czujność to zdolność do oczekiwania na pojawienie się określonego bodźca (sygnału), przy jednoczesnym ignorowaniu pozostałych informacji (szumu). Przeszukiwanie uwagi polega na systematycznym badaniu pola percepcyjnego w celu wyodrębnienia obiektów spełniających założone wcześniej kryteria. Efektywność przeszukiwania pamięci zależy od występowania dystraktorów. Ostatnia funkcja uwagi to kontrola, będąca umiejętnością podejmowania wielu czynności jednocześnie. [148] Sprawnie funkcjonująca uwaga w dużym stopniu warunkuje osiągnięcia szkolne uczniów. W młodszym wieku szkolnym uwaga ucznia w coraz większym stopniu staje się dowolna, selektywna i planowa. Ponadto zwiększają się jej możliwości adaptacyjne.[149] Dzięki wymienionym cechom uwagi uczniowie są w stanie w większym stopniu przyswajać wiedzę.

Pamięć (*ang. memory*) jest to „zdolność zapamiętywania, przechowywania i odtwarzania treści doznanych wcześniej wrażeń, spostrzeżeń, emocji, myśli czy ogólnie informacji.” [150] W psychologii jest uznawana za „jeden z podstawowych procesów psychicznych człowieka, któremu zawdzięcza możliwość regulacji aktualnego zachowania pod wpływem dawnych doświadczeń własnych.”[151] Sprawnie funkcjonująca pamięć stanowi podstawę szkolnego uczenia się. Zdolność do celowego zapamiętywania pojawia się w rozwoju na początku wieku szkolnego.[152] Wraz z upływającym czasem uczniowie wdrażają się do coraz lepszego zapamiętywania poszczególnych elementów związanych z wypełnianiem przez nich roli ucznia. Cechą charakteryzującą rozwój pamięci u uczniów w młodszym wieku szkolnym jest to, iż następuje stopniowe zwiększanie jej pojemności, przy jednoczesnym wzroście objętości materiału koniecznego do zapamiętania. Uczniowie w tym wieku coraz częściej stosują rozmaite strategie pamięciowe, spośród których podstawowymi są powtarzanie, organizowanie oraz zdolność do posługiwania się prostszymi formami elaboracji.[153] Pamięć pełni istotną rolę w procesie uczenia się. To dzięki niej uczeń jest w stanie zapamiętać poszczególne wiadomości, informacje, czy strategie działania oraz skorzystać z nich w przyszłości.

[148] L. Bakiera, Ż. Stelter: *Leksykon psychologii rozwoju…,* s. 235.
[149] A. Kołodziejczyk: *Późne dzieciństwo – młodszy wiek szkolny*. W: *Psychologia rozwoju człowieka*. Red. J. Trempała. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011, s. 238.
[150] L. Bakiera, Ż. Stelter: *Leksykon psychologii rozwoju…,* s. 43.
[151] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 281.
[152] S. Meadows: *Rozwój poznawczy*. W: *Psychologia rozwojowa*. Red. P. E. Bryant, A. M. Colman. Przeł. A. Bezwińska-Walerjan. Poznań: Wydawnictwo Zysk i S-ka, 1997, . s. 49.
[153] A. Kołodziejczyk: *Późne dzieciństwo – młodszy wiek szkolny*. W: *Psychologia rozwoju człowieka*. Red. J. Trempała. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011, s. 238-239.

Korzystanie z zapamiętanych wcześniej faktów i informacji jest możliwe po ich wcześniejszym przypomnieniu.

Nie ulega wątpliwości, iż zarówno uwaga, jak i pamięć są niezbędnymi elementami, które w znacznym stopniu warunkują proces uczenia się matematyki. Obok rozwoju poznawczego istotną rolę podczas nabywania kompetencji matematycznych odgrywają także emocje. W związku z powyższym, w kolejnym podrozdziale przedstawiono wybrane elementy rozwoju emocjonalnego, istotne dla podjętych w rozprawie rozważań.

2.1.2. Wybrane elementy rozwoju emocjonalnego

W uczeniu się matematyki sfera emocjonalna pełni bardzo ważną rolę. G. Polya podkreślał, iż intelekt nie jest jedynym czynnikiem warunkującym proces rozwiązywania zadań. Istotne w tym procesie są bowiem również emocje.[154] Stany emocjonalne wiążą się ponadto z procesami poznawczymi.

Emocja (fr. *émotion*) jest rozumiana jako silne przeżycie uczuciowe, natomiast osoba emocjonalna określana jest jako skłonna do wzruszeń oraz silnych przeżyć psychicznych.[155] W życiu człowieka emocje odgrywają istotną rolę. Wśród wielu ich zadań można wyróżnić między innymi ułatwianie dostrzegania ważnych sygnałów z otoczenia wraz z kierowaniem na nie uwagi, wpływanie na motywację działaniową, dostarczanie informacji na temat stanu, w jakim znajduje się człowiek lub inni ludzie, czy wpływanie na proces podejmowania pewnych zachowań.[156] Ponadto emocje wpływają na proces zapamiętywania oraz uczenia się. Wpływ emocji na zdolność jednostki do działania może być pozytywny lub negatywny. Zgodnie z powyższym emocje dzielą się na steniczne – wzmacniające gotowość człowieka do działania oraz emocje asteniczne, które zmniejszają jego zdolność w tym zakresie. Emocje asteniczne dezorganizują lub całkowicie uniemożliwiają podjęcie działania.[157] Emocje

[154] G. Polya: *Jak to rozwiązać?* Przeł. L. Kubik. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2009, s. 209.
[155] E. Sobol: *Słownik wyrazów obcych…*, s. 294-295.
[156] A. Kowalewska: *Wybrane układy i funkcje organizmu człowieka ważne dla procesów uczenia się*. W: *Biomedyczne podstawy kształcenia i wychowania*. Red. B. Woynarowska, A. Kowalewska, Z. Izdebski, K. Komosińska. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2010, s. 175.
[157] Z. Putkiewicz: *Podstawowe zagadnienia psychologii*. W: *Podstawy psychologii, pedagogiki i socjologii*. Red. Z. Putkiewicz, B. Dobrowolska, T. Kokołowicz. Warszawa: Państwowy Zakład Wydawnictw Lekarskich, 1987, s. 103.

przyjemne mają charakter pozytywny, natomiast emocje przykre mają charakter negatywny.

Rozwój emocjonalny dziecka jest związany z jego osiągnięciami w rozwoju poznawczym i językowym. Istotnym elementem jest tu również obraz własnej osoby. Im starsze dziecko tym lepiej rozumie ono własne emocje i emocje wyrażane przez inne osoby. Dzięki temu stopniowo nabywa umiejętności regulowania ekspresji własnych emocji.[158] Aby rozwój emocjonalny mógł przebiegać w sposób prawidłowy konieczna jest równowaga pomiędzy emocjami pozytywnymi i negatywnymi. [159] Z uwagi na to, iż układ nerwowy dziecka nie jest w pełni dojrzały, emocje dzieci różnią się od emocji ludzi dorosłych. Można wyróżnić kilka podstawowych cech charakteryzujących emocje dziecka. U dzieci w wieku przedszkolnym są one labilne i krótkotrwałe. Dzieci w krótkim czasie i z dużą łatwością przechodzą z jednego nastroju emocjonalnego na drugi. Często nastroje te są skrajnie odmienne. Emocje dziecka są przeżywane przez nie w sposób bardzo ekspresyjny, z dużym udziałem mimiki i pantomimiki. Pod koniec okresu przedszkolnego dzieci stopniowo nabywają dojrzałości emocjonalnej. W tym wieku następuje rozwój uczuć wyższych, do których zalicza się uczucia intelektualne, społeczne, moralne i estetyczne.[160] Osiągnięcie przez człowieka pełnej dojrzałości emocjonalnej jest procesem długotrwałym. Zdarza się także, iż nie każdy człowiek jest w stanie osiągnąć pełną dojrzałość w tym zakresie. Wczesne etapy rozwoju emocjonalnego dziecka warunkują dalsze prawidłowe kształtowanie się uczuć. Należy pamiętać, iż reakcje emocjonalne są przez człowieka nabywane w toku indywidualnych doświadczeń, nie mają one bowiem charakteru wrodzonego.

W procesie uczenia się matematyki emocje spełniają kluczową rolę. Odpowiedni poziom dojrzałości emocjonalnej jest uznawany za niezbędny element dojrzałości do uczenia się tego przedmiotu. E. Gruszczyk-Kolczyńska uważa, iż dojrzałość emocjonalna w kontekście uczenia się matematyki wyraża się po pierwsze w pozytywnym nastawieniu ucznia do samodzielnego rozwiązywania zadań, a po drugie w odporności emocjonalnej na sytuacje trudne intelektualnie.[161] Uczenie się matematyki i towarzyszące mu rozwiązywanie zadań są w literaturze określane jako tak zwane sytuacje trudne. W sytuacjach tych „wewnętrzna równowaga sytuacji normalnej zostaje

---

[158] M. Kielar-Turska: *Średnie dzieciństwo. Wiek przedszkolny.* W: *Psychologia rozwoju człowieka.* T. 2. B. Harwas-Napierała, J. Trempała. Warszawa 2004, s. 112.
[159] M. Przetacznik-Gierowska, G. Makiełło-Jarża: *Psychologia rozwojowa i wychowawcza…,* s. 174.
[160] Ibidem, s. 172-175.
[161] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Dzieci ze specyficznymi…,* s. 18.

zakłócona, tak, że normalny przebieg aktywności podstawowej nie będzie możliwy i prawdopodobieństwo realizacji zadania na normalnym poziomie stanie się mniejsze.”[162] Napotykanie przez uczniów trudności podczas rozwiązywania zadań jest zjawiskiem naturalnym i występującym na każdym poziomie kształcenia. Od tego, w jaki sposób uczeń poradzi sobie w sytuacji napotykanego problemu zależy, czy będzie on w stanie rozwiązać zadanie.

O sposobie funkcjonowania ucznia w trakcie pokonywania trudności związanej z rozwiązaniem matematycznego zadania decydują czynniki takie jak stan jego motywacji, poziom samooceny, dojrzałość emocjonalna, system nawyków zachowania się w sytuacjach trudnych oraz poziom wiadomości i umiejętności matematycznych potrzebnych do rozwiązania zadania. [163] Pokonanie trudności zawartej w zadaniu ma wartość kształcącą. Ponadto podejmowanie przez uczniów trudu wykonania zadania jest opłacalne samo w sobie. Każdy uzyskany sukces umożliwia bowiem coraz łatwiejsze osiągnięcie kolejnych sukcesów. [164] Odpowiedni poziom dojrzałości emocjonalnej umożliwi uczniowi efektywne działanie i pozytywne zaradzenie przykrym napięciom powstałym w związku z napotkaną trudnością. Uczniowie, w przypadku których odporność emocjonalna na sytuacje trudne jest niewystarczająca wykazują różnego rodzaju zachowania obronne, włącznie z tendencją do unikania trudności. W przypadku rozwiązywania zadań oraz w ogólne w przypadku uczenia się matematyki, uczniowie ci będą unikać podejmowania się tego zadania. Brak umiejętności radzenia sobie z negatywnymi emocjami wiążącymi się z koniecznością uczenia się matematyki powoduje narastanie frustracji i przeżywanie licznych porażek. Uczniowie, którzy nie osiągnęli odpowiedniego poziomu dojrzałości emocjonalnej w opisywanym zakresie bardzo często wykazują trudności w uczeniu się matematyki.

Kolejny podrozdział dysertacji zawiera wybrane podstawy teoretyczne edukacji matematycznej, realizowanej na pierwszym etapie edukacyjnym.

---

[162] Z. Gajdzica: *Sytuacje trudne w opinii nauczycieli klas integracyjnych*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 2011, s. 29.
[163] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Dzieci ze specyficznymi…,* s. 70.
[164] B. de Finetti: *Sztuka widzenia w matematyce*. Przeł. J. Panz. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1983, s. 15.

2.2. Podstawy teoretyczne edukacji matematycznej

Matematyka stanowi narzędzie, dzięki któremu jesteśmy w stanie poznawać świat oraz wnikać w strukturę rzeczywistości. [165] Uczenie się matematyki jest jednym z obowiązkowych elementów kształcenia ogólnego, realizowanego w Polsce na wszystkich obligatoryjnych etapach edukacji. Uczenie się jest nieustającym procesem. To własność ludzkiego życia, która wyraża się w przyjmowaniu i przetwarzaniu informacji, które następnie są utrwalane i magazynowane w umyśle lub w jego wytworach po to, by w dalszej kolejności zostać wykorzystane do wywoływania strukturalnych i funkcjonalnych zmian w życiu jednostek, grup społecznych i społeczeństw.[166] Jest ono także procesem, w toku którego „na podstawie doświadczenia, poznania i ćwiczenia powstają nowe formy zachowania się i działania lub ulegają zmianom formy wcześniej nabyte.” [167] W. Okoń zwraca uwagę na to, iż dla celów pedagogicznych w rozumieniu pojęcia uczenia się istotne są wszystkie jego elementy. Pierwszym z nich są rodzaje uczenia się, w tym uczenie się wiadomości, nabywanie umiejętności, nawyków i przyzwyczajeń, rozwijanie zdolności i przekonań. Drugim elementem są sposoby uczenia się, czyli uczenie się przez próby i błędy, poprzez naśladownictwo, ale także poprzez działanie i odkrywanie. Trzecim elementem są jego warunki, takie jak wiek osoby uczącej się, jej motywy, bodźce oraz zdolności. Ostatnim istotnym elementem są rezultaty uczenia się czyli transfer, przyrost wiedzy i sprawności, a także rozwój uzdolnień i postaw. [168] Uczenie się rozumieć można także jako zorganizowaną aktywność, która obejmuje przejmowanie i asymilowanie informacji otrzymywanych z różnych źródeł, bezpośrednie wykorzystywanie tych informacji dla rozwiązywania zadań standardowych oraz samodzielnego zdobywania informacji, a także tworzenie subiektywnie nowych dla osoby uczącej się elementów wiedzy. [169] Uczenie się jest procesem, w którym dzięki własnej aktywności układ nerwowy ulega zmianom. Opiera się ono na doświadczeniu i prowadzi do trwałej zmiany w zachowaniu

[165] W. Szewczuk: *Trudności myślenia i rozwijanie zdolności uczniów*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1983, s. 14.
[166] W. Kojs: *Prakseopedagogiczny wgląd w wybrane zagadnienia edukacji, gospodarki i globalizacji*. W: *Edukacja i gospodarka w kontekście procesów globalizacji*. Red. W. Kojs, E. Rostańska, K. Wójcik. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 2014, s. 20.
[167] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 416.
[168] Ibidem, s. 416.
[169] Z. Krygowska: *Zarys dydaktyki matematyki*. Cz. 2. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1977, s. 4.

lub w procesach umysłowych.[170] Wszystkie te elementy mają znaczenie w procesie uczenia się matematyki.

Wiadomości i umiejętności są nabywane w procesie nauczania – uczenia się. Zarówno nauczanie, jak i uczenie się ujmowane na gruncie pedagogiki oznaczają rozwijanie procesów poznawczych i całej osobowości uczącego się.[171] Rozważając tematykę nauczania – uczenia się matematyki warto mieć na uwadze ogólne prawidłowości efektywnego i sprawnego procesu uczenia się. Są nimi:

- „proces uczenia się (…) musi zachodzić w samym uczniu,
- uczenie się powinno ułatwiać kierowanie rozwojem własnej indywidualności,
- uczenie się jest procesem indywidualnym, gdyż każdy uczy się inaczej, we właściwy dla siebie sposób,
- uczący się powinien znać zasady, metody i techniki warunkujące skuteczny przebieg uczenia się,
- drogą do opanowania umiejętności i ukształtowania nawyku uczenia się jest udział w różnorodnych formach aktywności, za sprawą których uczniowie nabywają użytecznych doświadczeń,
- uczenie się wymaga od jednostki dużej aktywności, wytrwałości, samodzielności i pewności siebie,
- uczniowie uczą się najlepiej, gdy pobudza się ich chęć do uczenia się oraz gdy są świadomi celu swojej pracy,
- proces uczenia się wymaga należytego planowania, odpowiedniej organizacji i kontroli wykonania,
- uczenie się powinno być radosną, satysfakcjonującą działalnością, która pozwoli dziecku zaznać smak sukcesu.”[172]

Nie sposób odmówić słuszności wymienionym powyżej prawidłowościom uczenia się. Każda z nich ma bezpośrednie przełożenie na proces uczenia się matematyki. Ponadto proces uczenia się może być realizowany za sprawą uczenia się pamięciowego, uczenia się przez naśladownictwo, poprzez uczenie się w trakcie działania i poprzez próby i błędy, a także za sprawą uczenia się przez rozwiązywanie problemów

[170] C. Grzywniak: *Dojrzałość neuropsychologiczna do szkolnego uczenia się dzieci sześcio- i siedmioletnich*. Kraków: Wydawnictwo „Scriptum”, 2013, s. 13.
[171] Ł. Dawid: *Uczenie się jako forma działalności ucznia*. W: *Dziecko w świecie szkoły. Szkice o wychowaniu*. Red. B. Dymara. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 2010, s. 51.
[172] Ibidem, s. 51-52.

i przez zrozumienie.[173] Ponownie można stwierdzić, iż wymienione wyżej sposoby przyswajania wiedzy mają duże znaczenie w procesie uczenia się matematyki.

Przedmiotem nauczania matematyki są pojęcia określające wielorakie stosunki ilościowe i przestrzenne wyrażone za pomocą symboli matematycznych. Operowanie symbolami i pojęciami matematycznymi ze zrozumieniem wymaga umiejętności abstrahowania i uogólniania.[174] Najistotniejszym elementem nauczania podstawowych pojęć jest natomiast pomaganie dziecku w stopniowym przechodzeniu od myślenia konkretnego do myślenia symbolicznego i abstrakcyjnego.[175] Widać tu nawiązanie do koncepcji czynnościowego nauczania matematyki, której założenia powinny być uwzględniane podczas organizowania nauczania na pierwszym etapie edukacyjnym.

Znaczenie edukacji matematycznej podkreślane jest w aktualnie obowiązującym prawie międzynarodowym. Parlament Europejski wyróżnił osiem kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie. Wśród nich znalazła się miedzy innymi kategoria obejmująca kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii. Pozostałymi kompetencjami kluczowymi są kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, kompetencje w zakresie wielojęzyczności, kompetencje cyfrowe, kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się, kompetencje obywatelskie, kompetencje w zakresie przedsiębiorczości, a także kompetencje w zakresie świadomości i ekspresji kulturalnej.[176] Według definicji Parlamentu Europejskiego kompetencje matematyczne to „zdolność rozwijania i wykorzystywania myślenia i postrzegania matematycznego do rozwiązywania problemów w codziennych sytuacjach. Istotne są zarówno proces i działanie, jak i wiedza, przy czym podstawę stanowi należyte opanowanie umiejętności rozumowania matematycznego. Kompetencje matematyczne obejmują – w różnym stopniu – zdolność i chęć wykorzystywania matematycznych sposobów myślenia oraz prezentacji (wzory, modele, konstrukty, wykresy, tabele)."[177] Rozszerzenia znaczenia kompetencji matematycznych dokonały B. Dudel oraz J. Szada-Borzyszkowska. Autorki zaliczyły do nich także myślenie matematyczne, stawianie

[173] A. Janowski: *Poznawanie uczniów*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1975, s. 46.
[174] Z. Cydzik: *Nauczanie matematyki w klasie pierwszej i drugiej szkoły podstawowej*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1990, s. 14.
[175] I. Adamek: *Podstawy edukacji wczesnoszkolnej*. Kraków: Wydawnictwo „Impuls", 2000, s. 170.
[176] Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej. ZALECENIE RADY z dnia 22 maja 2018 r. w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie.
https://eur-lex.europa.eu/legal-content/PL/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=en.
Data dostępu: 16.11.2018 r.
[177] Ibidem.

i rozwiązywanie problemów matematycznych, rozumowanie matematyczne, reprezentowanie bytów matematycznych, posługiwanie się matematyczną symboliką i formalizmami, komunikowanie się w matematyce, o matematyce i z jej użyciem oraz używanie pomocy i narzędzi naukowych włącznie z technologią informatyczną.[178]

Rozumienie matematyki oznacza znajomość sensu operacji matematycznych, wyrażającą się zdolnością dostrzegania związków między wielkościami oraz konsekwencji określonych przekształceń tych związków. Składnikami rozumienia matematyki są procesy poznawcze dokonywane na materiale przestrzenno-liczbowym, w odróżnieniu od sprawności działania na tym materiale i od procesów poznawczych dokonywanych na innym materiale, np. na materiale werbalnym.[179] G. Treliński pisał o trojakiej naturze matematyki szkolnej. Podążając za tą myślą można wyróżnić trzy rodzaje sytuacji w nauczaniu szkolnym oraz w życiu codziennym, z którymi mamy do czynienia w edukacji matematycznej. Pierwszym jest rozwiązywanie pewnych konkretnych zadań, według algorytmu postępowania, dzięki któremu możliwe jest znalezienie odpowiedzi lub rozwiązania tegoż zadania. W tym przypadku matematyka jest traktowana jako zbiór modeli teoretycznych oraz narzędzi (metod) umożliwiających rozwiązywanie poszczególnych typów zadań. Drugą sytuacją jest badanie całkiem nowych, dotąd niespotykanych zagadnień. W jej zakresie następuje szukanie kategorii językowych, które pomogą opisać nowe zjawisko, a także poszukiwanie sposobów jego badania, czy metod uzasadniania poprawności rozumowania. W tym przypadku matematyka jest traktowana jako dziedzina wiedzy, w obrębie której uczeń posługuje się matematycznymi pojęciami, twierdzeniami, metodami oraz językiem. Trzecią sytuacją jest natomiast uczenie się matematyki, podczas którego następuje tworzenie jej w myśli ucznia. Matematyka jest wtedy rozumiana jako obszar działalności intelektualnej, której wytworem jest matematyka – teoria, matematyka – narzędzie.[180] Nie ulega wątpliwości, iż wszystkie te sytuacje mają miejsce od samego początku nauki szkolnej. Skuteczne posługiwanie się matematyką przez ucznia

[178] B. Dudel, J. Szada-Borzyszkowska: *Kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo-techniczne uczniów klas młodszych*. W: *Rozwijanie kompetencji kluczowych uczniów w procesie edukacji wczesnoszkolnej*. Red. J. Uszyńska-Jarmoc, B. Dudel, M. Głoskowska-Sołdatow. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2013, s. 96-98.

[179] W. Sitarska-Niemierko: *Rozumienie matematyki przez przyszłe nauczycielki klas I-III*. W: *Diagnostyka edukacyjna. Teoria i praktyka*. Red. B. Niemierko. Kraków: Polskie Towarzystwo Diagnostyki Edukacyjnej, 2004, s.114-115.

[180] G. Treliński: *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna. 3 x M. Matematyka. Modelowanie. Metodyka*. Piotrków Trybunalski: Naukowe Wydawnictwo Piotrkowskie przy Filii Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy Jana Kochanowskiego w Kielcach, 2011, s. 19-20.

w codziennym życiu wymaga sprawnego posługiwania się nią w każdej z trzech wymienionych wyżej sytuacji.

Poza kształtowaniem kompetencji matematycznych, istotnym zadaniem edukacji matematycznej jest kształtowanie u uczniów pojemnej i trwałej pamięci. Rozwijanie kompetencji matematycznych uczniów powinno się odbywać poprzez aranżowanie przez nauczyciela takich sytuacji dydaktycznych, podczas których będą oni mogli ćwiczyć umiejętność przyswajania wiedzy, przechowywania jej w pamięci oraz skutecznego wykorzystywania jej w procesie rozwiązywania nowych problemów.[181]

Wśród wielu sposobów myślenia o nauczaniu matematyki, wyróżnić można podejście instruktywne i konstruktywne. W pierwszym podejściu przyjmuje się założenie, iż uczenie się jest procesem biernego zapamiętywania z góry podanych, gotowych instrukcji. Podejście takie zdaniem S. Turnaua może powodować powstanie szkodliwych dla ucznia „pseudokompetencji matematycznych”.[182] Uczenie się matematyki sprowadzone jedynie do biernego odtwarzania uprzednio zapamiętanych schematów postępowania niesie za sobą niebezpieczeństwo bezrefleksyjnego ich stosowania przez uczniów.[183] W przypadku takim uczniowie – rozwiązujący prawie wyłącznie zadania o charakterze zamkniętym – utwierdzają się w przekonaniu, że uczenie się polega głównie na pamięciowym przyswajaniu z góry ustalonego, kompletnego systemu wiedzy, w którym nie ma już miejsca na wyobraźnię, intuicję czy eksperymentowanie.[184] Nie ulega wątpliwości, iż taki sposób nauczania jest szkodliwym dla uczniów. W opozycji do niego można umiejscowić podejście konstruktywistyczne.

W konstruktywistycznym ujęciu edukacji matematycznej zakłada się, że dziecko/uczeń poprzez aktywne badanie środowiska za pomocą własnych doświadczeń, konstruuje swoją wiedzę o otaczającym go świecie. Konstruowanie indywidualnej wiedzy jest możliwie dzięki interpretacji swoich obserwacji i doświadczeń.[185] Informacje, dane, fakty, które poznaje uczeń powinny być pretekstem do rozwijania myślenia i zdolności konstruowania własnego obrazu

---

[181] H. Moroz: *Kształcenie matematyczne a rozwój społeczno-zawodowy*. Katowice: Uniwersytet Śląski, 1991, s. 6-7.
[182] S. Turnau: *Dokąd zmierza szkolne nauczanie matematyki*. „*Matematyka*”, 1995, nr 3, s. 134-137.
[183] A. Tyl: *Między schematem a poszukiwaniem w matematycznej edukacji wczesnoszkolnej*. W: *Wczesna edukacja między schematem a poszukiwaniem nowych ujęć teoretyczno-badawczych*. Red. D. Klus-Stańska, E. Szatan, D. Bronik. Gdańsk: Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, 2006, s. 140.
[184] G. Kapica: *Edukacyjne bariery kreatywności młodszych uczniów*. W: *Edukacja małego dziecka. Konteksty rozwojowe i wychowawcze*. Tom 4. Red. E. Ogrodzka-Mazur, U. Szuścik, J. Oleksy, Cieszyn – Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 2013, s. 188.
[185] M. Skura, M. Lisicki: *Gen liczby…, s.* 17.

świata, nie powinny być jedynie materiałem do zapamiętania, utrwalenia i reprodukowania go przed nauczycielem. [186] Tworzenie własnych konstrukcji matematycznych pojęć, możliwe jest dzięki organizowaniu nowych czynności, które zgodnie z mechanizmem interioryzacji, odbywać się powinno w trzech fazach. W pierwszej fazie dziecko uczy się nowych czynności, w drugiej samo powtarza nowe czynności oraz czynności im podobne, dzięki czemu nabywa pewności, że dobrze je zrozumiało oraz w końcowej fazie już wie, w jaki sposób wykonywać nowe czynności i utrwala tę wiedzę. [187] Edukacja matematyczna w takim ujęciu prowadzi do zmian wyrażonych w uczeniu się poprzez rozumienie pojęć, konstruowanie sytuacji problemowych i formułowanie zadań o charakterze otwartym, poprzez które prowokowana zostaje aktywność uczniów. [188] To – jakże różne od instruktywnego – podejście zdaje się być najlepszym sposobem na urzeczywistnianie idei zwiększenia samodzielności uczniów w procesie uczenia się matematyki.

Konstruktywistyczne ujęcie edukacji matematycznej ma ściśle określone cele. Pierwszym z nich jest wspomaganie rozwoju umysłowego dziecka, w szczególności tworzenia się w jego umyśle odpowiednich schematów poznawczych i rozwijania myślenia operacyjnego. W dalszej kolejności celem jest zebranie przez dziecko doświadczeń niezbędnych do ukształtowania się odpowiednich pojęć matematycznych. Równie istotnym jest stymulowanie rozumowań matematycznych, samodzielności myślenia i krytycyzmu, a także rozwijanie umiejętności matematyzowania łatwych zagadnień zaczerpniętych z otaczającej dziecko rzeczywistości i stosowania nabytej wiedzy w konkretnych sytuacjach. [189] Tak rozumiane cele edukacji matematycznej podkreślają wszystkie niezbędne elementy nauczania – uczenia się matematyki, jakie powinny być realizowane w toku szkolnej edukacji.

Edukacja matematyczna realizowana wedle założeń konstruktywizmu niezaprzeczalnie sprzyja rozwijaniu umiejętności uczniów, umożliwia im bowiem samodzielne konstruowanie wiedzy na bazie własnych przeżyć i osobistych doświadczeń. Ten kierunek myślenia o procesie nauczania i uczenia się matematyki wydaje

[186] D. Klus-Stańska: *W nauczaniu początkowym inaczej*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 1999, s. 14-15.
[187] Z. Semadeni: *Matematyka w edukacji początkowej – podejście konstruktywistyczne*. W: *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*. Red. Z. Semadeni, E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Treliński, B. Bugajska-Jaszczołt, M. Czajkowska. Kielce: Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP, 2015, s. 15.
[188] A. Nowak-Łojewska: *Wybrane obszary edukacji matematycznej dzieci: poradnik dla nauczycieli klas I III*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji, 2015, s. 9.
[189] Z. Semadeni: *Podejście konstruktywistyczne do matematycznej edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji, 2016, s. 7.

się być najbardziej słusznym. Zwiększenie aktywności i samodzielności uczniów sprzyja rozwijaniu umiejętności krytycznego i logicznego myślenia.

W kontekście sposobów uczenia się matematyki istotnym jest także rozróżnienie dwóch sposobów myślenia o edukacji, a mianowicie edukacji monologowej oraz edukacji dialogowej. Dostrzeżenie przeciwstawnego charakteru obu sposobów myślenia o uczeniu się, nauczaniu oraz o samej wiedzy, w zależności od przyjętego podejścia jest możliwe dzięki zestawieniu ich cech charakterystycznych[190], które zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1. Cechy charakteryzujące monologowe i dialogowe podejście do edukacji

Cechy podejścia monologowego	Cechy podejścia dialogowego
Poszukiwanie pewności	Założenie hipotetyczności oraz problematyczności jako atrybutów pojmowania świata
Kluczowa rola odpowiedzi	Kluczowa rola pytań, uznawanych jako podstawy wszelkiej wiedzy
Założenie istnienia hierarchii między rozmówcami, wynikającej z różnic w posiadanych przez nich kompetencji w zakresie znajomości tzw. poprawnych sądów	Założenie poznawczej wzajemności, która nie wyklucza istnienia autorytetu
Przekaz przebiega w postaci sporu o obiektywne racje	Konstruowanie znaczeń przebiega poprzez odwoływanie się do kontekstów i identyfikacji przyjętych założeń
Poszukiwanie oraz odwoływanie się do jedynych poprawnych wzorców, modeli	Założenie wielości możliwych teorii oraz otwartość na nowe sposoby rozumienia
Celem jest znalezienie jednoznacznego, jedynego wyjaśnienia	Celem jest interpretacja lub przynajmniej akceptacja możliwości alternatywnego wyjaśniania
Dotyczy wiedzy uznanej	Dotyczy wiedzy kontekstualnej, osobistej, negocjowanej społecznie

[190] D. Klus-Stańska: *Konstruowanie wiedzy w szkole*. Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, 2012, s. 104-105.

Nauczyciel kieruje uczniów znaną sobie drogą poznania	Nauczyciel tworzy uczniom warunki do poszukiwania własnych dróg poznania
Potrzeba posiadania autorytetów pozycjonalnych (wynikających ze statusu roli społecznej)	Wspólna wędrówka wśród znaczeń

Źródło: *D. Klus-Stańska: Konstruowanie wiedzy w szkole.* Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, 2012, s. 104-105.

Autorka tegoż zestawienia – D. Klus-Stańska uważa, iż monologowy przekaz wiedzy w naukach matematyczno-przyrodniczych wiąże się z negatywnymi pod względem pedagogicznym skutkami, do których zalicza się:

- „narzucanie schematów znaczeniowych poprzez utożsamianie doświadczenia z interpretacją, ku której kieruje ucznia nauczyciel,
- większa koncentracja na zasobach wiedzy niż na drogach służących do jej poznawania,
- zredukowanie do minimum drogi eksploracji uczniów,
- tworzenie granicy między zdumieniem wywołanym obserwacją codziennych zjawisk, a dyscypliną naukową, co wynika z porządkowania kolejnych lekcji według pojęć teoretycznych stanowiących ustalony dorobek dyscyplin naukowych (podczas gdy porządek teorii nie jest tożsamy z porządkiem doświadczenia) oraz poruszanie się przede wszystkim w obszarze języka teorii (formalizacja języka),
- obniżanie motywacji do działań eksploracyjnych poprzez prezentację wiedzy naukowej jako wysoce eksperckiej, ustalonej i popartej niekwestionowanymi dowodami,
- wygaszanie ciekawości poznawczej i skłonności do podejmowania myślenia twórczego wskutek nacisku położonego na referowanie przez ucznia wiedzy zastanej, z pominięciem wymagań dotyczących umiejętności związanych z warsztatem badawczym."[191]

Jednym z bardzo istotnych działań podejmowanych zarówno przez badaczy specjalizujących się w edukacji matematycznej, jak i przez nauczycieli jest właściwa interpretacja, a także zaaprobowanie jej celów. Cele edukacji matematycznej zostały opisane w kolejnym podrozdziale niniejszej pracy. Dla możliwie pełnego

[191] Ibidem, s. 89.

ich zaprezentowania przytoczono zarówno cele sformułowane przez ludzi nauki, jak i cele obowiązujące w praktyce szkolnej, czyli zapisane w Podstawie programowej kształcenia ogólnego obowiązującej od roku szkolnego 2018/2019.

2.3. Cele i zadania edukacji matematycznej

Celami edukacji są świadomie założone skutki, które społeczeństwo pragnie osiągnąć poprzez funkcjonowanie systemu oświaty i które są zależne od charakteru każdego społeczeństwa i jego systemu oświaty. [192] Celami nauczania są natomiast „zamierzone efekty działalności nauczyciela (nauczanie) oraz uczniów (uczenie się), których rezultatem jest określona ilość, jakość, trwałość i operatywność opanowanych przez dzieci i młodzież wiadomości i umiejętności (sprawności)."[193] W. Kojs uważa, iż w trakcie stawiania zadań nauczania i wychowania należy „wyróżniać wiedzę o potrzebach i celach, warunkach, sposobach i ocenach działania w przeszłości, teraźniejszości i przyszłości".[194] Jest to istotne z praktycznego punktu widzenia, gdyż cele nauczania powinny być sformułowane w taki sposób, by w jak największym stopniu odpowiadały na potrzeby współczesnego świata. Winny być jak najbardziej powiązane z rzeczywistością.

Cele edukacyjne mogą być sformułowane zarówno w odniesieniu do edukacji elementarnej w ogólnym ujęciu, jak również w odniesieniu do każdej z realizowanych w jej zakresie poszczególnych edukacji. W związku z podjętą w niniejszej rozprawie tematyką, najistotniejszymi celami są cele edukacji matematycznej.

Cele edukacji matematycznej stanowią podstawę działań podejmowanych między innymi przez teoretyków i badaczy opracowujących teoretyczne aspekty edukacji matematycznej oraz rozwiązania metodyczne jej służące. Są one wykorzystywane na poziomie akademickim przez wykładowców przygotowujących przyszłych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej lub też nauczycieli przedmiotu matematyka. Ponadto cele te są wykorzystywane przez czynnych zawodowo nauczycieli, obligatoryjnie zobowiązanych do ich realizowania. Każdy nauczyciel, dobrze przygotowany do wykonywania zawodu, ma świadomość tego, że cele edukacji matematycznej

[192] W. Okoń, *Nowy słownik pedagogiczny…, s.* 57.
[193] Cz. Kupisiewicz, M. Kupisiewicz: *Słownik pedagogiczny*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2009, s. 22.
[194] W. Kojs: *Uwarunkowania dydaktycznych funkcji podręcznika*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1975, s. 35.

w znacznej mierze warunkują przyjęcie konkretnych rozwiązań metodycznych lub też rozwiązań metodycznych należących do określonej kategorii.

Na przełomie XX i XXI wieku używane wcześniej w dydaktyce pojęcia wiadomości (wiedza teoretyczna), umiejętności, postawy, a nawet nawyki zaczęto określać wspólną nazwą kompetencje. W zakresie kompetencji matematycznych B. Dudel wyróżniła wskaźniki, które po nieznacznej modyfikacji mogą stanowić cele dotyczące:

a) wiedzy o:
- sposobach dokonywania obliczeń,
- stosowanych miarach i strukturach,
- głównych operacjach i sposobach prezentacji matematycznej,
- zasadach rządzących naturą oraz wpływie nauki i technologii na świat przyrody,
- korzyściach, ograniczeniach i zagrożeniach powodowanych działalnością ludzi,

b) umiejętności w zakresie:
- stosowania głównych zasad i procesów matematycznych w codziennych sytuacjach prywatnych i zawodowych,
- śledzenia i oceniania ciągów argumentów,
- przeprowadzenia dowodu z wykorzystaniem matematycznego rozumowania oraz wyciągania wniosków na podstawie dowodów,
- komunikowania się językiem matematycznym oraz korzystania z odpowiednich pomocy,
- wykorzystywania narzędzi i urządzeń technicznych oraz danych naukowych do osiągnięcia celu bądź podjęcia decyzji,
- rozpoznawania niezbędnych cech postępowania naukowego oraz wyróżniania wniosków i sposobów rozumowania, które do tych wniosków doprowadziły,

c) pozytywnych postaw wobec:
- możliwości wykorzystania matematycznych sposobów myślenia w poszukiwaniu przyczyn i rozwiązań problemów oraz oceniania ich zasadności,
- prawdy jako wartości ogólnoludzkiej,
- krytycznego rozumowania i ciekawości poznawczej,
- potrzeby stosowana zasad etycznych oraz poszanowania zarówno bezpieczeństwa, jak i trwałości, w szczególności w odniesieniu do postępu naukowo-technicznego

w kontekście danej osoby, jej rodziny i społeczności oraz zagadnień globalnych.[195]

Rozwijaniu powyższych kompetencji w sposób szczególny sprzyja realizacja procesu kształcenia z wykorzystaniem metod problemowych, ponieważ wiąże się ona z koniecznością podjęcia różnego rodzaju aktywności, takich jak aktywność motoryczna, spostrzeżeniowa, wyobrażeniowa czy myślowa.[196] Wszystkie z wyżej wymienionych kompetencji mają istotne znaczenie w kontekście nauczania matematyki na pierwszym etapie edukacyjnym.

Na etapie nauczania początkowego uczeń kształtuje swoje kompetencje matematyczne w różnych zakresach. Po pierwsze powinny mu one pozwolić na odniesienie sukcesu szkolnego w szerokim rozumieniu tego słowa. Po drugie, uczeń winien wykształcić w sobie takie kompetencje z zakresu edukacji matematycznej, by był w stanie poradzić sobie z uczeniem się tego przedmiotu na wyższych szczeblach edukacyjnych. Uczeń powinien także umieć zastosować nabyte w szkole umiejętności w sytuacjach związanych z życiem codziennym. Istotnym jest także, by uczeń potrafił czerpać radość z podejmowanej na zajęciach aktywności.[197] Oczywistym jest, iż należy dążyć do tego, by aktywność ucznia na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej była aktywnością podejmowaną przez niego w sposób świadomy i samodzielny. Tylko w taki sposób będzie on w stanie nabywać wiadomości i umiejętności z tego zakresu oraz rozwijać swoje zainteresowania i uzdolnienia matematyczne.

Zdaniem Z. Krygowskiej nauczanie matematyki powinno spełniać kilka postulatów. Pierwszym z nich jest intelektualizowanie postawy ucznia poprzez dostosowanie aktywności matematycznej do jego poziomu. Drugim jest pomaganie uczniowi w przyswojeniu przez niego aparatu pojęciowego, elementów języka i metod rozumowania koniecznych do rozwiązywania problemów życia codziennego. W dalszej kolejności nauczanie matematyki ma za zadanie rozwijać intuicję matematyczną uczniów. Ponadto powinno pomagać uczniowi w przyswojeniu technik uczenia się matematyki tak, by przyczyniać się bezpośrednio do przyswojenia ogólnej techniki uczenia się. Nauczanie to powinno także zdaniem Autorki zapewnić uczniowi opanowanie

---

[195] B. Dudel: *Istota kompetencji kluczowych*. W: *Rozwijanie kompetencji kluczowych uczniów w procesie edukacji wczesnoszkolnej*. Red. J. Uszyńska-Jarmoc, B. Dudel, M. Głoskowska-Sołdatow. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2013, s. 20-23.

[196] B. Dudel, J. Szada-Borzyszkowska: *Kompetencje matematyczne i podstawowe…*, s. 102.

[197] G. Rura, M. Klichowski: *Kompetencje matematyczne – założone sposoby kształtowania i dyskursy popkulturowe. W: Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Założony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej*. Red. H. Sowińska. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, 2011, s. 223-224.

elementarnej wiedzy i sprawności matematycznych w takim zakresie i na takim poziomie, by miał on możliwość dalszego kształcenia się.[198] Nauczanie matematyki na pierwszym etapie edukacyjnym ma szczególnie istotne znaczenie w kontekście dalszego kształcenia się. Po pierwsze powinno zapewnić uczniom podstawowe wiadomości i umiejętności, które to stanowić będą podwaliny dla bardziej rozbudowanych treści matematycznych realizowanych w kolejnych latach edukacji. Po drugie, należy pamiętać, iż pierwsze doświadczenia matematyczne będą w dużej mierze odpowiadały za postawy uczniów względem uczenia się tego przedmiotu. Doświadczenia pozytywne mogą zachęcić do dalszej nauki i uczynić z matematyki przedmiot interesujący. Doświadczenia negatywne mogą natomiast zablokować w uczniu chęć do uczenia się oraz przyczynić się do narastania lęku i niechęci wobec tego przedmiotu.

Jak już wspomniano, kształtowanie u uczniów kompetencji matematycznych związane jest zarówno z przyswajaniem przez nich wiadomości i opanowaniem umiejętności, jak i kształtowaniem postaw, a nawet nawyków. Dwie pierwsze składowe tak rozumianych kompetencji dotyczą sfery dydaktycznej, natomiast postawy i nawyki związane są z zachowaniem – zatem należą do sfery wychowawczej. Cele nauczania początkowego matematyki można zatem podzielić na dydaktyczne oraz wychowawcze.

Wśród celów o charakterze dydaktycznym K. Wojciechowska wyróżniła:

- „wstępne ukształtowanie rozumienia pojęć matematycznych określonych programem,
- opanowanie umiejętności matematycznych określonych programem,
- opisywanie konkretnych sytuacji za pomocą słów, schematów obrazowych i symboli matematycznych,
- przygotowanie do zdobycia umiejętności czytania i rozumienia tekstów matematycznych,
- rozwijanie wyobraźni geometrycznej,
- umiejętność schematyzacji i wstępnej matematyzacji konkretnych sytuacji,
- rozwijanie umiejętności posługiwania się metodami matematycznymi w życiu,
- rozwijanie aktywności twórczej,
- rozwijanie samodzielnego, logicznego myślenia,

[198] K. Wojciechowska: *Zastosowanie taksonomii celów nauczania początkowego matematyki do interpretacji programu nauczania*. W: *Diagnostyka edukacyjna*. Red. B. Niemierko. Gdańsk: Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, 1994, s. 117-118.

– rozwijanie ogólnych zdolności poznawczych."[199]

Ta sama Autorka sformułowała także cele wychowawcze, możliwe do realizowania w ramach edukacji matematycznej w pracy z uczniami w wieku wczesnoszkolnym. Do celów tych należą wyrabianie umiejętności koncentracji uwagi, wyrabianie staranności, wdrażanie do rzetelnej i sumiennej pracy własnej, kształtowanie umiejętności współdziałania w zespole, wyrabianie wytrwałości w przezwyciężaniu trudności, wyrabianie krytycznego stosunku do własnej pracy, a także rozwijanie zainteresowań matematycznych.[200]

Zaprezentowane ujęcia celów edukacji matematycznej mają charakter teoretyczny. To z nimi zapoznają się przyszli nauczyciele w procesie przygotowania zawodowego, a nauczyciele aktywni zawodowo w trakcie różnych form dokształcania. Rzeczywistość edukacyjna wymusza na nauczycielach czynnych zawodowo, by w swej pracy realizowali cele zapisane w Podstawie programowej kształcenia ogólnego – dokumentu w randze rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej. Niestety w Polsce zapisy tych rozporządzeń co kilka lat ulegają zmianom. Jest to niekorzystne, szczególnie w odniesieniu do edukacji wczesnoszkolnej. Może zdarzyć się bowiem tak, że nauczyciel przygotuje zajęcia w trakcie których realizowane są konkretne cele, a przez zmianę zapisów w podstawie programowej nie będzie miał okazji na ich udoskonalenie, gdyż powtarzalność zajęć w nauczaniu początkowym trwa trzy lata.

W trakcie finalizowania niniejszej rozprawy obowiązywała Podstawa programowa kształcenia ogólnego wprowadzona na mocy Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14.02.2017 roku.[201] W Podstawie tej, cele edukacji matematycznej na pierwszym etapie edukacyjnym, wyodrębnione zostały w ramach poznawczego obszaru rozwoju dziecka. Można do nich zaliczyć:

– „umiejętność rozumienia podstawowych pojęć i działań matematycznych, samodzielne korzystanie z nich w różnych sytuacjach życiowych, wstępnej matematyzacji wraz z opisem tych czynności: słowami, obrazem, symbolem,

[199] Ibidem, s.115.
[200] Ibidem, s.115.
[201] *Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej*. http://www.dziennikustaw.gov.pl/DU/2017/356. Data dostępu: 16.11.2018 r.

– umiejętność stawiania pytań, dostrzegania problemów, zbierania informacji potrzebnych do ich rozwiązania, planowania i organizacji działania, a także rozwiązywania problemów,
– umiejętność czytania prostych tekstów matematycznych, np. zadań tekstowych, łamigłówek i zagadek, symboli, oraz
– potrzebę i umiejętność samodzielnego, refleksyjnego, logicznego, krytycznego i twórczego myślenia."[202]

Cele szczegółowe edukacji matematycznej realizowanej na etapie wczesnoszkolnym opisane są w formie efektów kształcenia, jakie uczeń osiąga poprzez realizację zadań wymagających wielokierunkowej aktywności. Zgodnie z obowiązującą aktualnie Podstawą programową efektami kształcenia w zakresie edukacji matematycznej na pierwszym etapie edukacyjnym są:

- „Osiągnięcia w zakresie rozumienia stosunków przestrzennych i cech wielkościowych, w ramach których uczeń:
– określa i prezentuje wzajemne położenie przedmiotów na płaszczyźnie i w przestrzeni; określa i prezentuje kierunek ruchu przedmiotów oraz osób; określa położenie przedmiotu na prawo/na lewo od osoby widzianej z przodu (także przedstawionej na fotografii czy obrazku),
– porównuje przedmioty pod względem wyróżnionej cechy wielkościowej, np. długości czy masy; dokonuje klasyfikacji przedmiotów,
– posługuje się pojęciami: pion, poziom, skos.
- Osiągnięcia w zakresie rozumienia liczb i ich własności, w ramach których uczeń:
– liczy (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10 itp.,
– odczytuje i zapisuje, za pomocą cyfr, liczby od zera do tysiąca oraz wybrane liczby do miliona (np. 1 500, 10 000, 800 000),
– wyjaśnia znaczenie cyfr w zapisie liczby; wskazuje jedności, dziesiątki, setki itd., określa kolejność, posługując się liczbą porządkową,
– porównuje liczby; porządkuje liczby od najmniejszej do największej i odwrotnie; rozumie sformułowania typu: liczba o 7 większa, liczba o 10 mniejsza; stosuje znaki: <, =, >.
- Osiągnięcia w zakresie posługiwania się liczbami, w ramach których uczeń:

[202] *Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej z dnia 14.02.2017 r.* http://dziennikustaw.gov.pl/du/2017/356/1. Data dostępu: 16.11.2018 r.

- wyjaśnia istotę działań matematycznych – dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia oraz związki między nimi; korzysta intuicyjnie z własności działań,
- dodaje do podanej liczby w pamięci i od podanej liczby odejmuje w pamięci: liczbę jednocyfrową, liczbę 10, liczbę 100 oraz wielokrotności 10 i 100 (w prostszych przykładach),
- mnoży i dzieli w pamięci w zakresie tabliczki mnożenia; mnoży w pamięci przez 10 liczby mniejsze od 20; rozwiązuje równania z niewiadomą zapisaną w postaci okienka (uzupełnia okienko); stosuje własne strategie, wykonując obliczenia; posługuje się znakiem równości i znakami czterech podstawowych działań,
- dodaje i odejmuje liczby dwucyfrowe, zapisując w razie potrzeby cząstkowe wyniki działań lub, wykonując działania w pamięci, od razu podaje wynik; oblicza sumy i różnice większych liczb w prostych przykładach typu: 250 + 50, 180 – 30; mnoży liczby dwucyfrowe przez 2, zapisując, jeśli ma taką potrzebę, cząstkowe wyniki działań; przy obliczeniach stosuje własne strategie.

* Osiągnięcia w zakresie czytania tekstów matematycznych, w ramach których uczeń:

- analizuje i rozwiązuje zadania tekstowe proste i wybrane złożone; dostrzega problem matematyczny oraz tworzy własną strategię jego rozwiązania, odpowiednią do warunków zadania; opisuje rozwiązanie za pomocą działań, równości z okienkiem, rysunku lub w inny wybrany przez siebie sposób,
- układa zadania i je rozwiązuje, tworzy łamigłówki matematyczne, wykorzystuje w tym procesie własną aktywność artystyczną, techniczną, konstrukcyjną; wybrane działania realizuje za pomocą prostych aplikacji komputerowych.

* Osiągnięcia w zakresie rozumienia pojęć geometrycznych, w ramach których uczeń:

- rozpoznaje – w naturalnym otoczeniu (w tym na ścianach figur przestrzennych) i na rysunkach – figury geometryczne: prostokąt, kwadrat, trójkąt, koło; wyodrębnia te figury spośród innych figur; kreśli przy linijce odcinki i łamane; rysuje odręcznie prostokąty (w tym kwadraty), wykorzystując sieć kwadratową,
- mierzy długości odcinków, boków figur geometrycznych itp.; podaje wynik pomiaru, posługując się jednostkami długości: centymetr, metr, milimetr; wyjaśnia związki między jednostkami długości; posługuje się wyrażeniami dwumianowanymi; wyjaśnia pojęcie kilometr,

– mierzy obwody różnych figur za pomocą narzędzi pomiarowych, także w kontekstach z życia codziennego; oblicza obwód trójkąta i prostokąta (w tym także kwadratu) o danych bokach,
– dostrzega symetrię w środowisku przyrodniczym, w sztuce użytkowej i innych wytworach człowieka obecnych w otoczeniu dziecka.

- Osiągnięcia w zakresie stosowania matematyki w sytuacjach życiowych oraz w innych obszarach edukacji, w ramach których uczeń:

– klasyfikuje obiekty i różne elementy środowiska społeczno-przyrodniczego z uwagi na wyodrębnione cechy; dostrzega rytm w środowisku przyrodniczym, sztuce użytkowej i innych wytworach człowieka, obecnych w środowisku dziecka,
– dzieli na dwie i cztery równe części, np. kartkę papieru, czekoladę; używa pojęć: połowa, dwa i pół, cztery równe części, czwarta część lub ćwierć,
– wykonuje obliczenia pieniężne; zamienia złote na grosze i odwrotnie, rozróżnia nominały na monetach i banknotach, wskazuje różnice w ich sile nabywczej,
– odczytuje godziny na zegarze ze wskazówkami oraz elektronicznym (wyświetlającym cyfry w systemie 24-godzinnym); wykonuje proste obliczenia dotyczące czasu; posługuje się jednostkami czasu: doba, godzina, minuta, sekunda; posługuje się stoperem, aplikacjami telefonu, tabletu, komputera; zapisuje daty np. swojego urodzenia lub datę bieżącą; posługuje się kalendarzem; odczytuje oraz zapisuje znaki rzymskie co najmniej do XII,
– mierzy temperaturę za pomocą termometru oraz odczytuje ją,
– dokonuje obliczeń szacunkowych w różnych sytuacjach życiowych,
– waży; używa określeń: kilogram, dekagram, gram, tona; zna zależności między tymi jednostkami; odmierza płyny; używa określeń: litr, pół litra, ćwierć litra,
– wykorzystuje warcaby, szachy i inne gry planszowe lub logiczne do rozwijania umiejętności myślenia strategicznego, logicznego, rozumienia zasad itd.; przekształca gry, tworząc własne strategie i zasady organizacyjne,
– wykorzystuje nabyte umiejętności do rozwiązywania problemów, działań twórczych i eksploracji świata, dbając o własny rozwój i tworząc indywidualne strategie uczenia się.”[203]

[203] *Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej z dnia 14.02.2017 r.* http://dziennikustaw.gov.pl/du/2017/356/1]. Data dostępu: 16.11.2018 r.

Cele zapisane w podstawie programowej są uszczegóławiane w programach nauczania, a te, po operacjonalizacji dokonywanej przez nauczyciela stają się podstawowym wyznacznikiem większości działań dydaktycznych podejmowanych w trakcie zajęć. Wszystkie cele można wprawdzie zrealizować metodami podającymi, jednakże o wiele więcej korzyści przynosi uczniom ich realizacja metodami aktywizującymi, zwłaszcza zaś problemowymi. Korzyści te zostały zaprezentowane w następnych rozdziałach tegoż opracowania.

Celem nauczania matematyki powinien być trening nieschematycznego myślenia oraz kształtowanie twórczej, zachęcającej do aktywności podczas rozwiązywania problemów postawy.[204] Istotne jest to, by nie ograniczać nauczania matematyki jedynie do zapamiętywania i późniejszego odtwarzania wzorów, definicji, czy reguł postępowania. Nauczanie, polegające na podawaniu uczniom gotowej wiedzy w sposób werbalny, nastawione na jej zapamiętywanie i mechaniczne odtwarzanie nie sprzyja rozwojowi dziecka i utrudnia mu rozumienie otaczającego go świata.[205]

Celem matematyzacji doświadczeń uczniów pierwszego etapu edukacyjnego jest rozwijanie ich aktywnego nastawienia intelektualnego wobec sytuacji problemowych, rozwijanie wyobraźni, języka inwencji oraz pomysłowości w rozwiązywaniu zadań.[206] Ponadto istotną rolę odgrywa formowanie poszukującej postawy intelektualnej, pobudzanie chęci do samodzielnego myślenia, stosowanie technik heurystycznych, rozwijanie umiejętności logicznego i krytycznego myślenia oraz logicznego argumentowania.[207] W opinii H. Moroza jednym z najistotniejszych celów pracy wychowawczo-dydaktycznej jest kształtowanie postawy badawczej, rozbudzanie naturalnej ciekawości dzieci oraz zachęcanie ich do podejmowania samodzielnych prób rozwiązywania problemów.[208] Cel ten powinien być realizowany od najwcześniejszych lat, czyli już na etapie wychowania przedszkolnego. W ramach edukacji matematycznej na etapie wczesnoszkolnym cel ten realizowany jest zwłaszcza poprzez rozwiązywanie

[204] R. Reclik: *Wspieranie potencjału twórczego uczniów w wieku wczesnoszkolnym podczas rozwiązywania problemów matematycznych.* W: *Doświadczanie zmian w teorii i praktyce pedagogicznej*. Red. J. Skibska, J. Wojciechowska. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2015, s. 167.
[205] I. Adamek: *Rozwiązywanie problemów przez dzieci*. Kraków: Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Komisji Edukacji Narodowej, 1996, s. 28.
[206] H. Moroz: *Współczesne środki dydaktyczne w nauczaniu początkowym matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1986, s. 13.
[207] D. Klus-Stańska, M. Nowicka: *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2005, s. 158.
[208] H. Moroz: *Rozwijanie pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1982, s. 13.

zadań o charakterze problemowym. Zadania te zostały scharakteryzowane w dalszej części dysertacji.

Kolejny podrozdział dysertacji zawiera najistotniejsze informacje teoretyczne dotyczące myślenia matematycznego uczniów klas początkowych. Ponadto scharakteryzowano w nim aktywność matematyczną uczniów.

2.4. Myślenie matematyczne i aktywność matematyczna uczniów klas początkowych

Najważniejsze cechy charakteryzujące myślenie dziecka w młodszym wieku szkolnym zostały przedstawione w podrozdziale 2.1. W podrozdziale tym wyjaśniono także czym jest myślenie w ogólnym rozumieniu.

Rozumienie otaczającej rzeczywistości dzieje się za sprawą różnorakich interakcji dziecka, takich jak interakcje fizyczne, socjalne, emocjonalne oraz intelektualne, a te z kolei są integrowane za sprawą myślenia.[209] Myślenie pełni istotną rolę w życiu człowieka. Ma także znaczący udział w procesie nauczania – uczenia się.

W kontekście edukacji matematycznej istotną rolę pełni myślenie konwergencyjne i myślenie dywergencyjne. Myślenie konwergencyjne (zbieżne, konwencjonalne) jest operacją umysłową, polegającą na generowaniu nowej informacji (słów, idei, skojarzeń, rozwiązania problemu, gotowych wytworów, itp.) na podstawie informacji już posiadanych w sytuacji, gdy istnieje możliwość jednego właściwego rozwiązania. Myślenie tego typu gwarantuje skuteczność uczenia się reproduktywnego, czy przyswajania algorytmów działań.[210] Myślenie to jest wykorzystywane do rozwiązywania zadań o charakterze zamkniętym, ogranicza ono aktywność umysłową do wykonywania sztywno określonego wzoru, który prowadzi do prawidłowego rozwiązania zadania.[211] Podczas uczenia się matematyki myślenie konwergencyjne będzie zatem wykorzystywane w przypadku rozwiązywania zadań standardowych czy algorytmicznych. Podczas ich rozwiązywania uczeń posługuje się znanymi sobie

[209] I. Adamek, *Rozwiązywanie problemów przez…*, s. 30.
[210] T. Pilch: *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku*. T. 2. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak”, 2005, s. 793.
[211] D. Gębuś, A. Pierzchała: *Twórczy nauczyciele, pomysłowi uczniowie. Osobowościowe korelaty kreatywności nauczycieli w perspektywie analizy transakcyjnej*. Częstochowa: Wydawnictwo im. Stanisława Podobińskiego Akademii im. Jana Długosza, 2016, s. 27.

metodami, nie staje przed koniecznością generowania nowych pomysłów lub nowych sposobów na osiągniecie poprawnego wyniku.

Myślenie dywergencyjne (rozbieżne) to operacja umysłowa, polegająca na generowaniu wielu nowych informacji (słów, idei, skojarzeń, rozwiązań problemu, gotowych wytworów, itp.) w oparciu o informacje już posiadane w sytuacji, gdy istnieje możliwość wielu rozwiązań problemu. Cechami charakterystycznymi myślenia typu dywergencyjnego są płynność, giętkość oraz oryginalność. Płynność myślenia, zwana inaczej produktywnością, jest to zdolność i łatwość do wytwarzania w krótkim czasie dużej liczby pomysłów rozwiązania danego problemu. Giętkość (plastyczność, elastyczność) myślenia to zdolność wytwarzania różnych pod względem jakościowym pomysłów. Ta cecha umożliwia rozważanie problemu z różnych perspektyw oraz dostosowywanie sposobów rozwiązywania problemów do zmieniających się okoliczności. Ostatnia cecha, czyli oryginalność myślenia to zdolność do wytwarzania nowych pomysłów, dostosowanych do sytuacji. Dzięki niej możliwe jest wyjście poza stereotypowe rozwiązania problemu oraz generowanie pomysłów opartych na odległych skojarzeniach. [212] Myślenie typu dywergencyjnego jest wykorzystywane do rozwiązywania zadań wiążących się z koniecznością poszukiwania rozwiązania, w sytuacji, gdzie nie ma wypracowanego schematu postępowania, który można zastosować podczas ich rozwiązywania. [213] Myślenie to jest zatem konieczne do rozwiązywania zadań otwartych oraz zadań o charakterze problemowym. W kontekście nabywania kompetencji matematycznych myślenie dywergencyjne powinno wzajemnie uzupełniać się z myśleniem logicznym i myśleniem o charakterze dedukcyjnym.[214]

Równie istotne znaczenie podczas rozwiązywania problemów, a tym samym podczas uczenia się matematyki ma myślenie refleksyjne, na które składają się elementy takie jak stan zakłopotania, zaniepokojenia, niepewności czy wątpliwości oraz akt badania lub poszukiwania, skierowany ku wykryciu innych faktów służących do potwierdzenia lub obalenia nasuwających się sądów czy przekonań. [215] Wszystkie wymienione wyżej typy myślenia są elementami użytecznymi w sytuacji rozwiązywania

[212] T. Pilch: *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku*. T. 1. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2005, s. 865.
[213] D. Gębuś, A. Pierzchała: *Twórczy nauczyciele, pomysłowi…, s.* 27.
[214] J. Bonar: *O potrzebie rozwijania myślenia twórczego w edukacji matematycznej uczniów*. W: *Wczesnoszkolna edukacja matematyczna – ograniczenia i ich przełamywanie*. Red. A. Kalinowska. Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, 2013, s.79.
[215] I. Adamek: *Rozwiązywanie problemów przez…,* s. 16.

problemów. Wszystkie zatem są niezbędne w procesie nabywania wiedzy i umiejętności z zakresu edukacji matematycznej. W kontekście rozważań pojmowanych w niniejszej rozprawie interesującym jest pojęcie tak zwanego myślenia matematycznego.

Myślenie matematyczne (ang. *mathematical thinking*) jest rozumiane jako dynamiczny proces, rozszerzający rozumienie pojęcia *myślenie*. Uabstrakcyjnia ono niektóre własności myślenia i uogólniania wyników dla szerszych klas przedmiotów. Myślenie to jest niezbędne do wykorzystywania narzędzi matematyki w codziennym życiu oraz formułowania sądów opartych na rozumowaniu matematycznym, a także na rozwiązywaniu problemów. Ponadto jest konieczne do rozwijania zdolności panowania nad stanami psychicznymi i emocjonalnymi.[216] Myślenie matematyczne, definiowane jako umiejętność korzystania z podstawowych narzędzi matematyki oraz prowadzenia elementarnych rozumowań matematycznych, to jedna z głównych umiejętności, jaką powinien zdobyć uczeń w toku kształcenia ogólnego w szkole podstawowej. Myślenie matematyczne to dynamiczny proces, dzięki któremu jesteśmy zdolni do radzenia sobie z coraz bardziej złożonymi ideami, za jego pomocą rozszerza się nasze rozumienie.[217] Jest ono środkiem służącym do poznania świata zewnętrznego, ze strony ilościowej za pomocą liczby oraz ze strony formy za pomocą wyobrażeń przestrzennych, charakteryzuje się zatem myśleniem analitycznym i geometrycznym.[218] Za jego sprawą możliwe jest radzenie sobie z coraz bardziej złożonymi ideami i pojęciami z zakresu edukacji matematycznej.

Myślenie matematyczne jest określane także jako zespół podejmowanych samodzielnie czynności umysłowych. Czynności te polegają z jednej strony na rozwiązywaniu zadań i innych problemów matematycznych, a więc na logicznej analizie trudności matematycznej, jej identyfikacji oraz świadomym (kontrolowanym przez siebie, a nie przez nauczyciela) wyborze lub konstrukcji strategii rozwiązania. Z drugiej strony zaś na poszukiwaniu tych problemów, czyli dostrzeganiu nowych relacji matematycznych i skłonności do matematyzacji rzeczywistości.”[219] Podkreślić należy rolę

[216] E. Ludwikowska: *Myślenie matematyczne uczniów szkół ponadgimnazjalnych na przykładzie uczniów województwa kujawsko-pomorskiego*. W: *Diagnozowanie umiejętności praktycznych w toku kształcenia i egzaminowania*. Red. B. Niemierko, M. K. Szmigiel. Kraków: Grupa Tomami, 2017, s. 353.
[217] R. Raszka: R*ozwijanie myślenia matematycznego dziecka w przekonaniach nauczycieli i kandydatów na nauczycieli*. W: *Edukacja małego dziecka. Nauczyciel-wychowawca w przedszkolu i szkole*. Tom 5. Red. E. Ogrodzka-Mazur, U. Szuścik, M. Zalewska-Bujak. Cieszyn-Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 2013, s. 329.
[218] S. Neapolitański: *Zarys dydaktyki matematyki*. Warszawa: PZWS, 1958, s. 24.
[219] D. Klus-Stańska, A. Kalinowska: *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak”, 2004, s. 19.

samodzielności uczniów, która powinna być realizowana zarówno w zakresie doboru najwłaściwszych metod postępowania podczas rozwiązywania matematycznych zadań, jak i w zakresie samodzielnego tworzenia własnych pomysłów i strategii działania. Myślenie matematyczne warunkowane jest zatem aktywnością własną ucznia. Jak wykazała S. Semerádová [220] w procesie efektywnego rozwijania pojęć matematycznych istotną rolę pełni docenienie roli dziecięcych doświadczeń. Istotne jest także umożliwienie uczniom przejęcia inicjatywy oraz organizowanie sytuacji dydaktycznych w taki sposób, by nie ograniczać ich aktywności i kreatywności.

Jednym z wyznaczników myślenia jest jego sprawność. W odniesieniu do myślenia matematycznego istotne znaczenie mają sprawności takie jak posługiwanie się wygodnym, symbolicznym językiem, znajomość praw i reguł rozumowania, powodujących lepsze rozumienie i opanowanie definicji, twierdzeń i dowodów matematycznych oraz dostrzeganie różnic między strukturą logiczną języka naturalnego i języka matematycznego.[221] Myślenie matematyczne zawiera w sobie ponadto cechy myślenia logicznego. Logika (gr. *logos* – zgodny z rozumowaniem) polega na analizie języka i czynności badawczych, takich jak wnioskowanie, definiowanie, czy klasyfikowanie, w celu ustalenia reguł posługiwania się nimi oraz wykonywania czynności, które zapewnią tej działalności możliwie najwyższą skuteczność.[222] Pierwszą cechą myślenia matematycznego, zawierającą w sobie cechy myślenia opartego na logice jest uporządkowanie rozumiane jako niechaotyczne operowanie zasobem terminów ontologicznych i innych, dotyczących działań umysłowych. Druga cecha to zdawanie sobie sprawy z istoty znaczenia, oznaczania, nazywania, wyrażania oraz z własności stosunków semiotycznych. W dalszej kolejności jest nią biegłość w operacjach zapobiegających nieporozumieniom i defektom w używaniu słów i wyrażeń. Umiejętność definiowania i znajomość różnych rodzajów i form definicji, klasyfikowania, ustalania typologii i porządkowania zakresów nazw są uznawane za kolejną cechę myślenia matematycznego. Ostatnią z nich jest umiejętność poprawnego uzasadniania wniosków, krytycyzm wobec twierdzeń własnych i twierdzeń innych osób."[223] Jak widać, wszystkie te cechy są ściśle powiązane z myśleniem logicznym.

---

[220] S. Semerádová: *Didactical situations in building children`s ideas about matematical concepts in preschool education*. „*Didactica Mathematicae*" 2015, T. 37, s. 75-91.
[221] H. Siwek: *Kształcenie zintegrowane na etapie wczesnoszkolnym: rola edukacji matematycznej*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, 2004, s. 114-115.
[222] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 215-216.
[223] H. Siwek: *Kształcenie zintegrowane na etapie…,* s. 113.

Dzięki nim myślenie winno być jak najbardziej użyteczne i skuteczne w sytuacji rozwiązywania konkretnych problemów natury matematycznej.

Rozwijanie myślenia matematycznego uczniów przynosi najlepsze efekty, gdy odbywa się poprzez kształcenie problemowe. Podnosi bowiem aktywność myślową uczniów oraz stymuluje ich do wypracowywania własnych strategii rozwiązywania problemów. Istotnymi elementami są przy tym kontrola poznawcza oraz zrozumienie przez uczniów własnych działań.[224] Świadome postępowanie w sytuacji rozwiązywania problemów jest niezbędnym elementem myślenia matematycznego. Ponadto, warunkiem myślenia tego typu jest wytwarzanie i korzystanie przez uczniów z osobistych strategii zdobywania wiedzy. Są one istotniejsze z dydaktycznego punktu widzenia niż formalne procedury działania.[225] Zdaniem Cz. Kupisiewicza problematyzacja materiału nauczania sprzyja jego przyswajaniu przez uczniów. Dzieje się tak w szczególności w sytuacji, gdy problemy te nawiązują do posiadanych przez uczniów wiadomości i aktualnych zasobów ich doświadczenia życiowego. Ponadto problemy powinny być rozwiązywane na drodze czynności myślowych sprawdzanych za pomocą czynności praktycznych."[226] Problemy służące do aktywizowania myślenia matematycznego uczniów powinny być dobierane w sposób świadomy i celowy. Z punktu widzenia psychologii najlepszymi problemami będą te, które są interesujące dla uczniów oraz te, które będą w stanie wyzwolić w nich chęć podejmowania wysiłku służącego ich rozwiązaniu. Problemy, przed którymi stawiani są uczniowie muszą być dostosowane stopniem trudności rozwiązania do ich możliwości.[227] Jest to oczywiste, gdyż proponowanie uczniom rozwiązywania problemów wykraczających poza ich możliwości poznawcze jest działaniem szkodliwym, które ogranicza ich myślenie matematyczne. Dla rozwijania myślenia matematycznego, a co za tym idzie dla rozwijania potencjału intelektualnego uczniów, koniecznym jest zmiana orientacji poznawczej z nauczania bezpośredniego, w kierunku nauczania pośredniego, w którym wskaźnikiem poznawania są aktywności typu pomyśl – próbuj.[228] W trakcie nauczania matematyki należy zatem zezwolić

[224] A. Nowak-Łojewska: *Wybrane obszary edukacji…,* s. 16.
[225] D. Klus-Stańska, A. Kalinowska: *Rozwijanie myślenia matematycznego…,* s. 29.
[226] Cz. Kupisiewicz: *O efektywności nauczania problemowego. Z badań nad metodami nauczania przedmiotów matematyczno-przyrodniczych*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1960, s. 177.
[227] G. Treliński, H. Siwek: *Modernizacja kształcenia matematycznego i jej wpływ na rozwój dydaktyki: wybór artykułów Anny Zofii Krygowskiej z lat 1958 – 1972*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe WSP, 1985, s. 95-96.
[228] J. Nowak: *Matematyka – radość odkrywania czy reżim odtwarzania?* W: *Doświadczanie zmian w teorii i praktyce pedagogicznej*. Red. J. Skibska, J. Wojciechowska. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2015, s. s. 147.

uczniom na podejmowanie przez nich samodzielnych działań. Samodzielność ta powinna dotyczyć zarówno sposobów myślenia, czyli wytwarzania własnych pomysłów na rozwiązanie poszczególnych problemów i zadań, jak i postępowania w trakcie ich rozwiązywania.

W literaturze przedmiotu myśleniu matematycznemu przeciwstawia się pojęcie tak zwanej bezmyślności matematycznej, która „przejawia się w niezdolności do wyjścia poza mechaniczne techniki obliczeniowe, postrzegane jako izolowane sprawności, oraz w nieumiejętności konstruowania własnych strategii postępowania w nowej sytuacji".[229] Tak rozumiana bezmyślność matematyczna ogranicza możliwości uczniów, czyniąc ich bezsilnymi w sytuacji konieczności rozwiązania zadania niestandardowego, odbiegającego od wcześniej poznanych przez nich schematów postępowania.

Znaczącą trudnością w rozwijaniu myślenia matematycznego uczniów, z którą w praktyce edukacyjnej spotykają się nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej, jest brak dostępu do narzędzi diagnozujących jego poziom. Nauczycielskie testy i sprawdziany mierzą bowiem poziom wiedzy i umiejętności matematycznych. Nie służą jednak do oceny poziomu matematycznego myślenia. Brak możliwości pomiaru w tym zakresie utrudnia nauczycielom określanie efektywności ich działań.

Istotnym zagadnieniem edukacji matematycznej jest aktywność matematyczna uczniów. Aktywność to zdolność do intensywnego działania, do czynnego udziału w działalności.[230] Z punktu widzenia psychologii, aktywność jest własnością indywidualną jednostki, która polega na większej niż u innych częstości i intensywności podejmowania jakiegoś rodzaju działań.[231] Z punktu widzenia tematyki niniejszej pracy, najważniejszą formą aktywności jest aktywność intelektualna. Ma ona miejsce w szkole, w pracy naukowej oraz wszędzie tam, gdzie następuje samodzielne rozwiązywanie nowych problemów.[232]

Jako aktywność matematyczną ucznia klas początkowych rozumie się całokształt jego działań związanych z kształtowaniem pojęć i rozumowań typu matematycznego, stymulowanych przez różnego rodzaju sytuacje i zadania dotyczące liczb, działań na liczbach, zbiorów i figur bądź zadania praktyczne, związane z konkretnymi przedmiotami lub manipulacjami.[233] Można zatem powiedzieć, iż obejmuje ona wszystkie

[229] D. Klus-Stańska, A. Kalinowska: *Rozwijanie myślenia matematycznego…,* s. 19.
[230] E. Sobol: *Słownik wyrazów obcych*..., s. 26.
[231] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny*…, s. 19.
[232] Ibidem, s. 19.
[233] G. Treliński: *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna…,* s. 49.

działania ucznia, jakie podejmuje on w trakcie uczenia się matematyki. Zdaniem H. Moroza jest ona wynikiem procesu stymulowania czynności uczniów dzięki operatywnemu charakterowi matematyki. Czynności te, mające charakter konkretny, wyobrażeniowy oraz myślowy, mogą być realizowane w trakcie procesu interioryzacji, schematyzacji oraz matematyzacji myśli matematycznej uczniów. [234] Aktywność matematyczna obejmuje szereg czynności, które mają na celu przyswajanie wiedzy i umiejętności związanych z posługiwaniem się matematyką w codziennym życiu. Obejmuje zatem czynności konkretne, które są nakierowane na tworzenie lub badanie pojęć oraz rozumowań, a także czynności myślowe (wyobrażone i abstrakcyjne), skierowane na kształtowanie pojęć, ich badanie lub posługiwanie się nimi, na kształtowanie i prowadzenie rozumowań, formułowanie i rozwiązywanie problemów teoretycznych lub praktycznych.[235]

Rozwijanie aktywności matematycznej uczniów powinno być związane z ich samodzielną pracą w trakcie rozwiązywania problemów natury matematycznej. Jedną z istotnych trudności, jaką musi pokonywać nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej w trakcie rozwijania aktywności matematycznej swoich uczniów jest zróżnicowanie poziomu ich wiedzy i zdolności. W pokonywaniu tej trudności szczególnego znaczenia nabiera stosowanie przez nauczyciela zasady indywidualizacji procesu kształcenia. Indywidualizacja jest określana jako „przystosowanie pracy dydaktycznej do możliwości, zainteresowań i potrzeb poznawczych poszczególnych uczniów", a w jej procesie istotnymi elementami są „zdolności uczniów, czas potrzebny im na opanowanie poszczególnych przedmiotów lub tematów, a także treści oraz tempo uczenia się dzieci i młodzieży." [236] Indywidualizacja w nauczaniu polega na uwzględnieniu w systemie dydaktyczno-wychowawczym różnic występujących w rozwoju poszczególnych uczniów oraz na dostosowaniu do tych różnic treści, metod i organizacji działań pedagogicznych nauczyciela. [237] Oczywistym jest, że w procesie nauczania – uczenia się matematyki zasada indywidualizacji nabiera ogromnego znaczenia. Oddziaływania dydaktyczne na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej winny być dostosowanie do potrzeb i możliwości każdego ucznia. Nauczyciel musi zatem potrafić określić potencjał oraz ograniczenia swoich uczniów. Powinien on także stosować podczas zajęć matematycznych takie metody, które sprzyjają indywidualizacji pracy uczniów.

[234] H. Moroz: *Kształcenie matematyczne w rozwój…,* s. 20.
[235] G. Treliński: *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna…,* s. 49.
[236] Cz. Kupisiewicz, M. Kupisiewicz: *Słownik pedagogiczny*…, s. 65.
[237] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 136.

Wartościowymi metodami będą tu zatem metody problemowe, a wśród nich heurystyczna metoda G. Polya, dzięki której możliwa staje się indywidualizacja pracy uczniów. Metoda ta akcentuje samodzielność uczniów w procesie dochodzenia do wiedzy, dzięki czemu rozwija proces myślenia matematycznego oraz sprzyja rozwijaniu aktywności matematycznej uczniów.

W tym miejscu warto wspomnieć o rozwoju umiejętności matematycznych uczniów w młodszym wieku szkolnym. Kolejny podrozdział rozprawy zawiera najważniejsze informacje dotyczące tego zagadnienia.

2.5. Rozwój umiejętności matematycznych uczniów

Człowiek podczas swojego życia uczy się zarówno w warunkach szkolnych, jak i w warunkach naturalnych. Wiedza nabyta w warunkach naturalnych wspomaga kształtowanie umiejętności nabywanych później, w trakcie nauczania formalnego i usystematyzowanego.[238] W taki sam sposób nabywa się wiedzę i umiejętności także z zakresu edukacji matematycznej.

E. Gruszczyk-Kolczyńska wyodrębniła kręgi tematyczne wczesnego nauczania matematyki wśród których wyróżniamy orientację przestrzenną, rytmy, kształtowanie umiejętności liczenia, dodawania i odejmowania, wspomaganie rozwoju operacyjnego rozumowania, mierzenie długości, klasyfikowanie, układanie i rozwiązywanie zadań arytmetycznych, ważenie, mierzenie płynów, intuicje geometryczne, konstruowanie gier oraz zapisywanie czynności matematycznych.[239] Wymienione wyżej kręgi tematyczne obejmują umiejętności, których dziecko nabywa w trakcie uczenia się matematyki. Są one realizowane już na etapie nauczania przedszkolnego. Zgodnie z aktualnie obowiązującą Podstawą programową dziecko przygotowane do rozpoczęcia nauki w szkole, na koniec okresu wychowania przedszkolnego, powinno wykazywać konkretne osiągnięcia. Wyróżniono w niej osiągnięcia w zakresie fizycznego, emocjonalnego, społecznego oraz poznawczego obszaru rozwoju dziecka. Osiągnięcia związane z edukacją matematyczną zostały ujęte w poznawczym obszarze osiągnięć dziecka. Według zapisów dokumentu dziecko kończące edukację przedszkolną:

[238] U. Oszwa: *Zaburzenia rozwoju umiejętności arytmetycznych: problemy diagnozy i terapii*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 2006, s. 88.
[239] E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska: *Dziecięca matematyka: książka dla rodziców i nauczycieli*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1997, s. 10-11.

– „wyraża ekspresję twórczą podczas czynności konstrukcyjnych i zabawy, zagospodarowuje przestrzeń, nadając znaczenie umieszczonym w niej przedmiotom, określa ich położenie, liczbę, kształt, wielkość, ciężar, porównuje przedmioty w swoim otoczeniu z uwagi na wybraną cechę,
– klasyfikuje przedmioty według: wielkości, kształtu, koloru, przeznaczenia, układa przedmioty w grupy, szeregi, rytmy, odtwarza układy przedmiotów i tworzy własne, nadając im znaczenie, rozróżnia podstawowe figury geometryczne (koło, kwadrat, trójkąt, prostokąt),
– eksperymentuje, szacuje, przewiduje, dokonuje pomiaru długości przedmiotów, wykorzystując np. dłoń, stopę, but,
– określa kierunki i ustala położenie przedmiotów w stosunku do własnej osoby, a także w stosunku do innych przedmiotów, rozróżnia stronę lewą i prawą,
– przelicza elementy zbiorów w czasie zabawy, prac porządkowych, ćwiczeń i wykonywania innych czynności, posługuje się liczebnikami głównymi i porządkowymi, rozpoznaje cyfry oznaczające liczby od 0 do 10, eksperymentuje z tworzeniem kolejnych liczb, wykonuje dodawanie i odejmowanie w sytuacji użytkowej, liczy obiekty, odróżnia liczenie błędne od poprawnego,
– posługuje się w zabawie i w trakcie wykonywania innych czynności pojęciami dotyczącymi następstwa czasu np. wczoraj, dzisiaj, jutro, rano, wieczorem, w tym nazwami pór roku, nazwami dni tygodnia i miesięcy,
– rozpoznaje modele monet i banknotów o niskich nominałach, porządkuje je, rozumie, do czego służą pieniądze w gospodarstwie domowym."[240]

W zamyśle twórców Podstawy programowej umiejętności te są niezbędne do efektywnego rozpoczęcia uczenia się matematyki w klasie pierwszej szkoły podstawowej.

Rozwój zdolności i umiejętności w zakresie matematyki odbywa się na podstawie potrzeby poznawczej, która jest stymulowana wskutek pozytywnych przeżyć i czerpania radości z wysiłku intelektualnego.[241] Przeważająca liczba dzieci w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym lubi matematykę i chętnie się jej uczy. Ponadto przedszkolaki i uczniowie klas młodszych prezentują łatwość nabywania wiadomości i umiejętności

[240] *Podstawa programowa wychowania przedszkolnego dla przedszkoli, oddziałów przedszkolnych w szkołach podstawowych oraz innych form wychowania przedszkolnego z dnia 14.02.2017 r.* http://dziennikustaw.gov.pl/du/2017/356/1]. Data dostępu: 16.11.2018 r.

[241] U. Oszwa: *Zaburzenia rozwoju umiejętności…,* s. 102.

z zakresu edukacji matematycznej.[242] Należy mieć świadomość tego, iż pierwsze doświadczenia matematyczne dziecka mają miejsce na długo przed tym, zanim rozpocznie ono naukę w szkole czy w przedszkolu. Uzdolnienia dzieci do uczeniu się matematyki manifestują się bowiem we wczesnym okresie rozwoju. Istnienie intuicji matematycznych widoczne jest już w niemowlęctwie, kiedy to dziecko ogarnia oczyma otaczającą go przestrzeń, która dostarcza mu wielu różnorodnych bodźców wzrokowo-dotykowych.[243] Predyspozycje do uczenia się matematyki są niejako wrodzone, człowiek przychodzi z nimi na świat i stopniowo rozwija je w czasie trwania rozwoju osobniczego.

W dzisiejszym świecie zaleca się, by rozwijanie umiejętności matematycznych dzieci rozpoczynać jak najwcześniej. G. Doman i J. Doman przytaczają dwa kluczowe powody, dla których małe dzieci powinny uczyć się liczyć. Pierwszym z nich jest to, iż umiejętność liczenia jest jedną z najważniejszych funkcji życiowych. Dzieje się tak, gdyż w cywilizowanym świecie matematyka stanowi podstawę egzystencji. Człowiek nieustannie obcuje z nią w ciągu swojego życia. Znacznie ważniejszy zdaje się być jednak drugi powód przytoczony przez Autorów. Otóż „dzieci powinny się nauczyć liczyć w najmłodszym możliwym wieku z powodu skutków, jakie wywoła to w fizycznym rozwoju samego mózgu i „produkcie" tego fizycznego rozwoju, który to „produkt" nazywamy inteligencją".[244] Wielu Autorów[245] podkreśla rolę matematyki w procesie rozwoju myślenia, o czym wspominano już we wcześniejszych podrozdziałach niniejszej pracy.

Rozwój pojęć matematycznych jest związany z rozwojem poznawczym. Zdaniem E. Gruszczyk-Kolczyńskiej edukację matematyczną należy łączyć z intensywnym wspomaganiem rozwoju umysłowego dziecka.[246] Dzieci rodzą się z predyspozycjami do uczenia się. Ważne jest, by w umiejętny sposób rozwijać ich zdolności w tym zakresie oraz, by zacząć czynić to jak najwcześniej.[247] W procesie uczenia się matematyki istotną rolę odgrywa moment, w którym dziecko rozpoczyna naukę w warunkach formalnych.

[242] L. Szymczyk: *Wspomaganie rozwoju uzdolnień matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym*. W: *Doświadczanie zmian w teorii i praktyce pedagogicznej*. Red. J. Skibska, J. Wojciechowska. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2015, s. 177.
[243] G. Rura, M. Klichowski: *Kompetencje matematyczne – założone…,* s. 214.
[244] G. Doman, J. Doman: *Subtelna rewolucja. Liczenie od pierwszego roku życia*. Przeł. P. Gancarczyk, K. Gancarczyk. Gliwice: Wydawnictwo HELION, 2013, s. 57.
[245] m. in. W. Okoń, E. Gruszczyk-Kolczyńska, Cz. Kupisiewicz, D. Klus-Stańska i inni.
[246] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji*. Warszawa: Wydawnictwo Edukacja Polska, 2009, s. 43.
[247] E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska: *Wspomaganie rozwoju umysłowego trzylatków i dzieci starszych wolniej się rozwijających*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2004, s. 7.

Za gotowe do rozpoczęcia uczenia się matematyki w klasie pierwszej uznaje się dziecko, które osiągnęło odpowiedni poziom dojrzałości do uczenia się matematyki. E. Gruszczyk-Kolczyńska, odwołując się do teorii postpiagetowskich, stworzyła pojęcie dojrzałości do uczenia się matematyki w warunkach szkolnych, na które składają się komponenty specyficzne i ogólnopoznawcze[248]. Autorka wyróżniła następujące wskaźniki określające dojrzałość w tym zakresie:

- „świadomość, w jaki sposób należy liczyć przedmioty – dzieci powinny potrafić odróżniać błędne liczenie od poprawnego oraz sprawnie dodawać i odejmować w zakresie 10,
- odpowiedni poziom operacyjnego rozumowania na poziomie konkretnym, który jest niezbędny do zrozumienia pojęcia liczny naturalnej,
- zdolność do funkcjonowania na poziomie symbolicznym i ikonicznym bez potrzeby odwołania się do poziomu enaktywnego oraz umiejętność swobodnego przechodzenia z jednego poziomu reprezentacji na drugi oraz duża dojrzałość funkcjonowania na poziomie symboli i przedstawień graficznych,
- stosunkowo wysoki poziom odporności emocjonalnej na sytuacje trudne,
- należyta sprawność manualna, precyzja spostrzegania i koordynacja wzrokowo-ruchowa, a także odpowiedni poziom koncentracji."[249]

Spełnienie przez dziecko powyższych kryteriów jest kluczowe dla efektywnego rozpoczęcia uczenia się matematyki w warunkach klasy szkolnej. Brak dojrzałości w opisanych aspektach przyczyniać się może do występowania trudności w uczeniu oraz do stopniowego zniechęcania się uczniów wobec tego przedmiotu.

Jedną z istotnych umiejętności matematycznych rozwijanych w nauczaniu początkowym jest prawidłowe posługiwanie się pojęciami matematycznymi. W procesie kształtowania pojęć matematycznych u dziecka punktem wyjścia są czynności konkretne, wykonywane w sposób manipulacyjny na konkretnych przedmiotach. [250] Procesy myślowe uczniów w wieku wczesnoszkolnym są ściśle powiązane z działaniem na konkretach oraz z praktyką. Stąd też, by w optymalny sposób zadbać o rozwój myślenia uczniów, należy angażować w ten proces wszystkie sfery ich rozwoju. [251]

[248] U. Oszwa: *Psychologiczna analiza procesów operowania liczbami u dzieci z trudnościami w matematyce*. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, 2009, s. 22.
[249] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Dzieci ze specyficznymi…*, s. 8.
[250] B. Dudel, J. Szada-Borzyszkowska: *Kompetencje matematyczne i podstawowe…,* s.101.
[251] B. Ochmańska: *Możliwości rozwojowe i potrzeby dziecka w młodszym wieku szkolnym w kontekście edukacji matematycznej*. W: *Rozwijanie zainteresowań i zdolności matematycznych uczniów klas I-III*

Jak zauważa I. Adamek ukierunkowując aktywność dziecka należy dobierać zadania w taki sposób, by wykraczały one nieco poza jego możliwości, czyli by odwoływały się do sfery najbliższego rozwoju.[252]

Warto pamiętać także o tym, iż by móc wspierać uczniów w procesie kształtowania w ich umysłach pojęć matematycznych, a tym samym pobudzać ich aktywność matematyczną, należy przedstawiać poszczególne pojęcia w sposób dostępny ich poznaniu. Nauczyciel powinien być zorientowany w prawidłowościach rozwojowych, które odpowiadają za rozwój myślenia uczniów. Obowiązkiem nauczyciela jest dostosowywanie treści, metod, środków dydaktycznych i form organizacyjnych procesu kształcenia do sposobu myślenia dzieci w określonym etapie rozwojowym.[253] Jest to konieczne szczególnie w kontekście uczenia się matematyki. Nabywanie pojęć związanych z edukacją matematyczną jest w dużej mierze warunkowane poziomem myślenia uczniów, na co wskazuje między innymi E. Gruszczyk-Kolczyńska.[254] Dlatego też nauczyciel powinien być zorientowany w prezentowanym przez swoich uczniów poziomie rozumowania po to, by mógł w sposób profesjonalny i rzetelny dostosowywać do niego poziom realizowanych przez siebie zajęć matematycznych.

Pojęcia matematyczne dotyczą obiektów nieistniejących w świecie fizycznym otaczającym dziecko, wynurzają się one niejako ze świata fizycznego i kształtują w procesie matematyzacji.[255] Matematyka, jej język, twierdzenia i pojęcia, są ze swej natury operacyjne.[256] Operacje logiczne, stanowiące istotę myślenia na poziomie konkretnym, za pomocą których dziecko opisuje i wyjaśnia rzeczywistość, decydują o tworzeniu się i funkcjonowaniu u niego struktury matematycznej.[257] Zatem, by dziecko w efektywny sposób mogło rozpocząć uczenie się matematyki powinno posługiwać się rozumowaniem operacyjnym. Jedną z przyczyn trudności w uczeniu się matematyki u uczniów jest reprezentowany przez nich niski poziom rozumowania operacyjnego.[258]

---

szkoły podstawowej. Poradnik dla nauczyciela. Red. I. Fechner-Sędzicka, B. Ochmańska, W. Odrobina. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji, 2012, s. 11.

[252] I. Adamek: *Rozwiązywanie problemów przez…,* s. 12.

[253] H. Moroz: *Współczesne środki dydaktyczne…,* s. 9.

[254] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Ćwierć wieku modernizacji nauczania matematyki. Pedagogiczna analiza sposobów i konsekwencji wprowadzania idei nowej matematyki do edukacji matematycznej dzieci*. „*Matematyczna edukacja dzieci*". 2017, Nr. 2.; E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi…,* s. 8 i in.

[255] E. Swoboda: *Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci*. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2006, s. 26.

[256] Z. Krygowska: *Zarys dydaktyki matematyki...*

[257] I. Gomółka-Walaszek: *Operacyjność myślenia konkretnego…, s*. 30.

[258] U. Oszwa: *Rozwój i ocena umiejętności matematycznych dzieci sześcioletnich*. W: *Doradca nauczyciela sześciolatków*. Warszawa: Centrum Metodyczne Pomocy Psychologiczno-Pedagogicznej, 2006, s. 2.

Poziom rozumowania nie jest jednak jedynym elementem, który warunkuje rozumienie przez dziecko języka matematycznego. Język ten ma najczęściej strukturę dwupoziomową – składa się z warstwy słownej i logicznej. Warstwa logiczna to wypowiedzi matematyczne przekazywane za pomocą zapisu symbolicznego, natomiast warstwa słowna (werbalna) dotyczy już nie obiektów matematycznych, ale zdań o tych obiektach.[259] Warstwa werbalna realizowana jest za pomocą języka naturalnego. Uczniowie w młodszym wieku szkolnym, szczególnie na początku edukacji posługują się właśnie językiem naturalnym. Nie powinno zatem dziwić, iż mogą oni wykazywać trudności ze zrozumieniem formalnych, symbolicznych zapisów.

Edukacja matematyczna na etapie nauczania wczesnoszkolnego skupia się wokół pojęcia liczby naturalnej. Liczba jest to „wytwór abstrakcji oznaczający liczność danego zbioru przedmiotów".[260] Liczby naturalne powstają w wyniku zliczania przedmiotów i są opisywane aksjomatycznie jako wynik wielokrotnego dodawania jedynek.[261] Na pierwszym etapie edukacyjnym uczniowie dokonują operacji matematycznych w zakresie czterech podstawowych działań na liczbach. Są nimi dodawanie (suma), odejmowanie (różnica), mnożenie (iloczyn) oraz dzielenie (iloraz). Dział matematyki zajmujący się zasadami wykonywania obliczeń na liczbach naturalnych oraz badaniem ich właściwości to arytmetyka.

Ważną umiejętnością związaną z liczbami jest ich przeliczanie, które obejmuje wiele operacji myślowych. Liczenie w najbardziej podstawowym znaczeniu oznacza „posługiwanie się liczbami".[262] Liczenie polega na wymawianiu – na głos lub w myśli – kolejnych liczebników oraz na jednoczesnym – myślowym lub fizycznym – wskazywaniu kolejnych przeliczanych elementów.[263] Dzieci na etapie edukacji przedszkolnej potrafią najczęściej przeliczać elementy małych zbiorów. Należy jednak pamiętać, iż sama umiejętność liczenia nie oznacza, że dziecko rozumie czym jest pojęcie liczby.[264] Dlatego ważne jest, by nauczyciele kształtowali w umysłach dzieci umiejętność korzystania z zasad i strategii prawidłowego przeliczania.

---

[259] A. Sajdak: *Wprowadzenie dziecka w świat języka matematyki.* W: *Mój uczeń przekracza próg szkolny. Profilaktyka niepowodzeń szkolnych sześcio-, siedmio- i dziewięcio-, dziesięcio- latków.* Red. J. Kędzierska, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2005, s. 38.

[260] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 212.

[261] Z. Muzyczka, M. Kordos: *Matematyka*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1996, s.84.

[262] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 212.

[263] Z. Semadeni: *Matematyka w edukacji początkowej…,* s. 47.

[264] Z. Semadeni: *Nauczanie początkowe matematyki*. Tom 2. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1984, s. 248.

Bazowymi sprawnościami, niezbędnymi do świadomego i prawidłowego liczenia jest wyodrębnianie przedmiotów do policzenia oraz umiejętność liczenia ich w określony sposób. Ponadto istotne jest ustalanie, gdzie jest więcej, a gdzie jest mniej, które dokonuje się za sprawą przeliczania przedmiotów. Równie istotnym elementem jest także umiejętność określania wyniku dodawania i odejmowania. [265] Dziecko nabywa te umiejętności w toku obserwacji oraz własnych doświadczeń. Doświadczenia te powinny opierać się na samodzielnej manipulacji przedmiotami. Podstawą niezbędną do kształtowania pojęcia liczby naturalnej i działań na liczbach są wykonywane przez dzieci odpowiednie czynności na zbiorach. [266] Rozumienie podstawowych zasad związanych z liczeniem tworzy fundament umiejętności przetwarzania liczb. W literaturze występuje pięć podstawowych zasad dziecięcego liczenia.

1. Zasada stałości porządku – liczenie odbywa się zawsze w tej samej kolejności.
2. Zasada jeden do jednego – każdemu przeliczanemu przedmiotowi (obiektowi) odpowiada dokładnie jedna nazwa, czyli dokładnie jeden liczebnik.
3. Zasada kardynalności – ostatni wypowiadany podczas liczenia liczebnik ma podwójne znaczenie. Informuje on o miejscu ostatniego przeliczanego obiektu w całym zbiorze, przy czym jednocześnie określa liczebność całego przeliczanego zbioru.
4. Zasada abstrakcyjności – dziecko uświadamia sobie, że liczyć można wszystkie obiekty, abstrahując od ich cech fizycznych. Cechy jakościowe obiektów nie mają wpływu na liczebność zbioru.
5. Zasada niezależności porządkowej – liczenie można zaczynać od dowolnego elementu zbioru, gdyż kierunek i porządek wskazywania nie ma znaczenia.[267]

Nabycie przez dziecko umiejętności prawidłowego liczenia jest związane z uświadomieniem sobie przez niego znaczenia opisanych powyżej zasad liczenia. W momencie, gdy dziecko przyswoi powyższe zasady będzie mogło korzystać z nich w sposób świadomy. Przeliczenie przez dziecko zbioru obiektów z uwzględnieniem wszystkich zasad dziecięcego liczenia powinno zakończyć się sukcesem, czyli prawidłowym określeniem jego wielkości.

Istotną rolę w opanowaniu przez dziecko pojęcia liczby naturalnej ma myślenie operacyjne na poziomie konkretnym.[268] E. Gruszczyk-Kolczyńska empirycznie wykazała,

---

[265] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Dzieci ze specyficznymi…, s*. 16-17.
[266] Z. Semadeni: *Nauczanie początkowe matematyki*…, s. 213.
[267] U. Oszwa: *Psychologiczna analiza procesów operowania liczbami u dzieci z trudnościami w matematyce*. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, 2009, s. 23.

że dzieci, które nie osiągnęły odpowiedniego poziomu rozumowania wykazują trudności w uczeniu się matematyki.[269] Obejmują one trudności w zakresie przyswajania pojęcia liczby naturalnej, opanowywania czterech podstawowych działań arytmetycznych oraz rozwiązywania zadań matematycznych.

Ważną umiejętnością matematyczną jest także umiejętność przetwarzania liczb. W aktualnych rozważaniach na temat rozwoju procesów tego przetwarzania wyróżnia się trzy kierunki. Pierwszy z nich przedstawia rozwój umiejętności matematycznych z perspektywy ogólnego rozwoju funkcji poznawczych i inteligencji operacyjnej. Szczególne znaczenie ma tutaj stadialność procesu operowania liczbą. Drugi kierunek ukazuje rozwój cząstkowych umiejętności arytmetycznych, niezbędnych z punktu widzenia szkolnej edukacji matematycznej. W ujęciu tym akcentuje się szczególnie elementarne składniki sprawności arytmetycznych. W trzecim podejściu eksponuje się rolę społeczno-kulturowych uwarunkowań rozwoju umiejętności liczenia. Opierają się one na intuicyjnych, nabywanych w warunkach pozaszkolnych sposobach rozwiązywania zadań arytmetycznych.[270] Wydaje się, iż wszystkie te elementy mają znaczenie w procesie przyswajania przez dziecko umiejętności związanych z przetwarzaniem liczb. Rozwój sprawności w zakresie posługiwania się liczbami ściśle wiąże się ze stadialną koncepcją rozwoju poznawczego J. Piageta. O uczeniu się matematyki decydują także uwarunkowania społeczne i kulturowe. Ponadto ważną rolę w tym procesie odgrywa szkolna i pozaszkolna edukacja. Przyswajanie pojęć związanych z liczbą będzie zatem warunkowane wieloma czynnikami związanymi zarówno z rozwojem psychicznym osoby uczącej się, jak i ze środowiskiem szkolnym i społeczno-kulturalnym, w którym ta osoba dorasta.

Na etapie nauczania początkowego uczniowie prócz kształtowania pojęcia liczby naturalnej zapoznają się także z pojęciami z zakresu geometrii. Pojęcia geometryczne, dotyczące stosunków przestrzennych kształtują się w powiązaniu z pojęciami liczbowymi.[271] Rozwój umiejętności geometrycznych jest związany z rozwojem umiejętności z zakresu arytmetyki. Geometria jest działem matematyki zajmującym

---

[268] S. Domoradzki: *Intuicyjny i formalny sposób kształtowania pojęcia liczby naturalnej u dzieci*. W: *Dziecko i matematyka*. Red. E. Swoboda, J. Gunčaga. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2009, s. 189.
[269] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Dzieci ze specyficznymi…,* s. 48.
[270] U. Oszwa: *Psychologiczna analiza procesów…,* s. 19.
[271] Z. Semadeni: *Nauczanie początkowe matematyki*. Tom 1. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1981, s. 214.

się badaniem figur geometrycznych i zależności występujących pomiędzy nimi.[272] Na wczesnym etapie nauczanie geometrii ma charakter propedeutyczny, służy zaznajomieniu uczniów z podstawowymi figurami oraz ich podstawowymi własnościami. W dalszych latach szkolnej nauki wiedza ta będzie stanowiła bazę wyjściową do przyswajania kolejnych informacji z zakresu geometrii płaskiej oraz przestrzennej.

Posługiwanie się przez uczniów pojęciami z zakresu geometrii stanowi niezwykle istotny element edukacji matematycznej, równie ważny, jak umiejętność posługiwania się liczbami. E. Gruszczyk-Kolczyńska postuluje konieczność zwrócenia szczególnej uwagi na kształtowanie w umysłach dzieci intuicji geometrycznych. Intuicje te są stopniowo przekształcane w dziecięcych umysłach w pojęcia geometryczne.[273]

Na etapie wczesnoszkolnym pojęcia geometryczne są tworzone na bazie modelowania stosunków przestrzennych materialnego świata.[274] Ich rozwój opiera się w szczególności na percepcji wzrokowej oraz częściowo na percepcji dotykowej.[275] Geometria ma charakter poglądowy, pojęcia z jej zakresu powinny być przybliżane uczniom za pomocą modeli, przy użyciu różnorakich mediów i materiałów dydaktycznych, dzięki którym możliwe jest zademonstrowanie ich różnych własności.[276] Jest to szczególnie istotne w przypadku pracy z uczniami młodszymi. Cechą charakteryzującą myślenie uczniów w młodszym wieku szkolnym jest bardzo silnie widoczna potrzeba stałego odwoływania się w działaniach do czynności konkretnych. W związku z czym uczniowie przyswajają abstrakcyjne pojęcia podczas manipulacji konkretnymi przedmiotami. W rozwijaniu pojęć geometrycznych ważne jest zatem, by uczniowie korzystali podczas zajęć z klocków, geoplanów, przestrzennych modeli figur geometrycznych i innych tego rodzaju środków.

W procesie nabywania umiejętności związanych z geometrią, istotne znaczenie ma koncepcja poziomów myślenia geometrycznego, której twórcami są Dieke van Hiele-Geldof i Pierre van Hiele. Zgodnie z tą koncepcją uczniowie poznają figury nie za sprawą percepcji, lecz głównie za sprawą własnej aktywności. Wyróżnione w niej zostały trzy poziomy rozumienia geometrii, przy czym zaznaczyć należy, iż poziom trzeci jest uszczegóławiany na kilka kolejnych poziomów. Najniższym poziomem jest poziom

[272] E. Sobol: *Słownik wyrazów obcych*…, s. 386.
[273] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Edukacja matematyczna w klasie I. Książka dla nauczycieli i rodziców*. Kraków: Wydawnictwo Bliżej Przedszkola, 2014, s. 18.
[274] H. Siwek: *Kształcenie zintegrowane na etapie…,* s. 222.
[275] Z. Semadeni: *Matematyka w edukacji początkowej…, s.* 119.
[276] D. Zaremba: *Podstawy nauczania matematyki*…, s. 151.

wizualny (wzrokowy), na którym dziecko rozpoznaje kształty za pomocą spostrzegania i w ten sposób także o nich myśli. Jest to poziom charakteryzujący myślenie dziecka w wieku 0-9 lat. Kolejny to poziom deskryptywny (opisowy). Na tym poziomie kształty są ujmowane przez dziecko na podstawie ich własności. Przyjmuje się, iż na tym poziomie powinny znajdować się dzieci w wieku 9-12 lat. Trzecim poziomem jest poziom logiczny (teoretyczny). W jego obrębie wyróżnić można w kolejności poziom intuicyjnego wnioskowania, poziom dedukcji z aksjomatów oraz najwyższy w hierarchii – poziom rygorystycznej formalnej dedukcji. [277] Zdaniem Z. Semadeniego opisane powyżej poziomy mogą dotyczyć nie tylko nabywania umiejętności geometrycznych ale w ogólne pojęć matematycznych. [278] Należy oczywiście pamiętać, iż rozwój jest uzależniony od indywidualnych cech jednostki oraz, że w przypadku różnych ludzi może on przebiegać wedle innego tempa. Stąd też powyższe próby periodyzacji poszczególnych okresów rozwoju myślenia geometrycznego mają charakter jedynie przybliżony.

Zgodnie z przytoczoną powyżej koncepcją nauczanie geometrii powinno opierać się na czynnościach wykonywanych samodzielnie przez uczniów. Podkreślona jest w niej rola aktywności własnej uczniów. W procesie przyswajania geometrii niezbędna jest odpowiednio rozwinięta wyobraźnia przestrzenna oraz pewnego rodzaju wrażliwość percepcyjna na kształty i relacje między nimi, a wartościami matematycznymi, z którymi mogą być związane. [279] Orientacja przestrzenna jest zdolnością do rozeznawania kierunków w środowisku na podstawie bodźców zewnętrznych. [280] Teoretyczny model kształcenia orientacji przestrzennej powinien uwzględniać prawidłowości rozwojowe dziecka i przebiegać w kierunku:

- „od poziomu enaktywnego do ikonicznego i symbolicznego,
- od poczucia przestrzeni do ilustrowania jej i opisywania,
- od znajomości schematu ciała do przeniesienia go na inne osoby, przedmioty i obiekty przestrzeni,
- od rozumienia pojęć przeciwnych – niesymetrycznych do rozumienia pojęć symetrycznych.”[281]

[277] Z. Semadeni: *Matematyka w edukacji początkowej…, s*. 121-122.
[278] Z. Semadeni: *A comparison of Hejný levels of the development of student's geometric thinking with the van Hiele levels*. *„Journal of Modern Science”* 2018, tom 2, s. 56.
[279] D. Klus-Stańska, A. Kalinowska: *Rozwijanie myślenia matematycznego…,* s. 80.
[280] E. Sobol: *Słownik wyrazów obcych…*, s. 801.
[281] J. Głodkowska: *Pomóżmy dziecku z upośledzeniem umysłowym doświadczać przestrzeni*, Warszawa: Wyższa Szkoła Pedagogiki Specjalnej, 2000, s. 159.

Analizując postulaty tego modelu można stwierdzić, że opracowany jest z myślą o jednej z podstawowych zasad nauczania, a mianowicie o zasadzie stopniowania trudności.

W procesie nauczania – uczenia się geometrii ważna jest także wyobraźnia geometryczna, polegająca na geometrycznym modelowaniu innych działów matematyki oraz na tworzeniu dokładnych wyobrażeń o abstrakcyjnych figurach geometrycznych bez wykorzystywania rzeczywistości, przy udziale intuicji.[282] Nie ulega wątpliwości, iż kształtowanie umiejętności geometrycznych oraz nauczanie pojęć związanych z przestrzenią mogą, a w wielu przypadkach powinny przebiegać w oparciu o samodzielne działania manipulacyjne uczniów.

Kształtowanie umiejętności geometrycznych przynosi wiele pozytywnych skutków w szeroko rozumianym rozwoju poznawczym człowieka. Do walorów dydaktycznych związanych z tym kształtowaniem należą:

- „pojęcia geometryczne nasuwają się uczniom w sposób naturalny,
- graniczny charakter geometrii sprzyja lepszemu zrozumieniu dedukcji,
- intuicja geometryczna skutecznie broni przed błądzeniem,
- geometria pozwala rzetelnie skonstruować kompleksowe środki kontroli poziomu opanowania całej szkolnej matematyki."[283]

Opanowanie przez ucznia podstawowych informacji z zakresu geometrii jest niezbędnym elementem jego kształcenia matematycznego. Na etapie nauczania wczesnoszkolnego uczenie geometrii ma charakter poglądowy. Uczniowie poprzez samodzielne manipulacje konkretnymi obiektami poznają podstawowe własności figur i przestrzeni. W kolejnych latach nauki wiadomości te są stopniowo rozszerzane. Nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej powinni podejmować takie działania, by pierwsze doświadczenia uczniów zwiane z geometrią były doświadczeniami pozytywnymi i w jak największym stopniu związanymi z ich działaniami praktycznymi.

Kształtowanie umiejętności matematycznych uczniów, zarówno w zakresie operowania liczbami naturalnymi, jak i umiejętności geometrycznych jest jednym z głównych celów pracy nauczycieli, począwszy od nauczycieli wychowania przedszkolnego. Zadanie to jest szczególnie istotne w przypadku pracy z uczniami młodszymi. Mimo to bywa, iż matematyczne umiejętności uczniów nie zawsze

---

[282] J. Trocki: *Struktura procesu kształcenia matematycznego*. Rzeszów: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, 2000, s. 101.
[283] Ibidem, s. 100.

są rozwijane w odpowiednim zakresie i we właściwy sposób. F. Urbańczyk zwraca ponadto uwagę na to, iż podczas nauczania matematyki nie zawsze jest rozwijana bodaj najważniejsza umiejętność, czyli umiejętność samodzielnego myślenia. W opinii tegoż Autora przyczyna takiego stanu rzeczy tkwi w nieodpowiednim sposobie zadawania pytań przez nauczyciela, które stanowią „łańcuch nieustannych bodźców". Taki stan rzeczy ogranicza myślenie uczniów do wysnuwania bezpośrednich wniosków, po czym łańcuch ten się urywa.[284]

J. Bonar wskazała przyczyny braku lub mało efektywnego wspomagania ucznia w rozwijaniu wczesnych umiejętności matematycznych w okresie edukacji szkolnej. [285]

Do przyczyn tych należą:

- ubóstwo programów nauczania matematyki oraz podręczników,
- zbyt mała ilość czasu przeznaczana na wykorzystywanie pomocy i środków dydaktycznych podczas zajęć matematycznych,
- zbyt duży nacisk na szybkość rozwiązywania zadań przez uczniów,
- zbyt częste rozwiązywanie przez uczniów wielu zadań tego samego typu.

W kwestii programów nauczania matematyki oraz podręczników do jej nauczania wielu specjalistów z zakresu dydaktyki matematyki zwraca uwagę na konieczność wprowadzania zmian. W przypadku wykorzystywania podręczników przez nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej podkreśla się, iż podczas zajęć matematycznych za bardzo skupiają się oni na wypełnianiu gotowych ćwiczeń i kart pracy. E. Gruszczyk-Kolczyńska uważa, iż korzystanie przez nauczycieli z gotowych pakietów edukacyjnych jest działaniem bardzo szkodliwym. [286] Prawidłowa realizacja edukacji matematycznej w pracy z najmłodszymi uczniami powinna w jak największym stopniu opierać się na ich samodzielnych, manipulacyjnych działach.

Uczenie się matematyki na każdym etapie szkolnej edukacji jest związane z rozwiązywaniem matematycznych zadań. W następnym rozdziale przedstawionej dysertacji opisano zatem uwarunkowania dotyczące rozwiązywania przez uczniów zadań z zakresu edukacji matematycznej, w szczególności skupiono się na zadaniach problemowych oraz metodach ich rozwiązywania.

[284] F. Urbańczyk: *Przegląd historyczny poglądów na zagadnienie rozwijania zdolności myślenia za pomocą matematyki*. W: *Studia pedagogiczne. Kształcenie samodzielności myślenia w procesie nauczania*. Tom IV. Red. B. Suchodolski. Wrocław: Zakład Narodowy im. Ossolińskich Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, 1957, s. 228.
[285] J. Bonar: *O potrzebie rozwijania…* s. 82-83.
[286] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Papierowa matematyka*. „*Matematyka*" 2013, nr. 1.

3. Rozwiązywanie zadań jako główna aktywność uczniów podczas zajęć matematycznych

„Jeżeli chcecie nauczyć się pływać, to trzeba, żebyście weszli do wody;
jeśli zamierzacie nauczyć się rozwiązywania zadań,
to trzeba, żebyście je rozwiązywali.”[287]
/George Polya/

Matematyka nie istnieje bez rozwiązywania zadań. Kształtowanie tej umiejętności może przebiegać jednym z dwóch głównych sposobów. W pierwszym z nich uczniowie zostają zapoznani z algorytmem rozwiązywania danego typu zadań, po czym rozwiązują określoną ich ilość, najczęściej z uwzględnieniem zasady stopniowania trudności. Natomiast w drugim sposobie zadania mają charakter problemowy, a do ich rozwiązywania proponuje się uczniom wykorzystanie metod heurystycznych. W obu tych sposobach działania nauczyciela powinny być skoncentrowane głownie na pobudzaniu samodzielności uczniów oraz na organizowaniu i rozwijaniu ich aktywności w trakcie rozwiązywania zadań.[288] Samodzielność ta jest niezbędnym elementem, gdyż to dzięki niej uczniowie rozwijają umiejętność myślenia.

3.1. Zadania matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej

Zadanie to sytuacja, w której pojawia się potrzeba lub też konieczność, przezwyciężenia pewnych trudności, wywołująca określone działanie, którego efektem są z kolei jakieś osiągnięcia w sferze materialnej bądź też w dziedzinie wartości.[289] Jest to definicja, zawierająca w sobie dwa istotne warunki. Pierwszy z nich oznacza, że dana sytuacja może zostać uznana za zadanie, gdy wiąże się z pokonaniem trudności przez osobę, przed którą została ona postawiona. Drugi warunek wiąże wykonanie

[287] G. Polya: *Odkrycie matematyczne…*, s. 13.
[288] G. Treliński: *Aspekty dydaktyczne zadań matematycznych*. Kielce: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej im. J. Kochanowskiego w Kielcach, 1998, s. 6.
[289] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 459.

zadania z osiągnięciem określonego efektu. W. Kojs w definicji zadania wskazał najistotniejsze jego elementy. Zgodnie z ujęciem Autora zadanie jest zleceniem uzyskania pewnego stanu jakiejś rzeczy, które odnosi się do przyszłości, czyli do przyszłych stanów rzeczy. Ponadto zlecenie to przyjmuje najczęściej postać słowną, obejmuje opis żądania i danych, które mają zostać przekształcone.[290] Na potrzeby podjętych w rozprawie rozważań analizie poddane zostaną zadania mające związek z edukacją matematyczną. W matematyce wszystko jest zadaniem, a rozwiązywanie zadań jest konieczne by umieć matematykę.[291] Zadanie jest zatem najistotniejszym elementem uczenia się matematyki, występującym na każdym etapie edukacyjnym.

Istnieje wiele definicji określających zadanie matematyczne. W niniejszej rozprawie rozumiane będzie ono jako *„każda informacja dla ucznia, zawierająca opis sytuacji i związane z nią pytanie lub polecenie oraz wymagająca od niego wykonania określonych czynności praktycznych lub teoretycznych, związanych ze wzbogacaniem bądź też stosowaniem posiadanej wiedzy matematycznej".*[292] Definicja ta, autorstwa J. Grzesiaka została wybrana, ponieważ w swojej ogólności zawiera wszystkie niezbędne warunki, jakie powinna spełniać sytuacja, przed którą stawiany jest uczeń podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej.

Rozwiązujący zadania matematyczne musi posiadać właściwy poziom odporności emocjonalnej.[293] E. Gruszczyk-Kolczyńska zaliczyła odpowiedni poziom dojrzałości emocjonalnej do jednego ze wskaźników gotowości dziecka do rozpoczęcia uczenia się matematyki.[294] O stanie odporności emocjonalnej niezbędnej do rozwiązania zadania matematycznego decyduje m.in. trudność tego zadania. Odpowiednio dobrane zadanie nie może być dla ucznia zbyt łatwe, ale także nie może przekraczać jego możliwości poznawczych. Odpowiedni dobór zadań związany jest zatem z umiejętnością określenia, które zadanie jest dla ucznia łatwiejsze, a które trudniejsze.[295] Dokonanie takiego rozróżnienia wymaga od nauczyciela dobrego poznania uczniów. Dane zadanie może być przecież przez jednego ucznia uznane za łatwe, podczas gdy dla innego będzie stanowiło barierę nie do pokonania.

---

[290] W. Kojs: *Zadania dydaktyczne w nauczaniu początkowym*. Katowice: Uniwersytet Śląski, 1988, s. 18.
[291] G. Treliński: *Kształcenie matematyczne w klasach początkowych*. Kielce: WŚ, 1995, s. 7.
[292] J. Grzesiak: *Konstruowanie i dobór zadań matematycznych w klasach początkowych*. Koszalin: Instytut Kształcenia nauczycieli – ODN, 1984, s. 30.
[293] U. Oszwa: *Zaburzenia rozwoju umiejętności… ,* s. 97.
[294] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Dzieci ze specyficznymi…,* s. 8.
[295] A. Tyl: *Trudności w rozwiązywaniu matematycznych zadań tekstowych u uczniów klas I-III szkoły podstawowej*. W: *Folia Paedagogica et Psychologica. 30, Pedagogika*. Red. R. Więckowski, Łódź 1993, s. 131.

Dla oceny efektywności podejmowanych działań w nauczania matematyki przydatna jest diagnoza umiejętności matematycznych uczniów, dokonywana najczęściej poprzez rozwiązywanie przez uczniów zadań matematycznych (w testach nauczycielskich). Diagnoza taka może zostać przeprowadzona przez nauczyciela lub szkolnych specjalistów, także w oparciu o istniejące narzędzia standaryzowane. Można do tego celu wykorzystać m.in. testy autorstwa E. Gruszczyk-Kolczyńskiej.[296] lub testy do diagnozy funkcjonalnej specyficznych trudności w uczeniu się matematyki autorstwa A. Walerzak-Więckowskiej.[297]

Diagnoza jest dla nauczyciela źródłem informacji, które mogą z jednej strony wspomagać go w dokonywaniu słusznych wyborów odnośnie poziomu proponowanych uczniom zadań matematycznych, z drugiej zaś pozwalają na wczesne wykrycie wykazywanych przez uczniów trudności w uczeniu się matematyki. Im wcześniej zostają one wykryte, tym szybciej nauczyciel może wdrożyć działania nastawione na niwelowanie tych trudności.

Rozumienie pojęcia zadania matematycznego nie powinno być zawężone jedynie do zadań z treścią. Na etapie nauczania początkowego uczniowie otrzymują *„o wiele bogatsze zestawy różnego rodzaju poleceń i pytań (...) wymagających od nich określonych czynności myślowych lub konkretnych. Czynności te związane są z wykonywaniem zadań”*[298] postawionych przed nimi. Tak szerokie rozumienie pojęcia czyni zadaniem matematycznym nawet proste obliczenia z wykorzystaniem podstawowych działań arytmetycznych. Jest ono uzasadnione, szczególnie w odniesieniu do zajęć matematycznych na etapie nauczania początkowego, w którym uczniowie rozwiązują nie tylko zadania posiadające warstwę tekstową. Zdarzają się przecież liczne polecenia, nie noszące znamion zadań tekstowych, a wiążące się z koniecznością przezwyciężania przez uczniów trudności, co zgodnie z przytoczoną wcześniej definicją W. Okonia jest warunkiem zaliczenia danej sytuacji dydaktycznej do grona zadań.

Zadanie matematyczne o charakterze problemowym zdefiniował G. Polya, zdaniem którego pojawia się ono wtedy, gdy *„zachodzi potrzeba świadomego*

---

[296] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Diagnoza działalności matematycznej dzieci z klas początkowych*. Katowice: Uniwersytet Śląski, 1985.
[297] A. Walerzak-Więckowska: *Profil Arytmetyczny – D. Program diagnostyczny dla dzieci w wieku wczesnoszkolnym*. Rotmanka: Wydawnictwo PROMATHEMATICA, 2011.
[298] J. Grzesiak: *Konstruowanie i dobór…,* s. 8.

poszukiwania środka, za pomocą którego można osiągnąć dobrze widoczny, lecz chwilowo niedostępny cel."[299]

W rozważaniach na temat matematycznych zadań należy także omówić kwestię ich rozwiązywania. W literaturze występuje kilka pojęć związanych z czynnościami podejmowanymi w trakcie tego rozwiązywania. Są to sposób rozwiązania zadania matematycznego oraz metoda rozwiązania takiego zadania, czy szerzej strategia jego rozwiązywania. Sposób rozwiązania zadania matematycznego jest ciągiem działań arytmetycznych, które prowadzą do wyznaczenia jednej bądź wielu niewiadomych. Metoda rozwiązania zadania obejmuje natomiast wyizolowanie i wyrażenie za pomocą języka matematycznego wszystkich istotnych związków, które zachodzą między danymi i niewiadomymi.[300] Istotnym celem pracy nauczyciela jest uświadomienie uczniów, jak ważną umiejętnością jest wybór odpowiedniej strategii postępowania w trakcie rozwiązywania matematycznego zadania. Tym samym nauczyciel powinien zapoznać uczniów z wieloma sposobami rozwiązywania zadań oraz z wieloma metodami służącymi do osiągnięcia wyniku, po to, by w sytuacji rozwiązywania konkretnego zadania potrafili oni świadomie wybrać najkorzystniejszą z nich. Należy ponadto wdrażać uczniów do korzystania z rozmaitych strategii postępowania podczas rozwiązywania matematycznych zadań.

Na rozwiązanie zadania, którego algorytm został uczniom wytłumaczony przez nauczyciela składa się ciąg kolejnych czynności, które muszą oni wykonać krok po kroku. G. Polya za rozwiązanie zadania uznawał odnalezienie środka, który prowadzi do osiągnięcia celu.[301] Takie rozwiązywanie ma miejsce w przypadku zadań problemowych.

E. Stucki, na bazie swoich doświadczeń, sformułował algorytm czynności postępowania przy rozwiązywaniu niemal każdego zadania matematycznego. Na algorytm ten składają się kolejno czynności takie jak:

- „dobór zadania, jego tematyki i struktury,
- zapoznanie uczniów z treścią zadania (ze stopniowym wdrażaniem do czytania cichego ze zrozumieniem tekstów matematycznych),
- analiza treści zadania połączona z serią pytań i ćwiczeń rozwijających myślenie matematyczne,

---

[299] G. Polya: *Odkrycie matematyczne…*, s. 145.
[300] T. Sawicki, R. Reclik, J. Nowik: *Matematyka. To nauczyciel klas początkowych wiedzieć powinien*. Opole: Wydawnictwo NOWIK, 1997, s. 178.
[301] G. Polya: *Odkrycie matematyczne…, s.* 145.

- matematyczny zapis treści zadania (w formie graficznej, graficzno-liczbowej, graficzno-słowno-liczbowej, słowno-liczbowej lub liczbowej),
- rozbiór zadania metodą analityczną, analityczno-syntetyczną lub syntetyczną z zastosowaniem graficznych schematów i sposobów rozwiązań,
- ułożenie planu rozwiązania jako realizacji jednej z metod rozbioru zadania,
- rozwiązanie zadania wybranymi sposobami z doprowadzeniem zawsze do wzorów w jednym zapisie i równań (tam, gdzie jest to możliwe),
- sprawdzenie wyniku z treścią zadania,
- sformułowanie odpowiedzi i jej zapis."[302]

Cztery z tych czynności, a mianowicie: zapoznanie się uczniów z zadaniem, ułożenie planu rozwiązania, rozwiązanie zadania, a także sprawdzenie wyniku zgodnie z treścią zadania są tożsame z etapami rozwiązywania zadań zaproponowanymi przez G. Polya.[303] Etapy te w sposób szczegółowy zostały omówione w rozdziale 4.2. niniejszej dysertacji.

Rozwiązywanie matematycznych zadań pełni istotną rolę w edukacji. Na etapie nauczania początkowego ma ono charakter poznawczo-decyzyjny.[304] Uczniowie poprzez pokonywanie trudności zawartych w zadaniach uczą się intelektualnych strategii stosowanych w matematyce, nabierają chęci do rozwiązywania problemów oraz kształtują w sobie odporność emocjonalną, co z kolei przekłada się na sprawniejsze funkcjonowanie ich umysłów. [305] Zgodnie z czynnościową koncepcją nauczania matematyki zadania są nośnikiem treści kształcenia, ponieważ dzięki ich rozwiązywaniu odbywa się zarówno poznawanie nowej wiedzy, jak i utrwalanie wiedzy już nabytej.[306] To istotna rola zadań. Z jednej strony poprzez ich rozwiązywanie uczniowie efektywniej przyswajają i utrwalają posiadaną już wiedzę i wyrabiają w sobie sprawność korzystania z niej w praktyce. Z drugiej strony, zadania są nośnikiem wiedzy nowej, dotąd niepoznanej. Pozwalają one na eksplorowanie wcześniej nieodkrytych obszarów wiedzy i umiejętności matematycznych. Rozwiązywanie zadań podzielić można na cztery podstawowe kategorie, którymi są: rozwiązywanie konkretne, słowne, graficzne

[302] E. Stucki: *Metodyka nauczania matematyki w klasach niższych*. Cz. 2. Bydgoszcz: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, 1993, s. 81.
[303] A. Góralski: *Twórcze rozwiązywanie* zadań. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1980, s. 126.
[304] M. Szpiter: *Kształtowanie pojęć i umiejętności matematycznych u dzieci w młodszym wieku szkolnym*. Słupsk: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, 1995, s. 142.
[305] M. Pisarski: *Matematyka dla naszych dzieci*. Warszawa: Wydawnictwo NOWIK, 1992, s. 21.
[306] J. Grzesiak: *Podstawy nauczania początkowego matematyki w zadaniach*. Kalisz: Centrum Doskonalenia Nauczycieli, 1990, s. 3.

i symboliczne. [307] Kategorie te dotyczą bezpośrednio strategii, których celem jest ułatwienie uczniom zrozumienia treści zadania.

Spośród wielu funkcji rozwiązywania zadań we wczesnej edukacji matematycznej wymienić można między innymi:

- ułatwianie kształtowania i wyprowadzania podstawowych pojęć matematycznych z analizy realnych sytuacji życiowych,
- konkretyzację i pogłębianie rozumienia pojęć matematycznych poprzez odnoszenie ich do sytuacji praktycznych, zawierających aspekty matematyczne,
- wiązanie matematyki z życiem i przygotowywaniem uczniów do rozwiązywania problemów praktycznych,
- uczenie analizy i rozumienia tekstów matematycznych,
- utrwalanie umiejętności wykonywania ustnych i pisemnych obliczeń,
- uczenie twórczego posługiwania się poznanymi prawami i własnościami działań arytmetycznych,
- sprzyjanie wielostronnej aktywizacji i rozwijaniu myślenia, skłaniające do wykonywania wielu operacji myślowych oraz rozumowań logicznych.[308]

Nie sposób wymienić wszystkich funkcji rozwiązywania matematycznych zadań. Już analiza wymienionych powyżej skłania do stwierdzenia, że rozwiązywanie matematycznych zadań sprzyja wszechstronnemu rozwojowi ucznia. Praca nad zadaniem przynosi korzyści edukacyjne nie tylko pod względem rozwoju umiejętności arytmetycznych, ale także językowych oraz umiejętności czytania ze zrozumieniem.[309] Konkludując, rozwiązywanie zadań matematycznych przynosi korzyści zarówno w procesie uczenia się matematyki, jak i w rozwoju innych umiejętności, niezbędnych do prawidłowego funkcjonowania w szkole, jak i poza nią.

Jedną z podstawowych cech rozwiązywania przez uczniów zadań jest celowość podejmowania tej aktywności. Hierarchiczny układ celów rozwiązywania matematycznych zadań zaproponował A. Góralski.[310] Pierwszy, najwyższy poziom celów to rozwijanie i kształtowanie u uczniów matematycznego myślenia twórczego,

[307] A. Cheba: *Utrwalamy i sprawdzamy. Pomiar dydaktyczny w nauczaniu początkowym matematyki*. Łódź: Wydawnictwo Res Polona, 2000,s. 8.
[308] M. Cackowska: *Rozwiązywanie zadań tekstowych w klasach I-III*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1993, s. 8-9.
[309] S. Sokołowski: *Rozwiązywanie zadań tekstowych*,. *„Życie szkoły"* 2004, nr 1, s. 37.
[310] A. Góralski: *Zadanie, metoda, rozwiązanie*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1984, s. 18-19.

rozumianego jako zdolność generowania pomysłów, niezależność od myślowych schematów oraz umiejętność stosowania metod o wysokim stopniu ogólności, w tym reguł o charakterze heurystycznym. Drugi poziom to zapewnienie rozumienia przez ucznia poszczególnych struktur pojęciowych i struktur czynności, czyli włączanie nowych elementów wiedzy i umiejętności do struktur, które już u niego istnieją. Ponadto jest to także dostrzeganie związków tych elementów i struktur z rzeczywistością. Następny poziom wiąże się z opanowaniem przez ucznia umiejętności stosowania (kiedy i jak) podstawowych, typowych schematów. W dalszej kolejności jest to opanowanie rzemiosła przekształcania napisów oraz zapamiętywanie przez ucznia różnych informacji (np. wzorów), czyli wiedzy statycznej. Zapamiętywanie to uznane zostało za najniższy z poziomów celów rozwiązywania zadań matematycznych.

Ten sam Autor zauważa jednak, iż najważniejszym celem nauczania rozwiązywania zadań jest kształtowanie u ucznia postawy badawczej i twórczej. Wyraża się ona przede wszystkim umiejętnością dostrzegania i formułowania problemów, odpowiednią motywacją do ich rozwiązywania, a także wyrabianiem aktywności i niezależności myślowej oraz potrzeby przezwyciężania trudności i dążenia do rozumienia zjawisk.[311] Już we wcześniejszych analizach pojawiały się opinie związane z rozwijaniem myślenia uczniów poprzez rozwiązywanie zadań matematycznych. Kształtowanie u uczniów umiejętności myślenia, zwłaszcza myślenia samodzielnego, to jeden z najważniejszych ale i najtrudniejszych do osiągnięcia celów edukacji – nie tylko matematycznej. Zdaniem W. Okonia poprzez samodzielne myślenie uczniowie wdrażają się do aktywnego poznawania świata.[312] Celowi temu powinno być zatem podporządkowane nauczanie – uczenie się matematyki na każdym etapie edukacyjnym, począwszy od pierwszych lat szkolnej nauki.

Istotnym jest to, by w odpowiedni sposób wykorzystywać zadania na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej. Świadomy roli zadań nauczyciel powinien wystrzegać się błędów w ich stosowaniu. Do błędów tych zalicza się między innymi ograniczanie roli zadań do opanowania umiejętności rozwiązywania konkretnego ich typu, zbyt dużą liczbę rozwiązywanych przez uczniów zadań jednego rodzaju oraz niewłaściwe podejście metodyczne do rozwiązywania zadań.[313] Ograniczenie aktywności uczniów do rozwiązywania konkretnego typu zadań zamyka myślenie ucznia w sztywne ramy

[311] Ibidem, s. 19.
[312] W. Okoń: *Problem samodzielności myślenia…,* s. 10.
[313] J. Grzesiak: *Konstruowanie i dobór…,* s. 19.

schematu, co powodować może jego bezsilność w sytuacji rozwiązywania nowego, nie mieszczącego się w tym schemacie zadania. Warto pamiętać także o tym, iż sam proces rozwiązania zadania powinien być realizowany w odpowiedni sposób, zarówno przez uczniów, jak i samego nauczyciela.

Zgodnie z zaproponowaną przez S. Turnaua [314] metodyką nauczania rozwiązywania zadań z treścią, praca nad zadaniem powinna rozpoczynać się od rozbioru zadania. Rozbiór zadania polega na przeanalizowaniu jego treści i wyodrębnieniu jego części składowych, do których zalicza się dane, szukane oraz związki pomiędzy nimi. Drugim etapem jest znalezienie sposobu rozwiązania zadania i ostateczne jego rozwiązanie. Należy przy tym pamiętać, że nauczanie matematyki powinno zmierzać do opanowania przez ucznia różnorodnych metod rozwiązywania zadań tak, by przy wykonaniu konkretnego zadania mógł on samodzielnie wybrać najwłaściwszą spośród nich. By tak się stało ważna jest jakość zadań proponowanych uczniom do rozwiązywania zarówno podczas zajęć matematycznych, jak i do samodzielnego rozwiązywania w ramach pracy domowej. Znacznie korzystniejsze w procesie dydaktycznym jest rozwiązywanie przez uczniów mniejszej ilości zadań, które prowokują do myślenia, niż wielokrotne powtarzanie rozwiązywania zadań jednego typu.

Podczas rozwiązywania zadań, zdaniem A. Góralskiego, uczeń może postępować według jednego z trzech sposobów. Może to czynić na oślep, wykonując chaotyczne próby, w efekcie których zatrzymuje się na napotykanych trudnościach i popełnianych błędach. Może rozwiązywać zadania poprzez naśladowanie znanych sobie sposobów działania, lecz nie wiedząc dokładnie dlaczego tak działa i czy działanie to doprowadzi go do uzyskania rozwiązania. Uczeń może wreszcie postępować z pełną świadomością tego, co robi i do czego zmierza postępując właśnie w taki sposób.[315] Oczywistym jest, iż najkorzystniejszym sposobem postępowania ucznia jest ten, w którym jego kolejne kroki prowadzące do rozwiania zadania wykonywane są w sposób świadomy.

Ważnym elementem rozwiązywania zadań jest popełnianie błędów. Błędy te są zjawiskiem naturalnym i towarzyszą rozwiązywaniu zadań na każdym etapie edukacyjnym. Uzyskanie przez ucznia nieprawidłowego rozwiązania zadania może być powodowane trzema głównymi przyczynami.[316] Po pierwsze uczeń może popełnić pewne błędy natury obliczeniowej (np. w operacjach rachunkowych), w wyniku których

---

[314] S. Turnau: *Zadania tekstowe i nauczanie stosowania pojęć matematycznych*. W: *Nauczanie początkowe matematyki*. Red. Z. Semadeni. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1985, s. 80-82.
[315] A. Góralski: *Zadanie, metoda, rozwiązanie*.., s. 37.
[316] Ibidem, s. 37.

uzyskane rozwiązanie nie będzie poprawne. Po drugie może on stosować niewłaściwą metodę lub metody postępowania, które nie będą odpowiadać danemu zadaniu. W konsekwencji rozwiązywania zadania niewłaściwym sposobem, uzyskany wynik będzie niepoprawny. Po trzecie rozwiązanie zadania matematycznego w sposób nieprawidłowy może być powodowane niemożnością przypomnienia sobie przez ucznia metody lub też brakiem umiejętności wytworzenia przez niego jakiejkolwiek metody, którą można by tę czynność wykonać.

Możliwość popełniania błędów w rozwiązywaniu zadań matematycznych (nie tylko wśród uczniów z trudnościami w uczeniu się matematyki) powinna być uwzględniona w pracy dydaktyczno-wychowawczej nauczyciela edukacji wczesnoszkolnej. Musi on bowiem podejmować takie działania, by popełniane przez uczniów błędy nie były przyczyną spadku ich motywacji do rozwiązywania zadań, a w konsekwencji by nie stały się powodem niechęci nie tylko wobec rozwiązywania zadań matematycznych, ale w ogóle do „nielubienia" matematyki.

Wśród zadań matematycznych szczególne miejsce przypada zadaniom z treścią. Opanowanie umiejętności ich rozwiązywania jest jedną z podstawowych i najważniejszych umiejętności w procesie kształcenia matematycznego w szkole podstawowej. Inne umiejętności matematyczne powinny być przez ucznia opanowane, by mógł on sprawnie radzić sobie z różnorodnymi zadaniami. Mają więc one charakter usługowy względem rozwiązywania zadań tekstowych. [317] Rozwiązywanie zadań matematycznych jest środkiem wdrażającym ucznia do pokonywania przeszkód natury emocjonalnej, intelektualnej i motywacyjnej.[318]

Te, dość ogólne rozważania na temat matematycznych zadań kontynuowane będą w kolejnym podrozdziale. Zaprezentowano w nim wybrane klasyfikacje matematycznych zadań, ze szczególnym uwzględnieniem tych, które użyteczne są na potrzeby niniejszej rozprawy.

[317] M. Dąbrowski: *Pozwólmy dzieciom myśleć: o umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna, 2007, s. 73.
[318] G. Treliński: *Kształcenie matematyczne…*, s. 711.

3.2. Wybrane klasyfikacje zadań matematycznych

Nie istnieje jedna klasyfikacja zadań matematycznych, która obejmowałaby wszystkie ich typy. W zależności od przyjętych kryteriów podziału w literaturze przedmiotu występuje wiele podziałów zadań. W niniejszej pracy wybrano kilka klasyfikacji, które uznano za najbardziej użyteczne w kontekście podejmowanych w pracy rozważań.

Biorąc pod uwagę strukturę i cele, którym służą zadania można podzielić je na zadania – ćwiczenia, które kształtują i utrwalają techniki rachunkowe, zadania praktyczne (ruchowo-manipulacyjne i graficzne), ujawniające sens pojęć i operacji matematycznych, zadania logiczne (gry, zabawy, łamigłówki, zagadki), zadania rozwijające operacje myślowe, uczące pomysłowości i oryginalności w podejściu do zadań oraz zadania tekstowe, pozwalające na łączną realizację wszystkich powyższych celów.[319]

Dokonując podziału matematycznych zadań ze względu na czynności, które powinien wykonać uczeń podczas ich rozwiązywania wyróżnić można cztery ich rodzaje. Są nimi zadania na rozumienie pojęć matematycznych, zadania na zapamiętywanie wiadomości, zadania na stosowanie wiedzy w sytuacjach typowych oraz zadania na stosowanie wiedzy w sytuacjach nietypowych.[320] Każdy z wymienionych typów zadań związany jest z poszczególnymi umiejętnościami i czynnościami wykonywanymi przez ucznia. Zadania na rozumienie pojęć matematycznych polegają na wykonywaniu czynności konkretnych oraz z użyciem przedstawień graficznych i symbolicznych, analizowaniu danych, rozwiązywaniu prostych zadań beztekstowych, dokonywaniu porównań i dostrzeganiu analogii, a także na umiejętności odczytania i interpretacji zadania, wyrażania myśli z użyciem pojęć matematycznych odnośnie wykonywanych czynności lub operacji, na przekształceniu formy zadania, oraz na jego uzupełnianiu. Zadania na zapamiętywanie wiadomości umożliwiają uczniom posługiwanie się odpowiednio wybranymi konkretami, a także rozpoznawanie i odczytywanie symboli i schematów, zaznajamianie się uczniów ze słownictwem matematycznym, regułami i zasadami postępowania, a także z umiejętnością stosowania algorytmów działań. Kolejny rodzaj, czyli zadania na stosowanie wiedzy w sytuacjach typowych obejmują naśladownictwo i odwzorowywanie, stosowanie ustalonych reguł w sytuacjach

[319] M. Cackowska: *Rozwiązywanie zadań tekstowych…*, s. 9.
[320] J. Grzesiak: *Konstruowanie i dobór…*, s. 35.

praktycznych, rozwiązywanie prostych zadań tekstowych oraz układanie i przekształcanie zadań według określonego wzoru czy formuły. Ostatni typ zadań, czyli zadania na stosowanie wiedzy w sytuacjach nietypowych umożliwiają rozwiązywanie złożonych zadań tekstowych, kształtują umiejętność wykrywania błędów i nieścisłości, a także umiejętność dokonywania i uzasadniania uogólnień oraz umiejętność samodzielnego rozwiązywania problemów i zadań nieschematycznych.[321] Nauczyciel powinien mieć świadomość tego, iż każdy z typów zadań powodować będzie osiąganie innych celów edukacyjnych. Na etapie nauczania wczesnoszkolnego cele te realizowane są poprzez rozwiązywanie przez uczniów zadań dotyczących technik rachunkowych, praktycznych, ujawniających sens pojęć i operacji matematycznych, logicznych oraz zadań, których rozwiązywanie pozwala na realizację wszystkich powyższych celów.[322] W edukacji matematycznej rozwiązywanie wszystkich przytoczonych wyżej rodzajów zadań ma swoje uzasadnienie.

Dzieląc zadania ze względu na stopień zawartej w nich aktywności matematycznej, wyróżnia się trzy typy zadań, a mianowicie zadania – ćwiczenia, zadania – zwykłe zastosowania teorii oraz zadania – problemy. Ćwiczeniami są zadania wymagające aktywności odtwórczych, stosowania poznanych wcześniej schematów, czy wzorów. Ich rozwiązanie polega na wykonaniu typowych działań. Celem rozwiązywania zadań – ćwiczeń jest zmechanizowanie prostych czynności, które są podstawą działalności w zadaniach bardziej złożonych. Zadania – zwykłe zastosowania teorii wymagają zróżnicowanej aktywności i samodzielności. W większości przypadków można je sprowadzić do naturalnie nasuwającej się matematyzacji sytuacji opisanej w treści zadania. Warunkiem jest natomiast posiadanie przez ucznia pewnego zasobu wiadomości, które umożliwią mu bezpośrednie rozwiązanie zadania. Ostatni typ zadań, zadania – problemy to najczęściej zadania otwarte pod względem metody ich rozwiązania. Nie można ich rozwiązać za pomocą znanego już wzoru czy schematu. Zawierają w sobie trudność o charakterze teoretycznym lub praktycznym, przez co prowokują do podejmowania aktywności badawczej, tworzenia nowych konstrukcji i nowej wiedzy.[323]

[321] Ibidem, s. 35-36.
[322] T. Sawicki, R. Reclik, J. Nowik: *Matematyka. To nauczyciel…*, s. 169.
[323] H. Siwek: *Dydaktyka matematyki: teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2005, s. 100.

B. Gleichgewicht dokonał podziału matematycznych zadań wedle kryterium standardowości i wyróżnił zadania standardowe oraz niestandardowe. Zadaniami standardowymi są te, które spełniają poniższe warunki:

- posiadają wystarczającą ilość danych do uzyskania jednoznacznego rozwiązania i nie posiadają przy tym danych zbędnych,
- treść zadania nie prowadzi do sprzeczności,
- treść zadania jest odpowiednia, tzn. pytania pozostają w ścisłym związku z danymi, zadanie ma sens życiowy, jego warunki są precyzyjne, a samo zadanie poddaje się arytmetycznej matematyzacji.[324]

Zadania standardowe można podzielić na zadania proste addytywne i multiplikatywne oraz na zadania złożone łańcuchowo i niełańcuchowo. Zdaniem tego Autora, zadaniem niestandardowym jest każde zadanie matematyczne, które zaprzecza którejkolwiek z wymienionych wyżej cech zadań standardowych. Podzielił on zadania niestandardowe na:

- zadania z nadmiarem danych, a w ich obrębie: zadania z danymi bez związku z rozwiązaniem oraz z danymi dublującymi się,
- zadania, w których występuje zbyt mało danych, a wśród nich: zadania, których nie można rozwiązać oraz zadania posiadające wieloznaczne rozwiania,
- zadania sprzeczne, w których dane są sprzeczne z treścią zadania bądź z pytaniem oraz zadania z danymi sprzecznymi algebraicznie,
- zadania ze złą treścią, a wśród nich: zadania posiadające pytania bez związku z danymi, zadania bezsensowne życiowo, zadania posiadające nie dość precyzyjne warunki oraz zadania bez matematyzacji arytmetycznej.[325]

Zadanie matematyczne może być przedstawione za pomocą różnorakich form. Biorąc tę cechę za kryterium podziału wyróżnić można zadania inscenizowane, obrazkowe oraz zadania z tekstem słownym.[326] W przypadku zadań inscenizowanych uczniowie oraz nauczyciel wcielają się w rolę aktorów, a podczas swojej pracy manipulują konkretami. W zadaniach obrazkowych pojawiają się rysunki obrazujące treść zadania i tym samym ułatwiające uczniom jej zrozumienie. Zadania z tekstem słownym nie wymagają natomiast użycia konkretów ani ich graficznych odpowiedników.

---

[324] B. Gleichgewicht: *Arytmetyczne zadania tekstowe dla nauczycieli klas 1-4*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1988, s. 5.
[325] Ibidem, s. 41.
[326] T. Sawicki, R. Reclik, J. Nowik: *Matematyka. To nauczyciel…*, s. 176.

W literaturze spotkać można także pojęcie zadania twórczego. Zadnie tego typu określa czyn, który może być dokonany w celu zadośćuczynienia potrzebie osiągnięcia pewnej wartości, a tok jego wykonania jest ograniczony niedostatecznością środków lub sposobów koniecznych do osiągnięcia celu oraz czyn ten pozwala na wartościowanie jego realizacji i skutków.[327] Rozwiązywanie przez uczniów zadań twórczych wiąże się z koniecznością posiadania przez nich pewnego zasobu wiedzy i samoświadomości odnośnie metod rozwiązywania zadań.

Dla potrzeb niniejszego opracowania za najważniejsze kryterium podziału zadań matematycznych przyjęto klasyfikację W. Okonia, który dokonał podziału zadań na problemowe i bezproblemowe.[328] W obrębie zadań problemowych Autor wyróżnił zadania tekstowe oraz beztekstowe, które mogą być proste lub złożone. Zadania o charakterze bezproblemowym charakteryzuje struktura analogiczna do zadań rozwiązywanych już wcześniej, ich treść i forma stanowi materiał dydaktyczny dla kształcenia określonych sprawności matematycznych ucznia. Zadania problemowe stawiają ucznia w nowej sytuacji problemowej, określonej w postaci pytania lub polecenia, której rozwiązanie wymaga wykrycia związków i zależności między danymi i szukanymi wielkościami, przez co następuje wzbogacenie wiedzy ucznia.[329] M. Szpiter podała przykłady na każdy z wymienionych typów zadań:

- zadanie problemowe proste:
  Ela ma 5 ołówków, a Tomek o 4 więcej. Ile ołówków ma Tomek?
- zadanie problemowe złożone:
  W sklepie było 336 kg jabłek w skrzynkach po 24 kg i po 12 kg. Mniejszych skrzynek było 2 razy więcej niż większych. W ilu skrzynkach ułożono jabłka?
- zadanie bezproblemowe proste:
  Na pierwszej półce jest 15 książek, a na drugiej – 23 książki. Ile książek jest razem na obu półkach?
- zadanie bezproblemowe złożone:

[327] A. Góralski: *Twórcze rozwiązywanie zadań…*, s. 25.
[328] W. Okoń: *U podstaw problemowego uczenia się*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1964, s. 93.
[329] J. Grzesiak: *Konstruowanie i dobór zadań matematycznych w klasach początkowych*, Koszalin 1984, s. 72-73.

Dzieci zbierały grzyby. Ola znalazła 3 borowiki i 5 podgrzybków. Józek i Kasia 16 borowików i 15 podgrzybków. 12 grzybów dzieci oddały babci. Ile im zostało?[330]

Takie podejście do zadań problemowych i bezproblemowych jest dyskusyjne, gdyż przeczy założeniu, że zadanie jest uznawane za problemowe, kiedy uczniowie nie znają algorytmu jego rozwiązania, a jednocześnie ich zasób wiedzy i poziom intelektualny pozwala na jego znalezienie.[331] W przypadku przytoczonych zadań problemowych, nauczyciele mogą zapoznać uczniów z algorytmem ich rozwiązania, co sprawi, że zadania staną się bezproblemowymi. Nie powinno się zatem prezentować treści zadania i twierdzić, że jest ono problemowym, gdyż o tym decyduje znajomość lub brak znajomości przez uczniów algorytmu jego rozwiązania. W tym ujęciu nawet bardzo trudne zadanie nie musi mieć znamion problemowego.

Zadania problemowe są uważane za najbardziej wartościowe, ponieważ są wzbogacone o pierwiastek twórczy. Na etapie nauczania początkowego, w trakcie edukacji matematycznej uzasadnione jest stosowanie zadań problemowych o zróżnicowanym poziomie trudności. Mając na względzie ten poziom D. Klus-Stańska i A. Kalinowska zaproponowały trzystopniową klasyfikację zadań problemowych. Pierwszy typ zadań problemowych to zadania najprostsze, skonstruowane w taki sposób, by oderwać uczniów od usztywniającego myślenie schematu. Typ drugi, to zadania bardziej zaawansowane, zawierające dane, których nie da się uporządkować w żadnym poznanym wcześniej schemacie. Trzeci typ zadań problemowych to zadania twórcze, pozwalające odkryć jakąś nieznaną wcześniej prawidłowość lub zastosować znaną regułę w nowej, nietypowej sytuacji. Dają one możliwość szukania i samodzielnego wytwarzania wielu dróg prowadzących do rozwiązania.[332] Umiejętność rozwiązywania przez uczniów poszczególnych typów zadań problemowych jest uzależniona od ilości posiadanych przez nich w tym zakresie doświadczeń. Im mniejsze są doświadczenia uczniów w rozwiązywaniu problemów, tym więcej trudności będą wykazywali podczas ich rozwiązywania.

Dla podjętych w rozprawie rozważań istotny jest podział zadań matematycznych dokonany przez G. Polya. Węgierski uczony, wzorując się na Euklidesie i zawartych

[330] M. Szpiter: *Kształtowanie pojęć i umiejętności…,* s. 140-141.
[331] M. Musioł: *Media w procesie wychowania*. Toruń : Wydawnictwo Adam Marszałek, 2006, s. 176-177.
[332] D. Klus-Stańska, A. Kalinowska: *Rozwijanie myślenia matematycznego…*, s. 31-32.

w jego „*Elementach”*[333]dwóch rodzajach twierdzeń, wyróżnił dwa ogólne typy zadań. Są to mianowicie zadania typu „*znaleźć*” oraz zadania typu „*udowodnić*”. Celem zadań typu *znaleźć* jest znalezienie pewnego obiektu, stanowiącego niewiadomą zadania. Jest to możliwe na przykład poprzez skonstruowanie, wytworzenie, otrzymanie, czy też identyfikację tego obiektu. Celem zadań typu *udowodnić* jest natomiast ustalenie prawdziwości lub też fałszywości pewnego twierdzenia. [334] Zadania pojawiające się na etapie wczesnoszkolnym w zdecydowanej większości można zaklasyfikować do zadań typu *znaleźć*. Specyfika myślenia uczniów na pierwszym etapie edukacyjnym nakazuje odłożyć pełną realizację zadań typu *udowodnić* na kolejne lata szkolnej nauki matematyki.

Wśród licznych rodzajów zadań matematycznych proponowanych uczniom do rozwiązywania ważną rolę odgrywają zadania o charakterze problemowym, których charakterystyka oraz walory poznawcze zostały przedstawione w kolejnym podrozdziale.

3.3. Rozwiązywanie problemów w edukacji matematycznej

Zdaniem H. Moroza sukces lub niepowodzenie dziecka w nauce szkolnej jest uwarunkowane umiejętnością rozwiązywania problemów. [335] We współczesnej edukacji problemom przypisuje się ogromne znaczenie.

Słowo *problem* (z gr. *problema* – zadanie, zagadnienie) w ogólnym znaczeniu jest pewnym poważnym zagadnieniem, zadaniem wymagającym rozwiązania lub też kwestią wymagającą rozstrzygnięcia. [336] W dydaktyce problem oznacza zadanie wymagające pokonania jakiejś trudności o charakterze praktycznym lub teoretycznym, które następuje przy udziale aktywności badawczej podmiotu. [337] Aktywna postawa ze strony osoby odczuwającej problem prowadzi do wiedzy lub/i umiejętności.[338] Problem obejmuje jakąś niewiadomą, lukę lub pytanie, na które szuka się odpowiedzi, przeprowadzając różne zabiegi myślowe i stosując rozmaite formy rozumowania, tak, aby dojść do określonego

[333]Euklides: *EuklidesElementa*. Przeł. E. S. Stamatis. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1969-1977.
[334] G. Polya: *Odkrycie matematyczne…*, s. 147.
[335] H. Moroz: *Nasza matematyka. Zabawy…,* s. 10.
[336] E. Sobol: *Słownik wyrazów obcych…,* s. 899.
[337] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 315.
[338] Cz. Kupisiewicz, M. Kupisiewicz: *Słownik pedagogiczny*…, s. 143-144.

wyniku.[339] Problem jest także zadaniem, dla którego rozwiązujący nie zna metody rozwiązana, natomiast dysponuje wystarczającą wiedzą, by metodę taką samodzielnie zbudować. W konsekwencji jest on zadaniem na rzeczywiste zastosowanie posiadanej przez jednostkę wiedzy i sprawdzenie poziomu jej użyteczności.[340] Problemy mogą mieć charakter otwarty bądź zamknięty. Te o charakterze otwartym posiadają wiele poprawnych rozwiązań, a przy ich rozwiązywaniu zachodzi myślenie dywergencyjne, natomiast problemy zamknięte, mają skończoną liczbę rozwiązań, a przy ich rozwiązywaniu zachodzi myślenie konwergencyjne.[341] Oba typy myślenia zostały scharakteryzowane w podrozdziale 2.4. niniejszej rozprawy.

Problem jest rodzajem sytuacji lub zadania, których podmiot nie jest w stanie rozwiązać za pomocą posiadanego zasobu wiedzy. Rozwiązanie problemu jest możliwe dzięki czynności myślenia produktywnego, która prowadzi do wzbogacenia wiedzy podmiotu.[342] Problem traktowany jest zatem jako rodzaj zadania, który wymaga od uczniów myślenia o charakterze produktywnym.

Sytuacja problemowa w ujęciu W. Okonia jest sytuacją dydaktyczną, której podłożem jest nietypowy, to znaczy nowy, trudny układ elementów konkretnych lub abstrakcyjnych oraz związków między nim. Osoba znajdująca się w tej sytuacji dysponuje częściową wiedzą na temat podobnych pod pewnymi względami sytuacji, a zarazem odczuwa ona brak wiedzy o tym, jak elementy i związki tego układu uzupełnić, ewentualnie skorygować je lub też uporządkować.[343] M. Cackowska wymienia najważniejsze cechy, które charakteryzują sytuację problemową w kontekście nauczania – uczenia się. Po pierwsze jest nią określona sytuacja życiowa, stosunkowo łatwo absorbująca uczniów oraz apelująca do ich zainteresowań i doświadczeń. Po drugie sytuacja ta zawiera w sobie jedną lub też kilka trudności. Po trzecie odczucie tych trudności skłania uczniów do formułowania hipotez i poszukiwania rozwiązań. Ponadto sytuację problemową cechuje pewna dynamiczność, gdyż po znalezieniu rozwiązania staje się ona sytuacją bezproblemową. W tym przypadku, ta nowa sytuacja powinna rodzić także nowe trudności, przezwyciężanie których prowadzi do zdobywania nowej

[339] M. Przetacznik-Gierowska, G. Makiełło-Jarża: *Psychologia rozwojowa i wychowawcza…,* s. 160.
[340] M. Dąbrowski: *Pozwólmy dzieciom myśleć…, s*. 133.
[341] J. Galant: *Dostrzeganie i rozwiązywanie problemów w klasach początkowych*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1987, s. 15.
[342] J. Kozielecki: *Rozwiązywanie problemów*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1969, s. 16.
[343] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 379.

wiedzy.[344] Sytuacje tego typu rozwijają procesy poznawcze uczniów i przyczyniają się do rozwoju ich myślenia. Z podejściem tym zgadza się J. Grzesiak, który zwraca uwagę na to, iż w procesie rozwiązywania problemu dydaktycznego następuje przekształcenie sytuacji problemowej w sytuację nieproblemową, w rezultacie którego przyrasta poziom wiedzy ucznia.[345] W sytuacji problemowej, w której znajduje się uczeń występują elementy treści wiadome oraz niewiadome, a pomiędzy nimi różnego rodzaju związki przyczynowo-skutkowe.[346] Rozwiązanie problemu będzie wymagało od ucznia odkrycia zależności pomiędzy jego danymi i niewiadomymi elementami. Rozwiązywanie problemów wymaga od uczniów aktywności o charakterze produktywnym, podczas której samodzielnie wytwarzają oni informacje.[347] Zdaniem I. Adamek każda nowa sytuacja, wobec której zostanie postawiony uczeń powinna być wykorzystana do stawiania zadań o charakterze otwartym i problemowym, które to stają się stymulatorem wyzwalającym ich twórczą aktywność.[348]

Rozwiązanie problemu polega na określeniu stanu niepożądanego A oraz stanu oczekiwanego B, a także ustaleniu czynności prowadzących od stanu A do stanu B. Kolejnymi krokami usprawniającymi proces rozwiązania są zdefiniowanie problemu, szczegółowy jego opis i analiza, ustalenie możliwych rozwiązań, ocena poszczególnych wariantów i wybór wariantu optymalnego oraz zastosowane wybranego rozwiązania w praktyce.[349] Proces rozwiązywania problemu zawsze ma na celu osiągnięcie takiego stanu, by sytuacja z problemowej przekształciła się w sytuacje bezproblemową.

Proces rozwiązywania problemu charakteryzuje się pewną etapowością. J. Galant wyróżnia sześć etapów w drodze do rozwiązania problemu. Etap pierwszy polega na tworzeniu sytuacji problemowej. Podczas tego etapu uczniowie powinni dostrzec dany problem. W drugim etapie następuje sformułowanie problemu. Problem może zostać sformułowany zarówno przez nauczyciela, jak i przez uczniów. W kolejnym, trzecim etapie następuje początkowa analiza sformułowanego problemu. W dalszej kolejności uczniowie zgłaszają pomysły na rozwiązanie problemu, wobec którego się znaleźli. Na piątym etapie odbywa się weryfikacja przedstawionych pomysłów oraz przyjętych hipotez, a także obranie sposobu rozwiązania problemu. W finalnym etapie następuje

---

[344] M. Cackowska: *Rozwiązywanie zadań tekstowych…,* s. 11.
[345] J. Grzesiak: *Konstruowanie i dobór…,* s. 17.
[346] R. Więckowski: *Intensyfikacja pracy uczniów w nauczaniu początkowym*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1972, s. 26.
[347] I. Adamek: *Podstawy edukacji wczesnoszkolnej*…, s. 62.
[348] I. Adamek: *Rozwiązywanie problemów przez…,* s. 84.
[349] J. Krzyżewska: *Aktywizujące metody i techniki w edukacji wczesnoszkolnej*. Suwałki: Wydawnictwo Omega, 1998, s. 71.

systematyzacja i zastosowanie nowo zdobytej wiedzy.[350] Przedstawione etapy pracy nad rozwiązaniem problemu mogą być wykorzystywane w pracy dydaktycznej na każdym etapie nauczania. Autor zaprezentowanego schematu postępowania jest zdania, iż z powodzeniem może on być stosowany podczas pracy dydaktyczno-wychowawczej z uczniami klas początkowych.

M. Jąder proces rozwiązywania problemu dzieli na kilka faz. Faza pierwsza to chaos – posiadanie wielu nieuporządkowanych danych, która zamienia się w fazę nazywania, polegającego na formułowaniu i sprecyzowaniu problemu. W dalszej kolejności następuje analiza danych poprzez odpowiedź na pytanie co już wiemy na temat postawionego problemu. Następną fazą jest generowanie pomysłów rozwiązania problemu (bez ich oceny). Dalej dokonuje się selekcji wytworzonych pomysłów, rankingu rozwiązań oraz wyboru najlepszego spośród nich. W dalszej kolejności ma miejsce praca w małych grupach, poprzedzająca fazę końcową, czyli realizację wygenerowanego pomysłu.[351] Rozwiązywanie problemów przynosi uczniom wiele korzyści. Za jego sprawą uczą się oni wykorzystywania w praktyce swoich kompetencji, zaspokajają swoje ambicje, uzyskują poczucie własnej wartości oraz mają możliwość zajmowania się tym, co je interesuje.[352] W literaturze przedmiotu zwraca się uwagę na to, iż dzieci rozwiązują zazwyczaj problemy rzeczywiste, które są osadzone w kontekście społecznym, wynikającym z codziennych, związanych z życiem sytuacji.[353] Taka sytuacja jest powodowana poziomem myślenia, na jakim znajdują małe dzieci oraz uczniowie klas początkowych. Występująca u mnich silna potrzeba odwoływania się do konkretów sprawia, iż problemy stawiane im do rozwiązania powinny również przybierać jak najbardziej konkretny charakter. Należy pamiętać, iż uczniowie klas I-III mogą nie poradzić sobie samodzielnie z rozwiązaniem problemu, którego stopień abstrakcyjności wykraczać będzie poza ich możliwości poznawcze.

M. Wojnowska określiła cechy, którymi powinny charakteryzować się czynności związane z rozwiązywaniem problemów przez uczniów.[354] Po pierwsze problem powinien być dla ucznia osobiście ważny. Może to bowiem spowodować większe zainteresowanie podjęciem się prób jego rozwiązania. Po drugie uczeń nie powinien posiadać ustalonej procedury czynności (algorytmu) służącego do jego rozwiązania.

[350] J. Galant: *Dostrzeganie i rozwiązywanie…, s*. 94.
[351] M. Jąder: *Efektywne i atrakcyjne metody pracy z dziećmi*. Kraków: Wydawnictwo „Impuls", 2009, s. 90.
[352] I. Adamek: *Rozwiązywanie problemów przez dzieci...*, s. 83.
[353] M. Skura: M. Lisicki: *Gen liczby…,* s. 56.
[354] M. Wojnowska: M*iędzy przekazem a odkryciem: twórcze sposoby na rozwiązywanie zadań matematycznych przez dzieci*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2007, s. 22.

Rozwiązanie to winno się wiązać z samodzielnym poszukiwaniem przez ucznia dróg do niego prowadzących. Ponadto postawa ucznia wobec problemu powinna być aktywna. Uczeń w trakcie rozwiązywania problemów prezentuje bowiem aktywną postawę badawczą. W koncepcji tej podkreślona zostaje rola motywacji ucznia. Im zastany przez niego problem jest bliższy jego osobistym doświadczeniom, tym chętniej będzie on podejmował próby jego rozwiązania. Brak gotowego algorytmu działania zachęci ucznia do twórczych poszukiwań własnych strategii postępowania oraz pozwoli wyzwolić aktywność twórczą, która z kolei przyczyni się do przyrostu wiedzy.

I. Adamek wyróżnia trzy warunki konieczne do rozwiązywania problemów. Są nimi czas, przestrzeń oraz materiały.[355] Rozwiązywanie problemów jest czasochłonne z dwóch powodów. Po pierwsze wytwarzanie pomysłów w umysłach dzieci wymaga odpowiedniego czasu. Nie można się tu śpieszyć, gdyż pośpiech działa na niekorzyść i może ograniczyć uczniów w generowaniu pomysłów. Po drugie w procesie rozwiązywania problemu należy uwzględnić czas potrzebny na realizację każdej jego fazy, włączając w to czas na czynności organizacyjne oraz porządkowe. Rozwiązywanie problemów wymaga także odpowiednio zorganizowanej i dobrze wyposażonej przestrzeni. Powinna ona zachęcać uczniów do podejmowania samodzielnych działań. Różnorodność dostępnych uczniom materiałów sprzyja natomiast podejmowaniu różnych typów aktywności. Tak wiec, nauczyciel planujący korzystać w swojej pracy z rozwiązywania problemów powinien mieć na względzie powyższe warunki. Świadomość ich występowania ułatwić może organizowanie procesu dydaktycznego z wykorzystaniem rozwiązywania problemów.

Rozwiązywanie problemów powinno opierać w jak największym stopniu na samodzielnej pracy uczniów. Rola nauczyciela winna ograniczać się do tworzenia odpowiednich warunków oraz sytuacji dydaktycznych, sprzyjających samodzielności jego podopiecznych. Etapami pracy nauczyciela w strategii rozwiązywania problemów są:

- „teoretyczne i praktyczne przygotowanie się do strategii,
- dobór odpowiednich problemów,
- stworzenie warunków do ich rozwiązywania,
- dobór właściwych technik rozwiązywania problemów."[356]

[355] I. Adamek: *Rozwiązywanie problemów przez dzieci...,* s. 41-45.
[356] I. Adamek: *Podstawy edukacji wczesnoszkolnej*…, s. 66.

Postępowanie według tych, bardzo ogólnych etapów może pomóc nauczycielowi w organizowaniu działań dydaktycznych mających na celu nauczenie jego podopiecznych rozwiązywania problemów. Nauczyciel organizujący sprzyjające warunki do rozwiązywania problemów przez uczniów powinien chronić dziecięcą autonomię w procesie ich rozwiązywania. Jego zadaniem jest wybieranie takich problemów, których rozwiązanie będzie uczniom dostępne. Ponadto nauczyciel winien proponować uczniom działania umożliwiające rozwiązywanie problemów w różnorodnym i szerokim kontekście oraz używać takich form językowych, które to rozwiązywanie będą ułatwiać.[357] Równie istotnym jest, by nauczyciel porozumiewał się z uczniami podczas rozwiązywania problemów w prawidłowy sposób. W tym celu powinien starać się pojąć, w jaki sposób myślą jego uczniowie, jakie są ich wyobrażenia oraz jak interpretują oni różnego rodzaju zjawiska. Powinien analizować uczniowskie wypowiedzi oraz badać to, w jaki sposób rozumieją go uczniowie.[358] Mądry nauczyciel podczas swojej pracy uwzględnia różnice, jakie występują w myśleniu dziecka i osoby dorosłej. Ma to ogromne znaczenie w sytuacji rozwiązywania problemów. Zdarza się, iż uczniom zarzuca się, że nie są w stanie pojąć zagadnień, które z nauczycielskiego punktu wiedzenia są łatwe i nie powinny przysparzać im większych trudności. Błędne pojmowanie trudności lub łatwości danego zagadnienia może powodować to, iż nauczyciel dobierając problemy nie uwzględnia poziomu rozumowania swoich uczniów. W konsekwencji działanie takie może przyczynić się nie tylko do braku osiągnięcia przez ucznia prawidłowego rozwiązania problemu ale także do jego wycofania się i utracenia chęci do pracy nad rozwiązywaniem problemów w ogóle.

Biorąc pod uwagę sposób pracy uczniów, rozwiązywanie problemów może przebiegać podczas pracy indywidualnej, pracy zbiorowej oraz podczas pracy w grupach.[359] Najkorzystniejszą formą pracy, która sprzyja generowaniu wielu pomysłów jest oczywiście praca grupowa. Niemniej jednak rozwiązywanie problemów, realizowane w każdej z wymienionych form przynosi uczniom wiele korzyści poznawczych.

Uczenie się poprzez rozwiązywanie problemów jest przechodzeniem od umiejętności teoretycznych do wiadomości praktycznie użytecznych. Polega ono na poszukiwaniu wiedzy, na próbach teoretycznego wyjaśniania prawidłowości wydarzeń i zjawisk, jakie napotyka człowiek, a wyjaśnianie to ma z kolei pomóc

---

[357] I. Adamek: *Rozwiązywanie problemów przez dzieci*…, s. 32.
[358] D. Zaremba: *Podstawy nauczania matematyki*…, s. 16.
[359] R. Więckowski: *Intensyfikacja pracy uczniów…,* s. 73.

w działaniach praktycznych, podejmowanych obecnie lub w przyszłości. [360] Podczas uczenia się poprzez rozwiązywanie problemów następują kolejno poszczególne etapy naukowego rozwiązywania problemów, to jest określenie problemu, sformułowanie pytań badawczych i hipotez, weryfikacja hipotez oraz rozwiązanie problemu.[361]

Nauczanie problemowe znakomicie sprawdza się w procesie nauczania – uczenia się matematyki. Doniosła rola nauczania problemowego oraz rozwiązywania problemów w kontekście edukacji matematycznej w polskiej literaturze została zauważona między innymi przez W. Okonia. Jego zdaniem problemowe uczenie się jest związane z działalnością matematyczną, jest ono „uprawianiem matematyki". [362] Problemy są obecne w procesie nauczania – uczenia się matematyki na wszystkich etapach edukacyjnych. Można je spotkać zarówno podczas wprowadzania nowego materiału, podczas nabywania sprawności, jak również podczas kontroli rozumienia i stopnia opanowania pojęć.[363] Badania dowodzą, iż sprawność uczniów w zakresie rozwiązywania problemów przekłada się na wzrost ich osiągnięć w uczeniu się matematyki.[364] Zdaniem H. Siwek nauczanie problemowe występuje wtedy, kiedy dana jest pewna trudność, której nie można rozwiązać od razu na drodze samorzutnie nasuwającej się matematyzacji, za pomocą dostępnych i znanych schematów, reguł czy algorytmów.[365] Każdy problem matematyczny charakteryzuje się strukturą zawierającą w sobie mniej lub bardziej określone elementy, takie jak dane wyjściowe (początkowe), będące zasobem informacji w sytuacji problemowej, cel, do którego zmierza uczeń w toku rozwiązywania problemu oraz wyjście wynikowe, będące pożądanym rozwiązaniem zadania. [366] Odpowiednia identyfikacja elementów może warunkować powodzenie w procesie rozwiązywania matematycznego problemu.

Wobec problemu natury matematycznej uczeń musi znaleźć odpowiedni sposób postępowania, który umożliwi mu jego rozwiązanie. Postępowanie poznawcze służące nauczaniu i uczeniu się problemowemu przebiega wedle kolejnych etapów, zaproponowanych przez W. Okonia. Etap pierwszy polega na stworzeniu sytuacji

---

[360]B. Niemierko: *Ocenianie szkolne bez tajemnic*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2002, s. 59.

[361] A. Janowski: *Poznawanie uczniów*…, s. 47.

[362] W. Okoń: *Nauczanie problemowe we współczesnej szkole*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1987, s. 195.

[363] G. Treliński, H. Siwek: *Modernizacja kształcenia matematycznego…,* s. 94.

[364] N. Md Hassan, S. Rahman: *Problem Solving Skills, Metacognitive Awareness, and Mathematics Achievement: A Mediation Model*. *„The New Educational Review"* 2017, Vol. 49. No. 3.

[365] H. Siwek: *Dydaktyka matematyki: teoria i zastosowania…,* s. 99.

[366] M. Szpiter: *Kształtowanie pojęć i umiejętności…, s.* 142.

problemowej i sformułowaniu problemów (zadań). W etapie tym następuje wywołanie niepokoju poznawczego, dzięki któremu podmiot (uczeń) chce rozwiązać zadanie, lecz brakuje mu do tego wystarczających danych. W drugim etapie następuje rozwiązywanie problemów i zadań. Odbywa się ono dzięki procesowi heurystycznego wytwarzania pomysłów rozwiązania danego problemu. Kolejnym etapem jest weryfikacja zdobytej wiedzy, polegająca na sprawdzeniu, ocenie i wyborze wygenerowanych pomysłów na rozwiązanie zaistniałego problemu. W etapie końcowym następuje systematyzowanie, utrwalanie i stosowanie nowo nabytej wiedzy. [367] Dzięki realizacji powyższych etapów uczniowie w finalnym efekcie swojej pracy nad rozwiązaniem problemu wzbogacają posiadaną już wiedzę o nowe, wygenerowane w trakcie jego rozwiązywania wiadomości i umiejętności. Według J. Grzesiaka problemowe nauczanie matematyki, które aktywizuje uczniów i które opiera się na rozwiązywaniu problemów matematycznych nierozerwalnie łączy się z czynnościowym tokiem nauczania.[368] Każdy problem matematyczny charakteryzuje się strukturą, zawierającą w sobie mniej lub bardziej określone elementy, takie jak dane wyjściowe (początkowe), będące zasobem informacji w sytuacji problemowej, cel, do którego zmierza uczeń w toku rozwiązywania problemu oraz wyjście wynikowe, będące pożądanym rozwiązaniem zadania.[369]

W obrębie zadań matematycznych typu problemowego wyróżnić można cztery ich podstawowe klasy:

- „problemy otwarte, w przypadku których uczeń nie zna ani możliwych rozwiązań, ani metod rozwiązania,
- problemy półotwarte, które wymagają od ucznia wytworzenia pomysłu rozwiązania oraz wyboru metody rozwiązania spośród znanych metod,
- problemy półzamknięte, gdzie dany jest uczniowi zbiór możliwych rozwiązań, lecz nie są znane metody rozwiązania,
- problemy zamknięte, gdzie uczniowi jest dany zbiór możliwych rozwiązań oraz metod umożliwiających wybór prawidłowego rozwiązania.”[370]

Należy pamiętać, iż najwięcej korzyści przynosi uczniom rozwiązywanie zadań o charakterze otwartym. G. Kapica zwraca uwagę na to, iż obecnie uczniowie rozwiązują w większości zadania o charakterze zamkniętym. To z kolei sprowadza ich działalność

---

[367] W. Strykowski, J. Strykowska, J. Pielachowski: *Kompetencje nauczyciela szkoły współczesnej*. Poznań: Wydawnictwo eMPi2, 2003, s. 56-57.
[368] J. Grzesiak: *Konstruowanie i dobór zadań…,* s. 16.
[369] M. Szpiter: *Kształtowanie pojęć i umiejętności…,* s. 142.
[370] J. Grzesiak: *Konstruowanie i dobór zadań…,* s. 76.

wyłącznie do przyswajania wiedzy w gotowej postaci, bez udziału wyobraźni, czy intuicji.[371] Ograniczenie stosowania zadań otwartych wpływa negatywnie na twórczą postawę uczniów, przyczyniając się tym samym do usztywnienia ich myślenia. Zadaniem nauczyciela jest zatem jak najczęstsze proponowanie uczniom zadań o charakterze otwartym, stymulujących ich myślenie i twórczą postawę. W działaniach dydaktycznych, których podstawową aktywnością ucznia jest rozwiązywanie problemu największą trudność sprawia nauczycielowi dobór tegoż problemu. Z jednej strony nie powinien on być zbyt łatwy, ale winien znajdować się w sferze możliwości rozwiązania go przez przeciętnego ucznia. Z drugiej strony problem nie może być również zbyt łatwo rozwiązany przez ucznia zdolnego, istnieje bowiem wtedy ryzyko, iż ten poda rozwiązanie zanim pozostali uczniowie pojmą jego istotę. Sytuacja taka może zmusić nauczyciela do porzucenia zaplanowanego uczenia się poprzez rozwiązywanie problemów i przejścia do uczenia się poprzez asymilację wiedzy.

Rozwiązywanie przez uczniów problemów jest efektywne, gdy stosują oni odpowiednie metody ich rozwiązywania. Według. T. Kotarbińskiego metoda jest to „*sposób zastosowany ze świadomością możliwości jego zastosowania w przypadkach takiego typu, którego egzemplarz w danym przypadku rozpatruje osoba działająca"*.[372] Metoda kształcenia natomiast jest *„dynamicznym procesem formowania, bądź formowania się człowieka, polegający na ciągłym wyborze treści kształcenia* oraz *sposobów działania nauczyciela i ucznia, tudzież na takim doborze warunków uczenia się, aby wychowanek przeżywał kształcenie jako własny proces, sprawiający jemu samemu satysfakcję a zarazem, aby jak najchętniej przystępował do jego realizacji i kontynuacji."* [373] W przypadku rozwiązywania problemów stosowanymi są metody kształcenia z grupy metod problemowych. Problemowe metody kształcenia, zwane także metodami poszukującymi należą do grupy metod aktywizujących. Polegają one na samodzielnym dochodzeniu uczniów do wiedzy poprzez rozwiązywanie problemów o charakterze poznawczym, decyzyjnym lub praktycznym.

Istnieje wiele metod, które mogą być wykorzystywane w trakcie rozwiązywania problemów. Niewątpliwie metody te służą rozwijaniu myślenia uczniów oraz aktywizują ich do podejmowania działań prowadzących do rozwiązania postawionego przez nimi

[371] G. Kapica: *Edukacyjne bariery kreatywności młodszych uczniów*. W: *Edukacja małego dziecka. Konteksty rozwojowe i wychowawcze*. T. 4. Red. E. Ogrodzka-Mazur, U. Szuścik, J. Oleksy. Cieszyn-Kraków: Oficyna Wydawnicza Impuls, 2013, s. 188.
[372] T. Kotarbiński: *O pojęciu metody*. „*Zeszyty filozoficzne Uniwersytetu Warszawskiego*" Nr 1. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1957, s. 5.
[373] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 233.

problemu. W tym miejscu scharakteryzowano kilka najbardziej popularnych metod rozwiązywania problemów. Ich opis jest lapidarny, gdyż dla potrzeb niniejszego opracowania uznano go za wystarczający.

Metoda problemowa, nazywana inaczej metodą zagadnieniową jest sposobem nauczania lub uczenia się, którego osnowę stanowi rozwiązywanie przez uczniów problemów, zagadnień praktycznych i teoretycznych. Metoda ta sprzyja zbliżaniu procesu uczenia się do procesu badania naukowego.[374] Niewątpliwymi walorami poznawczymi metody problemowej jest rozwijanie u uczniów krytycznej postawy wobec rzeczywistości, rozwijanie ich zainteresowań oraz myślenia. Dodatkowo pozytywnie wpływa ona na motywację do uczenia się.

Rozwiązywanie problemów może być z powiedzeniem realizowane przy udziale ekspresji ruchowej. Jedną z metod, która w procesie rozwiązywania problemu aktywizuje emocje, ekspresję ruchową oraz procesy poznawcze jest drama. W jej ramach wytwarzane są rozmaite sytuacje problemowe, których rozwiązywanie następuje poprzez aktywne wchodzenie w role.[375] Metoda ta opiera się na naturalnej ekspresji i skłonności wychowanka do naśladownictwa.

Powszechnie stosowaną w realiach szkolnych jest technika tak zwanej burzy mózgów, która to bywa mylnie nazywana także metodą. Jest to zespołowa technika, wywodząca się z techniki twórczego myślenia opracowanej przez A.F. Osborna.[376] W dużym uproszczeniu można powiedzieć, iż technika ta polega na zespołowym generowaniu jak największej ilości pomysłów na rozwiązanie danego problemu w jak najkrótszym czasie.

Inną, równie popularną metodą służącą do rozwiązywania problemów jest metoda sześciu kapeluszy myślowych Edwarda de Bono.[377] Autor wyróżnił w tej metodzie kilka stylów myślenia, którym przyporządkował kapelusz w odpowiednim kolorze. Są nimi: kapelusz biały – myślenie obiektywne, kapelusz zielony – myślenie oparte na faktach, kapelusz żółty - myślenie twórcze, kapelusz czarny – myślenie racjonalne i logiczne, kapelusz czerwony – myślenie oparte o uczucia i emocje oraz kapelusz niebieski, który wykorzystuje się do analizy procesu myślenia. Uczestnicy procesu rozwiązywania

[374] Ibidem, s. 234.
[375] D. Ciechanowska: *Efektywność stymulowania myślenia twórczego uczniów poprzez stosowanie dramy*. W: *Dydaktyka w dobie przemian edukacyjnych*. Red. K. Denek, F. Bereźnicki. Szczecin 1999, s. 110.
[376] E. Nęcka: *Z badań nad efektywnością technik twórczego myślenia*. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego" 1983, z. 34.
[377] E. de Bono: *Naucz swoje dziecko myśleć.* Przeł. M. Madaliński. Warszawa: Wydawnictwo PRIMA, 1994..

problemu przyjmują poszczególne style myślenia poprzez „zakładanie” poszczególnych kapeluszy.

Kolejną metodą rozwiązywania problemów jest metaplan. W ogólnym ujęciu metoda metaplanu polega na tworzeniu przez uczestników dyskusji plakatu, który jest graficznym jej skrótem, zawierającym odpowiednie wnioski.[378] Zajęcia organizowane z wykorzystaniem metaplanu mają przebieg etapowy, który można przedstawić w postaci kolejnych kroków. Po pierwsze nauczyciel przedstawia uczniom problem, będący istotą dyskusji w grupach. Następnie zespół klasowy należy podzielić na kilkuosobowe grupy. W dalszej kolejności każda z grup otrzymuje odpowiednie zadanie – problem. W ustalonym czasie grupy przygotowują swoje plakaty. Po ich wykonaniu liderzy grup przedstawiają rozwiązanie problemu przy pomocy wykonanego plakatu. Etapem końcowym jest ewaluacja zajęć.[379]

Gry dydaktyczne to kolejne metody zaliczane do problemowych metod kształcenia. Zakładają one rozbudzanie aktywności ucznia i samodzielne rozwiązywanie przez niego problemu w sytuacji wystąpienia lub też braku niezbędnej wiedzy. Można wśród nich wyróżnić zabawy inscenizacyjne, gry sytuacyjne, a także gry logiczne.[380]

Jedną z najstarszych metod rozwiązywania problemów jest sokratejska metoda myślenia twórczego. Stworzona przez Sokratesa metoda polega na toczeniu dyskusji, przez co nazywana jest także dialogiem sokratejskim. Głównymi częściami dialogu sokratejskiego są elenktyka (część negatywna, zbijająca), rozpoczynająca się od nawiązania dialogu i zmierzająca do wykazania niepożądanych konsekwencji danego poglądu oraz maieutyka (część pozytywna, naprowadzająca), rozpoczynająca przyjęcie nowych założeń, a także analizę faktów i syntezę rozwiązania. Końcowym etapem dialogu sokratejskiego jest natomiast próba uogólnienia wniosków.[381] Metoda ta polega na zmniejszaniu niewiedzy, bazującej na uzewnętrznianiu, zobiektyzowaniu i porównaniu stanowiska uczestników dialogu , którymi są mistrz i uczeń.

Równie klasyczną metodą rozwiązywania zadań jest metoda stworzona przez René Descartes`a zwanego także Kartezjuszem. Podstawowym środkiem poznania pewnego był dla twórcy metody rozum i jego wytwory. Metoda Kartezjusza charakteryzuje się czterema dyrektywami. Są nimi po pierwsze unikanie pośpiechu

[378] Z. Kierstein: *Aktywne metody w kształceniu matematycznym*. Opole: Wydawnictwo Nowik Sp.j., 2004, s. 44.
[379] Ibidem, s. 46.
[380] T. Pilch: *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku*. Tom 2..., s. 94-95.
[381] A. Góralski: *Twórcze rozwiązywanie zadań*…, s. 102-111.

i uprzedzeń podczas przyjmowania sądów, tak by sąd przyjęty za prawdziwy był w pełni niepodważalny. Po drugie, podczas rozwiązania zadania należy dzielić każde z badanych zagadnień na jak największą ilość części, co pozowali na dokładne przyjrzenie się im. Po trzecie, myślenie w trakcie rozwiązywania problemu należy prowadzić od przedmiotów najprostszych, stopniowo przechodząc do przedmiotów bardziej odległych i złożonych. I po czwarte, w postępowaniu należy czynić wszystkie kroki na tyle powszechnymi i ogólnymi, aby być pewnym, iż nie pominęło się żądnego istotnego elementu.[382] Celem Kartezjusza było stworzenie metody dającej możliwość odkrycia wiedzy pewnej, nie dającej żadnych przesłanek do jej obalenia.

Zadania o charakterze problemowym niewątpliwie wymagają odpowiednich metod ich rozwiązywania. Największe walory dydaktyczne posiadają heurystyczne metody rozwiązywania matematycznych zadań. Przytoczone powyżej dwie klasyczne metody rozwiązywania problemów, czyli dialog sokratejski oraz metoda Kartezjusza, są uznawane za podwaliny współczesnych metod heurystycznych. W kolejnym podrozdziale zaprezentowano wybrane informacje dotyczące tej grupy metod.

3.4. Heurystyczne metody rozwiązywania matematycznych zadań

Metoda rozumiana być może jako pewien system określonego postępowania. To sposób wykonania czynu złożonego, polegający na określonym doborze i układzie działań składowych, a przy tym uplanowiony i nadający się do wielokrotnego stosowania.[383] Dwiema głównymi grupami metod rozwiązywania matematycznych zadań, które są istotne z punktu widzenia podjętych w rozprawie rozważań są metody algorytmiczne i metody heurystyczne. Zanim zostanie dokonana szczegółowa charakterystyka obu grup metod, warto wspomnieć, iż wiążą się one ściśle z dwoma głównymi modelami nauczania – uczenia się, z jakimi spotykamy się we współczesnej praktyce szkolnej.

Pierwszy z nich, model tradycyjny (encyklopedyczny) polega głównie na przyswajaniu wiedzy, a jego podstawą jest koncepcja psychologii behawioralnej. Celem nauczania w takim ujęciu jest wyposażenie uczniów w wiedzę przez nauczyciela,

[382] Ibidem, s. 104-122.
[383] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 232.

głównie za pomocą podających metod kształcenia.[384] Modelowi temu przypisać można algorytmiczne metody rozwiązywania matematycznych zadań. Odmiennym podejściem do procesu nauczania – uczenia się jest model nowoczesny (generatywny). Jego istotą jest wytwarzanie i pobudzanie aktywności własnej uczniów. Celem nauczania jest w nim wszechstronny rozwój uczniów oraz wyposażenie ich w umiejętności kluczowe. Sama wiedza natomiast jest traktowana tutaj jako środek do celu, a nie jako cel sam w sobie. Podstawą takiego ujęcia jest koncepcja psychologii humanistycznej, zgodnie z którą zadaniem nauczyciela jest stosowanie aktywizujących metod uczenia się oraz stwarzanie zróżnicowanych sytuacji dydaktycznych, umożliwiających uczniom rozwijanie wrodzonych predyspozycji.[385] Z generatywnym modelem wiązać należy heurystyczne metody rozwiązywania matematycznych zadań.

Niniejsza praca dotyczy metody G. Polya, który jest uważany za twórcę współczesnej heurystyki. Zatem to heurystyczne metody rozwiązywania matematycznych zadań będą najistotniejsze w kontekście metody G. Polya. Nie sposób jednak omawiać metod heurystycznych, bez wcześniejszego, chociażby syntetycznego, przedstawienia przeciwstawianych im metod algorytmicznych.

Algorytm (z łac. *algorithmus*) jest niezawodnym przepisem postępowania, który umożliwia rozwiązywanie wszystkich zadań danego typu, jest on planem kolejnych czynności, których wykonanie może należeć do człowieka lub do maszyny.[386]

Metody algorytmiczne mają charakter reguł zamkniętych. Są pewnym gotowym schematem postępowania, informującym jakie kolejne kroki należy wykonać, by za każdym razem otrzymać prawidłowy wynik. Reguła algorytmiczna jest zatem przepisem postępowania, mającym ściśle określone zastosowania, przy czym jego pozbawione błędów wykonanie okaże się efektywne.[387] Algorytm jest schematem postępowania, zawierającym w sobie ciąg czynności (operacji), których cechami charakterystycznymi są wykonalność kolejnych kroków, jednoznaczność i powtarzalność operacji oraz skończona ilość operacji prowadzących do końcowego wyniku.[388] Ważną cechą algorytmu, która odróżnia go od innych metod rozwiązywania matematycznych zadań jest to, iż wszystkie kroki wykonywane podczas jego stosowania mają charakter mechaniczny i nie wymagają tym samym żadnej inwencji ze strony osoby wykonującej

---

[384] B. Kubiczek: *Metody aktywizujące: jak nauczyć uczniów uczenia się*. Opole: Wydawnictwo NOWIK, 2005, s. 11-13.
[385] Ibidem, s. 11-13.
[386] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 20.
[387] M. Wojnowska: M*iędzy przekazem a odkryciem…,* s. 23.
[388] H. Siwek: *Kształcenie zintegrowane na etapie…,* s. 259.

go. [389] Postępowanie wedle określonego algorytmu gwarantuje osiągnięcie sukcesu. Postępowanie algorytmiczne bowiem, w sytuacji prawidłowego wykonania, zawsze doprowadza do wyznaczonego celu.

W procesie algorytmicznego rozwiązywania zadań wyodrębnić można trzy zasadnicze fazy. Pierwsza faza – faza obserwowania, polega na analizowaniu treści zadania, wyodrębnianiu jego składników oraz identyfikacji metody rozwiązania, czyli algorytmu. Faza druga to faza uzyskiwania rozwiązania, polegająca na zastosowaniu pierwszej części algorytmu, podającej sposób na określenie niewiadomej. Ostatnia faza - sprawdzenia rozwiązania, to moment, w którym stosując drugą część algorytmu precyzuje się sposób weryfikacji otrzymanego wyniku. [390] Poprawne wykonanie wszystkich faz prowadzi do osiągnięcia założonego celu. Algorytmiczne metody rozwiązywania matematycznych zadań są metodami odtwórczymi, w stosowaniu których aktywność ucznia ogranicza się do wykonywania kolejnych, narzuconych procedur postępowania. Odmiennymi w stosunku do metod algorytmicznych są natomiast metody aktywizujące. W grupie licznych aktywizujących metod kształcenia szczególne znaczenie maja metody problemowe, w których nie stosuje się algorytmów rozwiązywania zadań, lecz wykorzystuje się tak zwane metody heurystyczne.

Heurystyka (gr. *heurisko – znajduję*) w ogólnym znaczeniu oznacza z jednej strony umiejętność dochodzenia do nowych prawd naukowych poprzez formułowanie nowych pomysłów rozwiązywania różnych zagadnień, z drugiej zaś strony jest pewną dyrektywą postępowania przy rozwiązywaniu nowych zagadnień. [391] Heurystyka, nazywana także *ars inveniendi*, jest gałęzią wiedzy zaliczaną do logiki, filozofii oraz psychologii, która często podawana jest tylko w ogólnych zarysach, rzadko zaś jest przedstawiana w sposób szczegółowy. Za jej cel uważa się badanie metod i reguł dokonywania odkryć. W związku z powyższym heurystyczny oznaczać więc będzie „służący do odkrycia”.[392] Ogólny charakter heurystyki czyni z niej zawodny sposób postępowania, który w odróżnieniu od postępowania algorytmicznego, nie daje gwarancji osiągnięcia sukcesu. E. Nęcka rozumie heurystykę w dwojaki sposób. Po pierwsze nazywa heurystyką interdyscyplinarną dziedzinę wiedzy i umiejętności praktycznych związanych z twórczym rozwiązywaniem zadań. W drugim znaczeniu

[389] Z. Semadeni: *Matematyka współczesna w nauczaniu dzieci*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe: 1975, s. 20.
[390] A. Góralski: *Twórcze rozwiązywanie zadań…*, s. 81.
[391] W. Okoń: *Nowy słownik pedagogiczny…*, s. 127.
[392] G. Polya: *Jak to rozwiązać…*, s. 99.

rozumie ją jako metodę myślenia różną od algorytmu.[393] Heurystyka jest bowiem odrzuceniem algorytmicznego sposobu postępowania.

Termin heurystyka oznacza wiedzę o sposobach przygotowywania, urzeczywistniania i oceny dokonań twórczych oraz wiedzę i umiejętności nabywania i przekazu tego rodzaju wiedzy i umiejętności.[394] W literaturze przedmiotu wyróżniono trzy rodzaje heurystyk. Pierwszą z nich jest heurystyka refleksyjna, zmierzająca do zrozumienia istoty nowatorskiego rozwiązywania zadań oraz do odkrywania sposobów ich uczenia się i nauczania. Drugi rodzaj to heurystyka pragmatyczna, zorientowana na nowatorstwo w procesie rozwiązywania zadań. Trzecim wyróżnionym rodzajem jest heurystyka informatyczna, wykorzystująca środki i metody informatyki.[395] Niezależnie od tego o jakim rodzaju heurystyki myślimy, zawsze posiadać ona będzie charakterystyczne cechy, odróżniające ją od innych sposobów postępowania.

Przedmiotem heurystyki jest ogół działań przedsiębranych przez człowieka twórczo realizującego działania praktyczne, zadania poznawcze lub działania przekazu.[396] Ponadto, jako dyscyplina naukowa, zajmuje się ona poznawaniem prawidłowości rządzących myśleniem twórczym oraz formułowaniem na tej podstawie zasad i reguł rozwiązywania nowych problemów.[397] Zadaniem heurystyki jest wytwarzanie nowych sposobów radzenia sobie w rozmaitych sytuacjach. Rozumowanie heurystyczne jest typem rozumowania nie traktowanego jako ostateczne i ścisłe, lecz jako prowizoryczne i tylko prawdopodobne, a jego celem jest odkrycie rozwiązania danego zadania czy problemu.[398] Należy pamiętać, iż rozumowanie typu heurystycznego nie rozwija się samoistnie w trakcie rozwoju procesu myślenia. Dlatego też uczniowie muszą się go nauczyć. Heurystyczny sposób rozumowania jest pewnym zbiorem rad i wskazówek, odnoszących się zarówno do tego, jak przygotować się do podjęcia danego zadania, jak również zawierającym podpowiedzi na temat tego co i jak czynić oraz czego nie czynić w trakcie jego rozwiązywania. Ponadto pozwala on także na ocenianie stanu rzeczy oraz na decydowanie o kierunku, rodzaju, liczbie,

---

[393] E. Nęcka: T*wórcze rozwiązywanie problemów*. Kraków : Oficyna Wydawnicza „Impuls", 1994, s. 24 - 28.
[394] A. Góralski: *Wzorce twórczości: eseje filozoficzne i pedagogiczne.* Warszawa: Wydawnictwo „Scholar" : Polskie Towarzystwo Uniwersalizmu, 1998, s. 36.
[395] A. Góralski: *Być nowatorem. Poradnik twórczego myślenia*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1990, s. 13-14.
[396] A. Góralski: *Reguły treningu twórczości*. Warszawa: Akademia Pedagogiki Specjalnej, 2010, s. 111.
[397] Cz. Kupisiewicz, M. Kupisiewicz: *Słownik pedagogiczny…*, s. 60.
[398] G. Polya: *Jak to rozwiązać…*, s. 218.

czy jakości dalszych kroków.[399] Przy czym pamiętać należy o tym, iż postępowanie heurystyczne charakteryzuje brak gwarancji efektywności podejmowanych kolejnych kroków służących do rozwiązania danego zadania. Rozumowanie heurystyczne, a raczej heurystyczna filozofia postępowania podczas rozwiązywania zadań ma swoje odzwierciedlenie w metodach nauczania.

Heurystyczne metody nauczania mają swoje korzenie w starożytności. Za podwaliny współczesnych heurystycznych metod rozwiązywania zadań uznaje się klasyczne metody omówione we wcześniejszej części pracy – dialog sokratejski oraz metodę Kartezjusza.

Metody heurystyczne zakładają, iż istotą nauczania jest kierowanie myśleniem i działaniem uczniów za pomocą pytań dydaktycznych, stawianych im przez nauczyciela. Odpowiedzi uczniów w konsekwencji umożliwiają im stopniowe odkrywanie, poszukiwanie i poszerzanie wiedzy oraz kształcenie sprawności i umiejętności. Dochodzenie do wiedzy, w tym rozwiązywanie zadań, odbywa się tu drogą rozumowania (dociekania) i angażuje takie procesy myślowe jak:

- „przypominanie (*kto?, co?, gdzie?, kiedy?, podaj definicję*),
- zrozumienie (*opisz, porównaj, skontrastuj, wytłumacz, przedstaw w inny sposób*),
- analizowanie (*dlaczego?, znajdź przyczynę lub uzasadnienie, dokończ rozumowanie, wyciągnij wnioski, podaj przykłady świadczące o…, sformułuj konkluzje*),
- syntezowanie (*odpowiedz na postawione główne pytanie, sformułuj przewidywanie, zaproponuj, zaplanuj, rozwiń*),
- ewaluacja (*osądź, oceń, zdecyduj, oszacuj, wyraź własną opinię*).”[400]

Przedstawione powyżej podejście nawiązuje w swojej istocie do sokratejskiej metody zadawania pytań. Podczas ich stosowania następuje stopniowe naprowadzanie uczniów na właściwe tory rozumowania. Oczywiście nauczyciel nie wyręcza swoich podopiecznych w myśleniu. Zadawanie pytań ma na celu pomoc w odkryciu wiedzy, czy też sposobu rozwiania zadania, nie ma natomiast na celu podania rozwiązania w gotowej postaci.

Podstawowymi cechami metod heurystycznych są zawodność, ponieważ ich zastosowanie nie daje gwarancji rozwiązania problemu oraz to, iż nie są one w pełni

---

[399] M. Wojnowska: *Między przekazem a odkryciem…,* s. 224.
[400] T. Pilch: *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku*. T. 3. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak”, 2003, s.168.

określone, nie podają ściśle określonych operacji myślowych, które będą niezbędne do rozwiązania problemu.[401] Zawodność metod heurystycznych powinna być postrzegana jako ich ogromna zaleta. Poznawcze lub praktyczne skutki popełnianych przez uczniów błędów pozwalają im na dokładniejsze przeanalizowanie i poznanie stosowanych przez nich procedur, tym samym powodując zwiększenie wysiłku intelektualnego, który owocować może głębszymi i trwalszymi efektami edukacyjnymi. [402] Samodzielne odkrycie wiedzy, czy też w przypadku podjętych w niniejszej rozprawie rozważań, samodzielne rozwiązanie przez ucznia matematycznego zadania, dokonane za pomocą stosowanych przez niego metod heurystycznych stanowi niezwykle cenny element matematycznego kształcenia. Rozwiązywanie zadań w oparciu o metody heurystyczne przynosi o wiele lepsze efekty niż rozwiązywanie zadań metodami algorytmicznymi.

Proces heurystycznego rozwiązywania zadań składa się z trzech podstawowych faz. Pierwsza faza, nazwana fazą obserwowania, polega na analizie zadania, wyróżnianiu jego składników oraz powiązywaniu ich z posiadaną już wiedzą, czy ze znanymi sposobami działania. Druga faza – poszukiwania rozwiązania, zwana także fazą odgadywania, polega na syntezie rozwiązania poprzez zestawienie wytworzonych planów rozwiązania oraz prób ich realizacji. Ponadto zawiera ona analizę osiągniętych postępów i popełnionych błędów oraz dążenie do uzyskania nowych środków i modyfikacji sposobu działania. Końcowa faza – faza oceny rozwiązania, nazywana także fazą sprawdzania, ma na celu ostateczną weryfikację otrzymanego wyniku. [403] Nie sposób odnieść wrażania, iż fazy rozwiązywania zadań zgodne z procedurą heurystyczną są niemal identyczne, co w przypadku ogólnych faz rozwiązywania zadań czy problemów. Wyróżnikiem będzie tu sposób działania, uwzględniający heurystyczne dyrektywy oraz wskazówki postępowania. Może się zatem zrodzić pytanie – w jaki sposób odróżnić metody heurystyczne od innych metod postępowania?

W toku swoich badań A. Góralski oznaczył siedem podstawowych wyróżników metod heurystycznych spośród innych metod kształcenia. [404] Pierwszym z nich jest stosunkowo rozległy obszar zainteresowań. Metody heurystyczne, z racji swej ogólności nadają się do rozwiązywania niemalże każdego typu zadań. Nie ma tu ograniczeń związanych z przedmiotem problemu. Każdy przedstawiony problem, czy też zadanie

[401] J. Galant: *Dostrzeganie i rozwiązywanie…,* s. 100.
[402] D. Klus-Stańska: *W nauczaniu początkowym…,* s.17-18.
[403] A. Góralski: *Twórcze rozwiązywanie zadań…*, s. 78.
[404]Ibidem, s. 83.

może zostać poddany rozwiązaniu przy ich użyciu. Drugim wyróżnikiem jest fakt stwarzania uwarunkowań sprzyjających powiązaniu zadania z elementami wcześniej nagromadzonej wiedzy i ze znanymi sposobami działania. Postępowanie heurystyczne zachęca do korzystania z posiadanej już wiedzy i z posiadanych umiejętności. To one stanowią bazę wyjściową do wytworzenia nowego sposobu rozwiązania zadania. Po trzecie heurystyczne metody rozwiązywania zadań korzystają z możliwości odwoływania się do doświadczenia osoby je rozwiązującej, jako do źródła faktów wiążących się z zadaniem. Kolejnym wyróżnikiem jest staranie się o racjonalizację prób rozwiązywania, wyrażając się zestawieniem planów działania, analizą przyczyn i uwarunkowań osiągniętego postępu i popełnionych błędów oraz uczeniem się w toku rozwiązywania problemu. Ważnymi elementami jest tutaj stosowanie analogii i indukcji jako podstawowych form rozumowania. Te z kolei nie zawsze są uwzględnianie w przypadku pozostałych metod rozwiązywania zadań. Kolejny istotnym rozróżnieniem jest wyraźnie oddzielenie poszukiwania od oceny rozwiązania, odmienność zalecanych postaw i sposobów działania rozwiązującego. Ostatnim elementem wskazanym przez A. Góralskiego jest trudność przewidywania efektywności zastosowanych rozwiązań. Metody heurystyczne są bowiem metodami zawodnymi, nie gwarantującymi osiągnięcia sukcesu w procesie rozwiązywania zadania.

Heurystyczne metody nauczania posiadają większą wartość kształcącą niż metody podające, ograniczające się do przekazywania uczniom wiedzy w postaci gotowej do przyswojenia.[405] Są one bowiem bogatsze o pierwiastek twórczy, pobudzają ponadto aktywność uczniów oraz skłaniają ich do myślenia dywergencyjnego. Dlatego też posługiwanie się nimi podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej jest wartościowe ze względu na możliwość rozwijania samodzielności myślenia uczniów. Wśród wielu zalet heurystycznego sposobu nauczania wyróżnić można także ćwiczenie zdolności uczniów do samodzielnego myślenia, rozwijanie ich inicjatywy, osiąganie zupełnego zrozumienia przyswajanego materiału przez uczniów, łatwość zapamiętywania, jako opartego na zdolności rozumowania, a nie na pamięci, co przekłada się z kolei bezpośrednio na trwałość zdobytej wiedzy.[406] Metody heurystyczne mogą być z powodzeniem stosowane podczas zajęć matematycznych z uczniami w młodszym

[405] B. Milerski, B. Śliwerski: *Leksykon PWN. Pedagogika*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2000, s. 80.
[406] S. Neapolitański: *Zarys dydaktyki matematyki…*, s. 84-85.

wieku szkolnym. Potwierdzają to badania przeprowadzone przez M. Franke.[407] W toku badań eksperymentalnych dowiodła ona, iż uczniowie klas młodszych mogą być wdrażani do rozwiązywania matematycznych zadań z wykorzystaniem metod heurystycznych. Badaczka udowodniła, iż uczniowie uczestniczący w zajęciach wykorzystujących metody heurystyczne byli lepiej przygotowani do rozwiązywania problemów matematycznych, iż uczniowie kształceni za pomocą innych metod.

Ponadto w wyniku stosowania metod heurystycznych można zaobserwować u uczniów szereg korzystnych procesów związanych z rozwiązywaniem matematycznych zadań. Można do nich zaliczyć między innymi konieczność uruchamiania strategii twórczego myślenia, konieczność posiadania zdolności do tworzenia hipotez oraz ich ciągłej weryfikacji, poszukiwanie niezawodnego dotąd sposobu działania, włączanie mniej racjonalnych czynników umysłowych, przy jednoczesnym poddawaniu ich ciągłej kontroli, a także radzenie sobie z niezidentyfikowaną lub słabo zidentyfikowaną sytuacją matematyczną i możliwością ich przenoszenia na zadania nieproblemowe.[408] P. Doulík, P. Eisenmann, J. Přibyl, J. Škoda dowiedli w sposób empiryczny, iż wykorzystanie heurystycznych metod w trakcie nauczania – uczenia się matematyki powoduje wzrost kompetencji uczniów w zakresie samodzielnego i twórczego rozwiązywania problemów.[409] Wymienione wyżej właściwości postępowania i myślenia uczniów w trakcie rozwiązywania zadań zdają się być wystarczającymi argumentami, które mogą zachęcić nauczyciela do stosowania w swojej pracy z uczniami heurystycznych metod nauczania podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej.

Uczniowie pierwszego etapu edukacyjnego charakteryzują się potrzebami poznawczymi, których celem jest samodzielne zdobywanie wiedzy oraz twórcze przekształcanie świata.[410] Uczenie się rozumiane jako samodzielne zdobywanie wiedzy przez ucznia jest naturalnym elementem procesu kształcenia. Tymczasem w rzeczywistości edukacyjnej nadal często lekceważy się potencjał rozwojowy dzieci, w tym także posiadane przez nich wrodzone predyspozycje do działań o charakterze

---

[407] M. Franke: *Rozwiązywanie zadań na lekcjach matematyki w klasach początkowych*. W: *Wybrane problemy pedagogiki wczesnoszkolnej*. Red. H. Moroz. Katowice: Uniwersytet Śląski w Katowicach, 1987, s. 107- 115.
[408] A. Nowak-Łojewska: *Wybrane obszary edukacji…, s*. 30.
[409] P. Doulík, P. Eisenmann, J. Přibyl, J. Škoda: *Unconventional Ways of Solving Problems in Mathematics Classes*. *„The New Educational Reviev”* 2016, vol. 43. No. 1.
[410] M. Ganczarska: *Nieklasyczne metody problemowe i szanse ich stosowania w edukacji wczesnoszkolnej. W: Kształcenie wczesnoszkolne na przełomie tysiącleci*. Red. W. Puślecki. Warszawa: Polska Akademia Nauk, 2000, s. 255.

twórczym.[411] Taki stan rzeczy dotyczy niestety w dużej mierze także uczenia się matematyki. Zwiększanie samodzielności uczniów w procesie uczenia się oraz stwarzanie im okazji do rozwijania aktywnej postawy jest szczególnie istotne na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej. Zasadnym jest zatem wykorzystywanie takich metod nauczania, dzięki którym możliwe staje się rozwijanie potencjału tkwiącego w uczniach. Znakomicie nadają się do tego metody heurystyczne, wśród których największe walory poznawcze w ocenie autorki niniejszej rozprawy ma heurystyczna metoda G. Polya. Metoda ta, będąca główną osią w niniejszej dysertacji została scharakteryzowana w kolejnym rozdziale.

[411] G. Kapica: *Edukacyjne bariery kreatywności…,* s. 188.

4. Heurystyczna metoda G. Polya a rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych

„Myślę, że jestem nie dość dobry do fizyki i za dobry do filozofii; matematyka jest pośrodku.”[412]

/George Polya/

Postacią, której dzieło zainspirowało autorkę niniejszej rozprawy do podjęcia przedstawionej w pracy tematyki był matematyk George Polya. Spośród wielu metod służących rozwiązywaniu matematycznych zadań, metoda stworzona przez niego zdaje się urzekać prostotą i naturalnością. W kolejnych podrozdziałach szczegółowo scharakteryzowano metodę G. Polya. Wcześniej jednak, w kilku słowach należy przedstawić sylwetkę wybitnego matematyka.

György (George) Polya, wybitny matematyk węgierskiego pochodzenia, urodził się 13 grudnia 1887 roku w Budapeszcie, a zmarł 7 września 1985 roku w amerykańskim mieście Palo Alto. Studiowała na uniwersytecie w Bukareszcie, gdzie uzyskał stopień doktora. Był związany z uczelniami takimi jak szwajcarska Federalna Politechnika ETH w Zurychu, a także z amerykańskimi ośrodkami Brown University oraz Stanford University.[413]

Matematyk ten uważany jest za twórcę nowoczesnej heurystyki. Zdaniem A. Góralskiego, G. Polya wniósł ogromny wkład w heurystykę rozumianą jako psychologia twórczości. Jego zdaniem autor metody *„stawia kilka ważnych kroków na drodze do metody uniwersalnej: podaje zręby teorii rozwiązywania zadań matematycznych; czyniąc to sięga m.in. do metody miejsc geometrycznych, metody superpozycji i metody rekursji; wyjaśnia strukturę procesu rozwiązywania zadań matematycznych; formułuje zalecenia i reguły preferencji, obowiązujące w twórczości matematycznej i – zapewne – w każdej twórczości”*.[414] Dziedziną bardzo bliską węgierskiemu uczonemu była dydaktyka matematyki. Ponadto G. Polya w swojej działalności naukowej zajmował także teorią funkcji analitycznych, teorią liczb,

[412] S. Turnau: *George Polya (1887 – 1985) – znany i nieznany*. *„Matematyka”* 2011, nr 6.
[413] J. Waszkiewicz: *Gyorgy Polya i sztuka rozwiązywania zadań*. *„Matematyka” 1995*, Nr 5, s. 303.
[414] A. Góralski: *Wzorce twórczości…*, s. 39.

kombinatoryką, a także rachunkiem prawdopodobieństwa.[415] Warto wiedzieć, iż obszar zainteresowań uczonego nie był zawężony jedynie do matematyki, gdyż znajdowały się w nim także dyscypliny takie jak fizyka, chemia i pedagogika. Swoimi pracami G. Polya przyczynił się do rozwoju takich dziedzin matematyki jak teoria funkcji rzeczywistych i zespolonych, rachunek wariacyjny, a w szczególności nierówności izoperymetryczne, rachunek prawdopodobieństwa oraz teoria liczb.[416] W Polsce G. Polya jest znany głownie za sprawą dwóch dzieł. Pierwszym z nich jest publikacja *„Jak to rozwiązać”*[417], która na język polski przetłumaczona została przez Leszka Kubika w roku 1968 roku. Drugą jest „*Odkrycie matematyczne*”[418] w tłumaczeniu Andrzeja Góralskiego z 1975 roku. Innymi znaczącymi dziełami G. Polya są między innymi wydane pierwszy raz w roku 1922, później wielokrotnie wznawiane *„Zadania i twierdzenia analizy”*[419], czy też wydana w 1954 roku *„Matematyka i wiarygodne rozumowanie”* Tom 1[420] oraz *„Matematyka i wiarygodne rozumowanie”* Tom 2.[421] Ponadto G. Polya jest autorem licznych artykułów, esejów i rozpraw naukowych.

4.1. Główne założenia metody

Metoda stworzona przez węgierskiego matematyka zaliczana jest do nowszych metod klasycznego nurtu heurystyki refleksyjnej.[422] Innymi metodami heurystycznymi zaliczanymi do nurtu refleksyjnego są metoda Sokratesa, czy metoda Kartezjusza. Jak już wcześniej wspominano, G. Polya w swoim podejściu do rozwiązywania zadań wzorował się na filozofii sokratejskiej. Proponowane przez matematyka dyrektywy postępowania w sposób bezpośredni nawiązują do metody zadawania pytań stosowanej przez antycznego uczonego. Ponadto wpływ na sposób myślenia o rozwiązywaniu zadań wywarło na węgierskim autorze dzieło innego antycznego myśliciela. Zaproponowana

---

[415] J. Wojnowski: *Wielka encyklopedia PWN*. Tom 22. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004, s. 16.
[416] A. Góralski: *Twórcze rozwiązywanie zadań…, s*. 123.
[417] G. Polya: *How to solve it?* Princeton: Princeton University Press, 1945.
[418] G. Polya: *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. New York - London: John Wiley & Sons, INC, vol. 1, 2, 1962.
[419] G. Polya: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin: Springer, 1975.
[420] G. Polya: *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vol. 1. *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton: Princeton University Press, 1954.
[421] G. Polya: *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vol. 2. *Logic, Symbolic and mathematical*. Princeton: Princeton University Press, 1954.
[422] A. Góralski: *Być nowatorem. Poradnik…,* s. 14.

przez G. Polya metoda koresponduje z myślami Euklidesa, które zawarł on w swoich „*Elementach”*.

G. Polya uważał, iż celem nowoczesnej heurystyki jest zrozumienie procesu rozwiązywania zadań, a w szczególności tych operacji myślowych, które są najczęściej wykorzystywane w tym procesie. W celu tym upatrywał szansę na ulepszenie procesu nauczania, ze szczególnym akcentem na pozytywny wpływ na nauczanie matematyki. Jego zdaniem heurystykę powinno budować się z jednej strony na doświadczeniach w rozwiązywaniu zadań, a z drugiej zaś strony na doświadczeniach w obserwowaniu innych ludzi, którzy zadania rozwiązują. Podkreślał, iż ważny jest tutaj każdy rodzaj zadań, przy czym należy wyszukiwać wspólne ich cechy i starać się odnajdywać ogólne zasady postępowania obowiązujące dla zadań różnego rodzaju i różnej tematyki.[423] Dlatego też zaproponowany przez G. Polya sposób postępowania nosi znamiona metody ogólnej. Zamysłem Autora było wypracowanie takiego schematu, którego zastosowanie sprawdzi się zarówno przy zadaniach prostych, jak i tych o bardziej skomplikowanej strukturze.

Tworząc metodę węgierski matematyk miał na względzie szczególnie dwa rodzaje zadań. Pierwszym z nich są zadania typu *udowodnić*, mające na celu ustalenie prawdziwości lub nieprawdziwości pewnego twierdzenia. Drugi typ to zadania typu *znaleźć*, których celem jest odszukanie, skonstruowanie, wytworzenie, otrzymanie oraz identyfikacja niewiadomej zadania.[424] W edukacji wczesnoszkolnej mamy do czynienia głównie z zadaniami typu znaleźć, ponieważ zadaniem uczniów jest najczęściej odszukiwanie niewiadomych.[425] Jak zauważa E. Stucki, w klasach młodszych metoda G. Pola może być wykorzystywana głównie ze względu na jej ogólność, dzięki której możliwym staje się uwzględnianie praw rozwoju psychicznego dzieci i ich myślenia oraz innych procesów poznawczych.[426] Nie sposób nie zgodzić się z takim wnioskiem. Ogólny i naturalny charakter metody zaproponowanej przez G. Polya zdaje się być rozwiązaniem znakomicie wpisującym się w sposób rozumowania uczniów pierwszego etapu edukacyjnego.

Metoda G. Polya jest uniwersalną metodą rozwiązywania problemów, doskonale sprawdzającą się podczas pracy nad rozwiązywaniem zadań matematycznych. Zadanie

---

[423] G. Polya: *Jak to rozwiązać…*, s. 116.
[424] A. Góralski: *Twórcze rozwiązywanie zadań…*, s. 126.
[425] E. Stucki: *Heurystyczna metoda Polya w początkowym nauczaniu matematyki*. „*Życie szkoły”*. Nr 10, 1992, s. 588.
[426] Ibidem, s. 589.

matematyczne, zdaniem G. Polya, pojawia się, gdy zachodzi potrzeba „*świadomego poszukiwania środka, za pomocą którego można osiągnąć dobrze widoczny ale chwilowo nieuchwytny cel*".[427] Rozwiązaniem zadania jest natomiast odnalezienie tego środka.[428] Głównymi częściami zadania są wedle założeń G. Polya warunek (założenie) oraz wniosek i to one zasługują na największą uwagę podczas jego rozwiązania.[429] W trakcie stosowania omawianej metody szczególnie istotnym elementem jest pełne jego zrozumienie. Poznanie wszystkich warunków danego zadania jest elementem niezbędnym do generowania pomysłów przez osobę je rozwiązującą.

Wedle założeń opisywanej metody, rozwiązywanie zadań rozumie się jako poszukiwanie drogi pokonania trudności, która pozwala na ominięcie przeszkód i osiągnięcie celu, którego nie sposób osiągnąć od razu i wprost.[430] Heurystyczny charakter metody sprawia, iż istnieje wiele możliwych dróg do osiągnięcia przedsiębranego celu. Drogi te natomiast nie zawsze muszą prowadzić do osiągnięcia oczekiwanego rezultatu, czyli do prawidłowego rozwiązania zadania.

Podstawowym celem nauczania zdaniem G. Polya jest to, by nauczyć myśleć, natomiast sednem nauczania matematyki jest to, by uczniowie odkrywali samodzielnie tak dużo, jak to jest możliwe w danych warunkach.[431] W przedstawianym ujęciu podstawowym celem nauczania matematyki jest rozwijanie myślenia. By móc ten cel osiągnąć G. Polya sformułował trzy podstawowe zasady nauczania myślenia.[432] Pierwsza zasada to aktywność, zgodnie z którą efektywne uczenie się jest możliwe, gdy uczący się odkrywa sam tak dużą część przyswajanego materiału, na jaką pozwalają okoliczności. W kontekście edukacji matematycznej nauczyciel powinien zatem stworzyć swoim uczniom takie warunki, które sprzyjać będą ich samodzielności. Samodzielność myślenia, będąca jednym z podstawowych celów kształcenia ma szansę na zaistnienie w sytuacji, gdy uczeń będzie miał możliwość przejęcia części odpowiedzialności za własny proces uczenia się. Drugą zasadą jest właściwa motywacja, mówiąca o tym, iż by uczenie się było efektywne, uczący się powinien być zainteresowany przyswajanym materiałem oraz, że podejmowana przez niego aktywność powinna sprawiać mu radość. To istotne elementy. Nie sposób mówić o prawidłowej motywacji zadaniowej w momencie, gdy osoba ucząca się nie wykazuje zainteresowania samym zadaniem.

[427] G. Polya: *Odkrycie matematyczne…,* s. 145.
[428] Ibidem, s. 145.
[429] Ibidem, s. 150.
[430] Ibidem, s. 13.
[431] Ibidem, s. 296.
[432] A. Góralski: *Twórcze rozwiązywanie zadań*…, s. 143

Gdy brakuje motywacji do podejmowania konkretnych aktywności, ich rezultaty mogą nie być zadawalające. Elementem, który pozytywnie wpływa na motywację i który mobilizuje do podejmowania wysiłków jest radość płynąca z działania. Nauczanie – uczenie się matematyki wiąże się z przeżywaniem przez uczniów emocji. To, czy będą one pozytywne, czy też negatywne w dużej mierze zależy od sposobu jej nauczania. Zadaniem nauczyciela jest zatem organizowanie procesu dydaktycznego, który sprzyjać będzie powstawaniu emocji pozytywnych, takich jak radość, przyjemność czy zadowolenie. Ostatnia zasada zaproponowana przez G. Polya podkreśla występowanie następstwa faz, zgodnie z którym efektywne uczenie się powinno rozpoczynać się od działania i przyswajania, prowadzić ku pojęciom i kończyć się na opanowaniu pożądanego sposobu rozumowania. Tak rozumiane następstwo faz wydaje się być naturalną kolejnością, jaka występuje podczas procesu uczenia się. Ważnym elementem jest tutaj podkreślenie istotności działania, które inicjować winno rozumowanie. Działanie to powinno mieć charakter samodzielny i być dokonywane przez każda uczącą się jednostkę. Fazy te przywodzą na myśl zarówno czynnościowe nauczanie matematyki, jak i znaczenie procesu interioryzacji w koncepcji J. Piageta.

G. Polya stworzył ponadto trzy dyrektywy postępowania[433], będące ogólnymi zasadami postępowania podczas rozwiązywania problemów. Pierwszą zasadą jest *racjonalność*, mówiąca o tym, iż osoba stająca wobec problemu nie powinna sprzeciwiać się swojemu wyczuciu, jednak przy tym rozważnie winna dostrzegać wszystkie argumenty przemawiające za i przeciw planowanym działaniom. Metoda G. Polya podkreśla rolę zdrowego rozsądku nie tylko w procesie rozwiązywania problemów, ale także w samym procesie uczenia się. Druga dyrektywa postępowania brzmi *oszczędnie, lecz bez założonych ograniczeń*. Zgodnie z nią należy trzymać się zadania blisko, jednak należy mieć w sobie także gotowość do tego, by odejść od niego na tyle daleko, na ile będą wymagać tego okoliczności. By móc rozwiązać zadanie należy stale podążać za jego treścią, być w nieustannym kontakcie z jego warunkami. Nie należy jednak odrzucać możliwości chwilowego odejścia od nich. Czasem bowiem należy poszukać rozwiązania gdzieś indziej, poza określonymi w zadaniu danymi. Ostatnia dyrektywa to *wytrwałość, lecz i różnorodność*. Zgodnie z nią należy trwać przy rozpatrywanej części zadania tak długo, jak jest szansa na użyteczność myśli. Specyfika

[433] M. Wojnowska: *Między przekazem a odkryciem…,* s. 24-25.

metody heurystycznej polega na tym, iż osoba rozwiązująca zadanie nie jest w stanie od razu określić, czy wygenerowany właśnie pomysł będzie pomysłem przybliżającym ją do otrzymania prawidłowego rozwiania. Pomysł ten powinien być realizowany do tego momentu, dopóki może okazać się być pomocnym. Jeśli okaże się, iż pomysł ten zawodzi należy go porzucić i szukać innego rozwiązania.

Węgierski matematyk stworzył takze tak zwane reguły preferencji, których celem jest ułatwienie pokonania drogi prowadzącej do rozwiązania problemu, czy też danego zadania. Reguły te mają postać rad, lub też wskazówek, które przybrały następujące brzmienie:

- „Łatwiejsze ma pierwszeństwo przed trudniejszym.
- To, co lepiej znane ma pierwszeństwo przed tym co jest znane gorzej.
- Obiekt mający wiele punktów wspólnych z zadaniem ma pierwszeństwo przed obiektem mającym mniej takich punktów.
- Całość ma pierwszeństwo przed częściami, główne części – przed pozostałymi częściami, bliższe części zadania – przed bardziej oddalonymi.
- Zadania rozwiązane wcześniej i zawierające ten sam rodzaj niewiadomej mają pierwszeństwo przed innymi rozwiązanymi wcześniej zadaniami.
- Udowodnione wcześniej twierdzenia, zawierające ten sam wniosek co twierdzenie, które staramy się udowodnić, mają pierwszeństwo przed innymi udowodnionymi wcześniej twierdzeniami.
- Zadania ekwiwalentne do zadania rozpatrywanego, mają pierwszeństwo przed zadaniami, które mogą być sprowadzone do niego lub obejmują go, a te ostatnie mają pierwszeństwo przed wszystkimi pozostałym, lub też redukcja dwustronna ma pierwszeństwo przed redukcją jednostronną, ta zaś przed innymi, słabszymi relacjami."[434]

Po zapoznaniu się z powyższą listą reguł preferencji można odnieść wrażenie, iż są one nie tylko ogólne, ale i oczywiste. Każda z nich wydaje się być zasadą, która samorzutnie nasuwa się w momencie, w którym stajemy przed koniecznością rozwiązania problemu. Niewątpliwie wrażenie takie będzie słuszne i w pełni uzasadnione. Wielokrotnie podkreślano już, iż siłą metody G. Polya jest jej prostota i naturalność. Powyższe reguły mają zachęcić do poszukiwania jak najprostszych dróg prowadzących do osiągnięcia zamierzonego celu. Niepotrzebne komplikowanie (i tak skomplikowanych

[434] G. Polya: *Odkrycie matematyczne*…, s. 288.

w zdecydowanej większości problemów), z jakimi mamy do czynienia w procesie uczenia się matematyki jest działaniem bezcelowym. Przytoczone powyżej reguły preferencji z powodzeniem mogą być stosowane dla każdego problemu matematycznego. Mogą także, a nawet powinny być stosowane na każdym etapie nauczania, w tym podczas zajęć matematycznych w klasach początkowych.

W koncepcji węgierskiego uczonego podkreślona zostaje rola samodzielności ucznia. Może on sam decydować o sposobie rozwiązania zadania, który to dla niego jest sposobem najwłaściwszym. Oczywiście równie ważną rolę będzie spełniał tu nauczyciel. Zdaniem G. Polya jednym z najważniejszych zadań nauczyciela jest pomaganie uczniom. Nauczyciel powinien rozważnie ocenić możliwości ucznia oraz to, w jakim zakresie będzie on w stanie samodzielnie sprostać zadaniu. Powinien zatem mieć świadomość tego, iż pozostawienie ucznia sam na sam z problemem może spowodować, że ten nie będzie w stanie go rozwiązać. Autor metody proponuje, by nauczyciel pomagał swoim uczniom w sposób naturalny, „ani zbyt dużo, ani zbyt mało, tak aby uczniowi pozostała odpowiednia, rozsądnie wybrana część pracy”. [435] Jest rzeczą oczywistą, iż na etapie wczesnoszkolnym nie można scedować na uczniów całej odpowiedzialności za rozwiązanie zadania. Młodsi uczniowie nie mają jeszcze wielu doświadczeń w rozwiązywaniu zadań, szczególnie w rozwiązywaniu zadań problemowych, czy niestandardowych. Stąd też nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej powinien z pewnym wyczuciem kierować działaniem ucznia w procesie rozwiązywania zadań. Wyczucie to rozumieć można jako udzielanie stosowanej pomocy w tych sytuacjach, które pomocy takiej wymagają. Udzielane wskazówki, czy też naprowadzanie na właściwy tok rozumowania nie może jednak wyręczyć uczniów w myśleniu. Takie – mądre – udzielanie wsparcia uczniom jest zadaniem trudnym. Wymaga od nauczyciela nie tylko znajomości procedury postępowania heurystycznego, ale przede wszystkim wyczucia i pewności co do słuszności swojego postępowania. Te z kolei przychodzą z czasem. Śmiem zaryzykować stwierdzenie, iż postępowanie wedle reguł heurystycznych nie jest czymś, czego można się po prostu nauczyć. By postępować wedle nich trzeba być otwartym na ich prostotę, mieć świadomość ich racjonalności oraz, co bardzo istotne, należy być przygotowanym na przyjęcie porażek. Porażki te z czasem mogą bowiem przeobrazić się w sukces – uczniów, jak i samego nauczyciela.

[435] G. Polya: *Jak to rozwiązać...*, s. 21.

W procesie rozwiązywania zadań, ale także w szerszym spojrzeniu – w procesie nauczania – uczenia się matematyki kluczową rolę pełni podejście ucznia do samego przedmiotu jakim jest matematyka. Jak podkreślał węgierski matematyk, każdy uczeń powinien dać matematyce szansę na to, by go zachwyciła, by wzbudziła jego zainteresowanie. Jak twierdził, uczniowie mogą zaprzepaścić swoją szansę na zachwycenie się matematyką, jeśli będą traktowali ją wyłącznie jako przedmiot, który trzeba zaliczyć i o którym należy zapomnieć zaraz po zdaniu ostatniego egzaminu. Najważniejszą kwestią w rozumieniu G. Polya jest to, by każdy uczeń odkrył swoje zdolności i zamiłowania.[436] Po raz kolejny podkreślona zostaje kwestia podejścia osoby uczącej się do procesu zdobywania wiedzy. Po raz kolejny również Autor metody próbuje przekonać do tego, iż utrudnianie sobie pewnych zagadnień nie ma żadnego sensu. Uczenie się matematyki, tak samo zresztą jak i rozwiązywanie zadań może stać się dla ucznia zarówno przeżyciem pozytywnym, jak i negatywnym. Podejście prezentowane przez G. Polya może uświadomić pewną prawidłowość. Otóż, to jak bardzo polubimy, lub też to, jak bardzo zniechęcimy się do matematyki i do wszelkich działań związanych z jej uczeniem się zależy w dużej mierze od nas samych. Należy po prostu dać matematyce szansę. Pozytywne nastawienie do przedmiotu może bowiem przynieść wymierne korzyści w procesie rozwiązywania matematycznych zadań i problemów.

G. Polya zaproponował swój własny sposób na to, jak można wdrożyć do praktyki wymienione przez niego zasady nauczania myślenia. Swoją propozycję nazwał „*seminarium rozwiązywania zadań*". Seminarium ma formę etapową i przebiega w określonym porządku. [437] Na początku nauczyciel, znający i akceptujący metodę omawia i rozwiązuje zadania typowe, dzięki czemu wdraża swoich uczniów do rozpoznawania i formułowania metod rozwiązywania zadań. Uczestnicy seminarium otrzymują jednocześnie zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania, stanowiący niejako zadania domowe, dzięki rozwiązaniu których mają możliwość pełniejszego zrozumienia i pogłębienia znajomości metod rozwiązywania, które omawiane były przez nauczyciela. Po samodzielnym rozwiązaniu zadań, niektóre z nich są omawiane na forum przez wybranego ucznia. Omówienie zadań może zostać powierzone zarówno temu uczestnikowi, który wykonał swoje zadanie poprawnie, jak i temu, który popełnił podczas rozwiązywania swoich zadań błędy. W tym momencie nawiązuje się dyskusja na temat rozwiązywania poszczególnych zadań. W podstawowej fazie seminarium obowiązuje

[436] Ibidem, s. 5.
[437] A. Góralski: *Twórcze rozwiązywanie zadań…*, s. 144-145.

zasada pracy grupowej, realizowana w trzech etapach. W pierwszym etapie każdy uczestnik otrzymuje określone, różne od innych i tylko jedno zadanie, które powinien rozwiązać samodzielnie, bez pomocy innych uczestników, jednak może korzystać przy tym z pomocy prowadzącego seminarium. W etapie drugim, każdy uczestnik sprawdza, uzupełnia i jeśli to możliwe – upraszcza swoje rozwianie. Ponadto planuje sposób zaprezentowania swojego zadania na forum grupy. W każdej sprawie może konsultować się także z prowadzącym seminarium. W etapie trzecim, uczestnicy tworzą grupy samodzielnie określając ich skład. Najczęściej są to grupy czteroosobowe. W dalszej kolejności jeden z uczestników przejmuje na siebie rolę prowadzącego i prezentuje pozostałym członkom swojej grupy zadanie, zachęcając ich jednocześnie do aktywności oraz poszukiwania rozwiązania. Gdy rozwiązanie jest już gotowe, rolę prowadzącego przejmuje kolejna osoba z grupy i postępowanie powtarza się. Gdy wszyscy członkowie grupy zaprezentują swoje zadanie, następuje częściowa zmiana składów grup. Zadania szczególnie interesujące oraz szczególnie dobre pomysły na ich rozwiązanie są prezentowane na forum grupy tak, by wszyscy uczestnicy seminarium mieli okazję ich poznania.

Zaprezentowane seminarium rozwiązywania zdań zachęca do rozbudzania u uczniów postawy twórczej. Dzięki aktywności realizowanej w różnych dziedzinach i zakresach uczniowie zdobywają kompetencje niezbędne do pełnego i prawidłowego funkcjonowania w świecie.[438] Metoda seminarium stworzona przez G. Polya niewątpliwie stwarza ku temu rozmaite okazje. Zdaje się, iż może ona z powodzeniem znaleźć zastosowanie podczas zajęć matematycznych na etapie nauczania wczesnoszkolnego. Nauczyciel pragnący korzystać z *seminarium* w pracy z młodszymi uczniami powinien mieć świadomość tego, na jakie bariery i ograniczenia może natrafić w trakcie jego realizacji. Pierwszą barierą może okazać się poziom samodzielnego czytania ze zrozumieniem matematycznych tekstów przez uczniów. W klasach początkowych u uczniów kształtuje się technika czytania, a ta wpływa bezpośrednio na rozumienie czytanych przez nich treści. Drugą sprawą jest to, iż uczniowie, szczególnie w przypadku stosowania seminarium rozwiązywania zadań, mogą nie rozumieć samej formy pracy. Mogą gubić się w kolejności etapów, co z kolei będzie wydłużało i zaburzało tok zajęć. Uczniowie mogą także wykazywać trudności w zakresie samodzielnego generowania pomysłów na rozwiązanie postawionych im zadań. Oczywiście, wraz z upływem czasu,

[438] M. Morga: *Twórcza aktywność uczniów*. *„Życie szkoły”* 1990, nr 10, s. 488.

wraz z nabieraniem doświadczeń w ich rozwiązywaniu, pomysły te powinny przychodzić im z coraz większą łatwością i swobodą. Niemniej jednak koncepcja seminarium G. Polya jest propozycją, której stosowanie może uczynić zajęcia matematyczne realizowane na pierwszym etapie edukacyjnym bardziej wartościowymi. Nauczyciel świadomy możliwości i ograniczeń swoich uczniów, jak również możliwości i ograniczeń samej metody może spróbować włączyć ją do stosowanych przez siebie metod pracy. Metoda seminarium rozwiązywania zadań jest niewątpliwie metodą czasochłonną, podczas stosowania której pośpiech nie jest wskazany. Stąd też jej realizacja nie powinna stwarzać większych trudności w klasach I-III. Edukacja wczesnoszkolna zakłada, iż to nauczyciel reguluje czasem pracy uczniów, nie jest on zatem ograniczony 45 - minutowymi lekcjami, jak dzieje się to w przypadku klas starszych. Z tego powodu podczas zajęć matematycznych w klasach początkowych nauczyciel jest w stanie wygospodarować odpowiednią ilość czasu na realizację rozwiązywania zadań z wykorzystaniem seminarium G. Polya.

Niejako nawiązujący do koncepcji G. Polya zdaje się być kodeks metodyczny dla nauczycieli klas początkowych, którzy chcą rozbudzać twórczą postawę u swoich uczniów. Czternaście zasad, którymi powinni kierować się nauczyciele przyjęło następujące brzmienie:

1. „W każdej możliwej sytuacji zadawaj uczniom pytania otwarte, mające wiele poprawnych, właściwych odpowiedzi – pytania wymagające zastosowania wiedzy, wymyślenia czegoś nowego, zbadania i odkrycia po swojemu czegoś, co już istnieje.
2. Zaciekawiaj i utrzymuj zaciekawienie na wysokim poziomie.
3. Twórz w klasie klimat dobrej zabawy.
4. Nie potęguj rywalizacji i przesadnego współzawodnictwa.
5. Sprzyjaj powstawaniu oryginalnych pomysłów.
6. Zapoznawaj swoich podopiecznych z prostymi sposobami rozwiązywania problemów w różnoraki sposób.
7. Pamiętaj o osobach izolujących się od innych, oni też mogą zaskoczyć innych swoimi niezwykłymi pomysłami.
8. Dbaj, aby twoi podopieczni uczyli się sprawności twórczych; pomagaj im w osiąganiu wymiernych rezultatów, wzmacniając w nich poczucie własnej wartości oraz wiarę w swoje możliwości.

9. Pokazuj uczniom, że warto myśleć oryginalnie. Błędy i porażki zdarzają się każdemu człowiekowi. Ucz, że porażka też może wnieść coś pozytywnego w nasze życie.
10. Ucz dyskutować swoich podopiecznych i pokazuj, jak być asertywnym w wyrażaniu swoich opinii.
11. Nie popisuj się przed uczniami swoim potencjałem twórczym, nie rób nic ich kosztem.
12. Pamiętaj, jeśli uczestniczysz w zajęciach twórczych razem z dziećmi, nie jesteś śmieszny. Swoje rezultaty pracy przedstawiaj zawsze na końcu.
13. Nie oceniaj osoby ucznia, ale jego zachowania, które wykraczają poza przyjęte przez grupę zasady pracy.
14. Wykaż się cierpliwością, czasami na efekty pracy z dziećmi i u dziecka trzeba długo czekać."[439]

Zaprezentowane powyżej poszczególne punkty kodeksu korespondują bezpośrednio z postulatami dotyczącymi sposobów pracy nauczyciela z uczniami, jakie proponował w swojej koncepcji G. Polya. Wskazówki te maja ogólną postać, dzięki czemu mogą zostać zaadaptowane na potrzeby nauczania każdego przedmiotu, na każdym etapie edukacyjnym. Mogą ponadto stać się cenną pomocą dla nauczyciela, który chciałby rozbudzać w swoich uczniach ciekawość poznawczą na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej.

Węgierski matematyk sformułował kilka wskazań dla nauczycieli, które stanowią jednocześnie zbiór pożądanych postaw, jakie powinni prezentować.[440] Po pierwsze, zdaniem G. Polya nauczyciel powinien być zainteresowany swoim przedmiotem. Powinien też dobrze go znać. Stąd też, uczenie matematyki na etapie wczesnej edukacji nie zwalnia nauczyciela od konieczności posiadania szerszej wiedzy z jej zakresu. Koniecznym warunkiem dobrego nauczania matematyki jest posiadanie odpowiedniego zasobu wiedzy i umiejętności, które wykraczają poza nauczane w codziennej pracy obszary. Po drugie, nauczyciel powinien zdawać sobie sprawę z tego, iż najlepszym sposobem uczenia się jest samodzielne odkrywanie. Z tego względu należy umożliwić uczniom dokonywanie samodzielnych odkryć w drodze dochodzenia do wiedzy. Pomocne okazują się tu być zasady aktywnego uczenia się. Po trzecie, dobry nauczyciel

[439] B. Ochmańska: *Twórcze rozwiązywanie problemów*. W: *Rozwijanie zainteresowań i zdolności matematycznych uczniów klas I-III szkoły podstawowej: poradnik dla nauczyciela*. Red. I. Fechner-Sędzicka, B. Ochmańska, W. Odrobina. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji, 2012, s. 73.
[440] A. Góralski: *Twórcze rozwiązywanie zadań*…, s. 145-147.

powinien potrafić wczuć się w sytuację swoich uczniów. Powinien posiadać pewien stopień empatii, dzięki któremu będzie on zdolny do uświadomienia sobie ich oczekiwań, możliwości, czy napotykanych trudności. Kolejną istotną rzeczą jest to, by podczas swojej pracy nauczyciel nie skupiał się jedynie na przekazywaniu wiedzy. G. Polya postuluje odejście od podających metod nauczania i zwrot ku metodom problemowym. Istotnym jest także, by postępowanie nauczyciela stanowiło przykład dla jego uczniów. Chodzi tu o pewną prawdziwość – sposób postępowania powinien być bowiem zgodny z naszymi przekonaniami. Nauczyciel prawdziwy, nie udający ma szansę przekonania swoich uczniów do słuszności prezentowanego przez siebie sposobu postępowania, czy działania. Zadaniem nauczyciela jest ponadto nauczenie swoich podopiecznych sztuki odgadywania rozwiązań, która w dużej mierze opiera się na myśleniu indukcyjnym i analogicznym. Kolejna ważna kwestia to skłanianie swoich uczniów do refleksji oraz sprzyjanie im w dostrzeganiu przez nich ogólnych cech metod postępowania. Mogą one bowiem okazać się użyteczne w rozmaitych sytuacjach, tak szkolnych, jak i życiowych oraz przy rozwiązywaniu zadań różnego typu. Następną, niemniej ważną rzeczą jest to, by nauczyciel nie narzucał uczniom swojego zdania, a jedynie sugerował możliwe warianty postępowania. Ostatnią wskazówką przekazaną przez G. Polya jest to, by nauczyciel nie wykonywał pracy za swoich uczniów, by nie wyręczał ich w myśleniu.

Po lekturze przytoczonych powyżej wskazań G. Polya, podobnie zresztą jak po lekturze zaprezentowanego wcześniej kodeksu postępowania, nasuwa się pewna refleksja. Otóż, nauczanie matematyki nie jest łatwym zadaniem. Otrzymane wskazówki są oczywiście pewnym wyznacznikiem tego, w jaki sposób nauczyciel powinien postępować, by osiągnąć sukces podczas pracy ze swoimi uczniami. Jak jednak wdrożyć je do swojej codziennej pracy? To trudne zadanie, wymagające wysiłku i chęci ze strony nauczyciela. Niemniej jednak autorka niniejszej rozprawy jest absolutnie przekonana o tym, iż warto próbować. Podejście do nauczania – uczenia się matematyki, w tym także do rozwiązywania zadań, zaproponowane przez węgierskiego matematyka jest podejściem słusznym i wartym podejmowania trudu urzeczywistniania go w swojej codziennej praktyce edukacyjnej. Nauczyciel postępujący zgodnie z przytoczonymi wskazaniami ma szansę na nawiązanie ze swoimi uczniami dobrego kontaktu oraz na stworzenie atmosfery sprzyjającej procesowi uczenia się i samodzielnemu rozwiązywaniu przez uczniów zadań.

Rozwiązywanie zadań zgodnie z koncepcja G. Polya ma charakter etapowy. W kolejnym podrozdziale zaprezentowane zostały kolejne fazy rozwiązywania zadań zaproponowane przez węgierskiego uczonego.

4.2. Etapy rozwiązywania matematycznych zadań

Zdaniem G. Polya rozwiązywanie zadań jest podstawową czynnością ludzkiej aktywności. Dzieje się tak dlatego, iż większa część myślenia człowieka wiąże się z jakimś zadaniem lub problemem.[441] Każdy człowiek jest stawiany w sytuacji rozwiązywania problemów lub też zadań. Ma to miejsce także w szkole, gdzie rozwiązywanie problemów jest związane z procesem uczenia się. Oczywiście najwięcej okazji do szkolnego rozwiązywania zadań i problemów ma miejsce na matematyce. Problemy, wobec których jesteśmy stawiani nie są jednak związane tylko i wyłącznie ze szkołą. W trakcie swojego życia człowiek wielokrotnie staje przed koniecznością rozwiązywania problemów wiążących się z rozmaitymi sytuacjami dnia codziennego, które to z kolei posiadają zróżnicowane stopnie trudności i skomplikowania. Racjonalne i umiejętne rozwiązywanie zadań jest więc umiejętnością niezbędną do prawidłowego funkcjonowania w codziennym życiu.

W koncepcji G. Polya rozwiązywanie zadań jest procesem etapowym. Autor wyróżnił cztery podstawowe fazy, składające się na procedurę rozwiązywania każdego zadania. Są nimi zrozumienie zadania, układanie planu rozwiązania, wykonanie planu oraz rzut oka wstecz.[442] W kolejnych publikacjach fazy te zostały uzupełnione o kolejną, piątą, która znalazła swoje miejsce tuż przed ostatnią z wyżej wymienionych. I tak oto, w pełnym ujęciu heurystyczna metoda G. Polya przebiega wedle kolejnych etapów:

- zrozumienie zadania,
- układanie planu rozwiązania,
- wykonanie planu,
- sprawdzenie wyniku,

[441] A. Góralski: *George`a Polya, pedagogika mistrzostwa, czyli o relacji uczeń-mistrz i jej regułach*. Warszawa: Wydawnictwo Akademii Pedagogiki Specjalnej, 2013 s. 86.
[442] G. Polya: *Jak to rozwiązać…*, s. 25.

– refleksja nad rozwiązaniem, czyli rzut oka wstecz.[443]

Każda z wymienionych faz jest tak samo istotna i użyteczna dla rozwiązania danego zadania lub problemu. W trakcie ich rozwiązywania nie powinno się zatem omijać żadnej z nich. Autor metody zaznacza jednak, iż może się szczęśliwie zdarzyć, że rozwiązanie zadania nastąpi z pominięciem jednej, a czasem nawet kilku faz. Jest to możliwe, ponieważ czasami osiągnięcie poprawnego wyniku jest łatwiejsze, niż można było początkowo przypuszczać. Niemniej jednak może zdarzyć się i tak, iż osoba rozwiązująca zadanie wykona wszystkie zaproponowane przez węgierskiego matematyka etapy i finalnie nie osiągnie prawidłowego wyniku. Ryzyko to jest wpisane w charakter metody heurystycznej. Ten naturalny stan rzeczy nie powinien zniechęcać rozwiązującego do podejmowania kolejnych prób. Powinien natomiast skłonić go do refleksji i odpowiedzi na pytanie dlaczego, pomimo wykonania wszystkich etapów rozwiązania zadania nie uzyskał on zadawalającego rezultatu? G. Treliński upatruje w zaproponowanym przez G. Polya schemacie szansę na podniesienie efektywności procesu uczenia rozwiązywania zadań.[444] Podejście takie jest uzasadnione. Skuteczność metody G. Polya została potwierdzona miedzy innymi w badaniach, jakie przeprowadził E. Stucki. W ich trakcie Autor dowiódł, iż eksperymentalne zastosowanie metody rozwija u uczniów umiejętność samodzielnego rozwiązywania zadań. Ponadto w toku swoich badań udowodnił, iż metoda G. Polya pozytywnie wpływa na rozwijanie u uczniów umiejętności myślenia. Kolejnym wnioskiem płynącym z badań E. Stuckiego jest to, iż uczniowie rozwiązujący zadania z wykorzystaniem metody G. Polya wdrażają się do prawidłowej techniki uczenia się.[445] Jak pokazuje przytoczony przykład stosowanie metody G. Polya może istotnie przyczynić się do wzrostu umiejętności uczniów w zakresie rozwiązywania przez nich matematycznych zadań.

Ważnym zagadnieniem w procesie rozwiązywania zadań w ujęciu G. Polya, jest zrozumienie czytanego przez ucznia tekstu matematycznego. Nie jest bowiem możliwym osiągniecie prawidłowego rozwiązania zadania, bez zrozumienia na czym ono polega. W. Kojs podkreśla, iż nawyk rozumienia przez uczniów czytanego tekstu powinien być w nich kształtowany od samego początku nauki czytania.[446] Rola czytania ze zrozumieniem, w tym czytania testów matematycznych, jest akcentowana między

[443] A. Góralski: *Twórcze rozwiązywanie zadań…*, s. 126.
[444] G. Treliński: *Aspekty dydaktyczne zadań…,* s. 21.
[445] E. Stucki: *Heurystyczna metoda Polya…,* s. 588-592.
[446] W. Kojs, A. Różak-Frączek: *Rola układu pytań w działalności poznawczej uczniów klas początkowych*. W: *Problemy działań dydaktycznych*. Red. W. Kojs. Katowice: Uniwersytet Śląski, 1988, s. 47.

innymi w obowiązującej obecnie Podstawie programowej. Wedle jej zapisów uczeń „analizuje i rozwiązuje zadania tekstowe proste i wybrane złożone; dostrzega problem matematyczny oraz tworzy własną strategię jego rozwiązania, odpowiednią do warunków zadania; opisuje rozwiązanie za pomocą działań, równości z okienkiem, rysunku lub w inny wybrany przez siebie sposób”.[447] W literaturze podkreśla się, iż proces rozumienia czytanych treści zawiera w sobie elementy myślenia problemowego, charakteryzuje się więc myśleniem produktywnym i twórczym.[448] Analiza treści zadania zdaje się mieć kluczowe znaczenie w procesie rozwiązywania zadań matematycznych. Samo przeczytanie przez ucznia treści zawartych w zadaniu nie jest warunkiem wystarczającym. Ważnym jest, by uczeń tą treść zrozumiał, by potrafił wydobyć z niej wszystkie niezbędne informacje oraz, by potrafił w odpowiedni sposób je zastosować.

Węgierski matematyk, doceniał rolę zdrowego rozsądku w procesie rozwiązywania zadań. Owe zdroworozsądkowe podejście odnajdywał w przysłowiach, które traktował jako poglądowe opisy postępowania heurystycznego.[449] Poszczególne etapy rozwiązywania zadań G. Polya opatrzył zbiorem przysłów, które w istocie oddają sens poszczególnych operacji myślowych, jakie należy wykonać w trakcie rozwiązywania danego zadania. Przysłowia i odpowiadające ich fazy rozwiązywania zadań przybierają następujące brzmienie:

- Zrozumienie zadania: *Kto źle rozumuje, źle odpowiada*, *Pomyśl o końcu, zanim rozpoczniesz*, *Głupiec troszczy się o początek, mądry o koniec*, *Tam, gdzie jest chęć, jest też i sposób* oraz *Dla chcącego nie ma nic trudnego*.
- Układanie planu rozwiązania: *Pilność jest matką pomyślności*, *Dębu nie ścina się jednym uderzeniem*, *Jeśli na razie ci się nie udało, to spróbuj od nowa*, *Próbuj wszystkich kluczy pęku*, *Strzały robi się ze wszystkich gatunków drzewa*, *Żagle trzeba ustawiać wedle wiatru*, *Musisz tak postępować, jak możesz, jeśli nie jesteś w stanie postępować tak, jak byś chciał*, *Mądry zmienia swoje zamiary, głupi – nadzieje*, *Miej dwie cięciwy do swojego łuku*, *Rób i przerabiaj, dzień jest długi* oraz *Rybołówstwo to łapanie ryb, a nie zarzucanie wędki*.

[447] *Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14.02.2017 roku* [http://dziennikustaw.gov.pl/du/2017/356/1]
[448] E. Guttmejer: *Rozumienie treści symbolicznych przez dzieci z klas III-V. Czytanie ze zrozumieniem*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1982, s. 5.
[449] G. Polya: *Jak to rozwiązać…*, s. 108.

- Wykonywanie planu rozwiązania: *Spójrz zanim skoczysz*, *Spróbuj zanim uwierzysz*, *Rozumna zwłoka czyni drogę bezpieczniejszą*, *Chcesz żeglować bezpiecznie – nie zwijaj żagli*, *Zrób to, co wyda się najrozsądniejszym*, *Spodziewaj się najlepszego*, *Szybko wierzymy w to, czego pragniemy*, *Na drabinę wchodzi się szczebel po szczeblu*, *Pomału i do skutku* oraz *Zrób to stopniowo, etapami*.
- Rzut oka wstecz: *Nie myśli dobrze ten, kto nie myśli na nowo*, *Najlepsze są drugie myśli* oraz *Bezpieczniej jest pływać z dwiema kotwicami*.[450]

Ten, nieco zabawny, sposób zobrazowania kolejnych etapów heurystycznego rozwiązywania zadań oddaje uniwersalną istotę myślenia zaproponowanego przez G. Polya. Naturalność i prostota, a przy tym geniusz stworzonej przez niego metody nie boi się czerpać mądrości z wiedzy potocznej, ludowej czy z intuicji. Są one bowiem niezwykle istotne, a czasem nawet kluczowe w drodze do odkrycia poprawnego sposobu rozwiązania zadania. W równie zabawny sposób G. Polya formułuje cztery, jak sam je nazwał „syntetyczne sentencje", korzystanie z których może ułatwić proces rozwiązania zadania. Są nimi:

- *„Cel wskazuje metodę"*,
- *„Twymi najlepszymi przyjaciółmi są: co, dlaczego, gdzie, kiedy i jak"*,
- *„Nie wierz niczemu, ale powątpiewaj jedynie w to, co budzi wątpliwości"*,
- *„Rozejrzyj się wokół, gdy znalazłeś pierwszego prawdziwka lub dokonałeś nowego odkrycia – one rosną gromadnie"*.[451]

Kolejny raz dostrzec można zamiłowanie G. Polya do możliwie jak największego upraszczania drogi wiodącej do rozwiązania zadania. Korzystanie z prostej mądrości zawartej w przytoczonych wyżej słowach nie czyni metody uboższą. Nie czyni jej także mniej znaczącą na tle innych, być może bardziej naukowo uzasadnianych metod. Zdroworozsądkowe podejście matematyka do procesu rozwiązywania zadań, a tym samym do samego procesu nauczania – uczenia się wydaje się mieć ogromną wartość. Matematyka ma bowiem tłumaczyć otaczający człowieka świat. Dlaczego zatem miałaby robić to w sposób skomplikowany i niezrozumiały?

Każdy z zaproponowanych przez G. Polya etapów rozwiązywania zadań opatrzony został przez Autora metody wykazem pytań i wskazówek, których zadaniem jest naprowadzenia ucznia na właściwy tok rozumowania. Odpowiednio dobrane pytania,

[450] A. Góralski: *George`a Polya, pedagogika mistrzostwa…,* s. 86-88.
[451] Ibidem, s. 88.

zadawane uczniom przez nauczyciela mają pomóc im w samodzielnym rozwiązaniu zadania. G. Polya sugeruje, iż najlepsza z dydaktycznego punktu widzenia jest próba postawienia się przez nauczyciela na miejscu ucznia, której celem jest zrozumienie procesów, jakie dzieją się w jego umyśle oraz zadawanie uczniowi takich pytań lub wskazywanie na takie kroki w rozumowaniu, które mogłoby samodzielnie przyjść mu na myśl. [452] Węgierski matematyk sformułował zestaw wskazówek i pytań pomocniczych, z których nauczyciele winni korzystać pomagając uczniom w odkryciu właściwej drogi rozwiązania zadania. Poniższa lista zawiera pytania pomocnicze i wskazówki z podziałem na poszczególne fazy rozwiązywania zadań zaproponowane przez G. Polya.

- Faza pierwsza – zrozumienie zadania – *staraj się zrozumieć zadanie*. Przykładowe pytania i wskazówki:
  - *Co jest niewiadome? Co jest dane? Jaki jest warunek?*
  - *Czy warunek można spełnić? Czy warunek wystarcza do określenia niewiadomej? Czy warunek jest niewystarczający? Czy warunek jest zbyt obszerny? Czy warunek jest sprzeczny?*
  - *Zrób rysunek. Wprowadź odpowiednie oznaczenia.*
  - *Wydziel poszczególne części warunku. Czy możesz zapisać poszczególne części warunku?*
- Faza druga – układanie planu rozwiązania – *znajdź związek miedzy danymi i niewiadomymi*. Przykładowe pytania i wskazówki:
  - *Czy nie spotkałeś się już kiedyś z tym zadaniem? Czy nie spotkałeś się już z tym samym zadaniem ale w innej postaci?*
  - *Czy znasz jakieś pokrewne zadanie? Czy znasz jakieś twierdzenie, które mogłoby tu być użyte?*
  - *Spójrz na niewiadomą! I spróbuj sobie przypomnieć jakieś dobrze znane ci zadanie mające tę samą lub podobną niewiadomą.*
  - *Oto rozwiązane już przedtem zadanie, pokrewne z twoim zadaniem. Czy nie mógłbyś z niego skorzystać? Czy nie mógłbyś skorzystać z jego wyniku? Czy nie mógłbyś skorzystać z zastosowanej w nim metody? Czy nie trzeba wprowadzić jakiegoś elementu pomocniczego, aby móc z tego zadania skorzystać?*

[452] G. Polya: *Jak to rozwiązać…*, s. 19.

- *Czy nie mógłbyś postawić zadania na nowo, w inny sposób? Czy nie mógłbyś tego zrobić jeszcze inaczej? Odwołaj się do definicji.*
- *Jeżeli nie możesz rozwiązać postawionego zadania, spróbuj najpierw rozwiązać jakieś zadanie pokrewne. Czy nie mógłbyś wymyślić jakiegoś bardziej dostępnego zadania pokrewnego? Bardziej ogólnego zadania? Bardziej specjalnego? Analogicznego? Czy nie mógłbyś rozwiązać części zadania? Zatrzymaj tylko część warunku, resztę odrzuć; do jakiego stopnia niewiadoma jest wtedy określona, jak może się ona zmieniać? Czy nie mógłbyś zmienić niewiadomej albo danych, albo – jeśli trzeba – i niewiadomej i danych, tak aby nowa niewiadoma i nowe dane były bliższe sobie?*
- *Czy skorzystałeś ze wszystkich danych? Czy skorzystałeś z całego warunku? Czy brałeś pod uwagę wszystkie istotne pojęcia zawarte w zadaniu?*

* Faza trzecia – wykonywanie planu – *wykonaj swój plan*. Przykładowe pytania i wskazówki:
  - *Wykonując swój plan rozwiązania sprawdzaj każdy krok. Czy jest dla ciebie jasne, że krok jest poprawny? Czy możesz to udowodnić?*
* Faza czwarta – rzut oka wstecz – *przestudiuj otrzymane rozwiązanie*. Przykładowe pytania i wskazówki:
  - *Czy możesz sprawdzić wynik? Czy możesz sprawdzić uzasadnienie rozwiązania?*
  - *Czy możesz otrzymać wynik w inny sposób? Czy możesz objąć go jednym rzutem oka?*
  - *Czy możesz wykorzystać wynik albo metodę rozwiązania do innego zadania?*[453]

W wymienionych powyżej wskazówkach i pytaniach pomocniczych ponownie dostrzec można ogólność oraz zamiłowanie Autora do prostych rozwiązań. Poszczególne propozycje pytań zdają się być oczywistymi, same nasuwają się w trakcie wykonywania kolejnych faz rozwiązywania zadań. Oczywistymi są jednak dla osoby dorosłej, mającej bogate doświadczenia w zakresie rozwiązywania zadań. Uczniowie, szczególnie uczniowie pierwszego etapu edukacyjnego mogą napotykać trudności w trakcie wykonywania kolejnych etapów metody. Dlatego też rolą nauczyciela jest udzielanie im wsparcia. Zdaniem G. Polya nauczyciele posługujący się wymienionymi wyżej wskazówkami i pytaniami pomocniczymi powinni rozpoczynać pracę z uczniami

[453] Ibidem, s. 15.

od zadawania pytań ogólniejszych, a następnie, jeśli będzie tego wymagała sytuacja powinni przechodzić do pytań bardziej szczegółowych i konkretnych.

G. Polya, nazywający swoją metodę „*metodą zadawania pytań*”, nie wyklucza możliwości rozszerzenia przedstawionej wyżej listy o inne pytania, i wskazania. W zamyśle Autora stworzona przez niego metoda jest elastyczna. Dopuszczalne, a nawet pożądane jest zatem dokonywanie jej modyfikacji oraz przyjmowanie różnych podejść do procesu rozwiązywania zadań. [454] Każdy nauczyciel ma prawo udoskonalać zaproponowaną listę pytań w taki sposób, by jak najlepiej odpowiadała na potrzeby jego samego oraz jego uczniów. Musi jednak przy tym pamiętać, by zaproponowana przez niego lista pytań nie była zbyt długa, a pytania i wskazówki były proste, naturalne i zmierzające od ogółu do coraz większej szczegółowości. [455] Jeśli stworzone przez nauczyciela pytania pomocnicze lub wskazówki kierowane do uczniów spełniać będą te warunki, jest wielce prawdopodobne, że staną się użyteczna pomocą dala uczniów i samego nauczyciela.

Węgierski matematyk zwraca uwagę na to, iż osoba rozwiązująca zadanie powinna posiadać nie tylko pewien zasób wiedzy o przedmiocie, którego to zadanie dotyczy, ale powinna także potrafić powiązywać wyizolowane fakty, wiążąc je w jak najlepiej dostosowaną do zadania całość. [456] Uczniowie natomiast wykazują duże trudności podczas rozwiązywania matematycznych zadań. Wymienione wyżej wskazówki mogą okazać się pomocne w procesie dochodzenia do otrzymania prawidłowego rozwiązania zadania. Jak pokazują badania E. Stuckiego, podczas rozwiązywania zadań tekstowych uczniowie napotykają na różnego rodzaju trudności w myśleniu matematycznym. Trudności te mogą występować na każdym etapie rozwiązywania problemów zaproponowanym przez G. Polya i mogą obejmować:

- „trudności występujące w treści zadania:
  - niezrozumienie rzeczowych stosunków sytuacji problemowej,
  - pomijanie danych zapisanych słowami,
  - niedostrzeganie liczb,
  - niezrozumienie pojęć,
  - niezrozumienie treści,
- trudności występujące w warunkach zadania:

[454] Ibidem, s. 39.
[455] Ibidem, s. 39.
[456] Ibidem, s. 153.

– nieuchwycenie zależności miedzy danymi a poszukiwaną,
– niedostrzeganie problemu,
– niezrozumienie struktury zadnia,
– nieumiejętność operowania większą liczbą danych,
- trudności występujące w planie rozwiązania:
– trudności w ustalaniu łańcucha zależności pomiędzy danymi a poszukiwaną,
– trudności w dokonywaniu analizy i syntezy zadania,
– niewłaściwy dobór danych,
– niezrozumienie działań,
– nieumiejętność ułożenia formuły matematycznej,
– ujmowanie bez względu na miana,
- trudności występujące w rozwiązywaniu zadania:
– trudności w ustalaniu kolejności działań i wprowadzaniu nawiasów,
– słaba sprawność i nieumiejętność wykonywania operacji rachunkowych,
- trudności występujące w sformułowaniu odpowiedzi:
– trudności w dokonywaniu analizy i syntezy zadania,
– trudności w sformułowaniu odpowiedzi,
- trudności występujące w sprawdzeniu poprawności rozwiązania:
– brak zrozumienia związków między działaniami,
– nieumiejętność uzasadnienia rozwiązania."[457]

Wszystkie wymienione trudności mogą stać się barierą uniemożliwiającą uczniom rozwiązanie danego zadania lub problemu. Zaproponowana przez G. Polya metoda zadawania pytań pomocniczych może niewątpliwie ułatwić uczniom nie tylko samo zrozumienie treści oraz warunków zadania. Może także ułatwić im cały proces wiodący poprzez poszczególne etapy rozwiązywania zadań w taki sposób, by finalnie otrzymali oni prawidłowe rozwiązanie.

Metoda G. Polya jest metodą bardzo ogólną, jednak w jej ramach można stosować różnego rodzaju modyfikacje oraz ulepszenia. W nauczaniu początkowym matematyki zasadnym jest zastosowanie w jej ramach wybranych heurystycznych strategii rozwiązywania zadań, takich jak wykonywanie rysunków pomocniczych, stosowanie graficznych schematów, czy tworzenie tabel zawierających dane. Strategie te ułatwiają uczniom zrozumienie treści zadania oraz uporządkowanie zawartych w zadaniu

[457] W. Szewczuk: *Trudności myślenia i rozwijania…,* s. 21-22.

informacji poprzez odwołanie się do graficznych sposobów reprezentacji. M. Wojnowska sugeruje, iż do rozwiązania konkretnego zadania można używać dowolnie wybranej strategii, która odpowiednia jest dla uczniów danej grupy. Można także korzystać z kilku strategii jednocześnie, bądź też wymyślać swoje własne.[458]

Metoda G. Polya jest niewątpliwie ciekawą i wartościową propozycją. Zaproponowane przez węgierskiego matematyka kolejne etapy pracy nad rozwiązywaniem matematycznych zadań czynią ten proces łatwiejszym i bardziej zrozumiałym. Jej ogólny charakter sprawia, iż metoda ma charakter uniwersalny i jest podatna na modyfikacje. Dzięki temu heurystyczna metoda G. Polya użyteczna być może do rozwiązywania problemów o różnym stopniu trudności i skomplikowania. Stosowanie metody G. Polya polega w dużej mierze na przyjęciu zaproponowanej przez węgierskiego matematyka filozofii myślenia o matematyce, jej nauczaniu i uczeniu się. Korzystanie z kolejnych reguł postępowania, użytecznych podczas rozwiązywania zadań wiąże się bezpośrednio z uznaniem słuszności naturalnego, odwołującego się do intuicji, zdroworozsądkowego charakteru metody. Filozofia G. Polya urzeka swą przystępnością i naturalnością. Dzięki nim stosowanie jej w praktyce może odbywać się nie tylko z korzyścią ale i z przyjemnością towarzyszącą procesowi rozwiązywania zadań i problemów.

Zaprezentowana powyżej metoda stała się przyczynkiem do podjęcia przez autorkę niniejszej rozprawy własnych dociekań naukowych. Chciała ona zweryfikować skuteczność zastosowania metody w praktyce pedagogicznej. G. Polya w swoich dziełach, w których klaruje poszczególne elementy swojej metody posługuje się wieloma przykładami praktycznymi. [459] Są to jednak przykłady dotyczące uczniów starszych oraz studentów uniwersyteckich kursów matematyki. W podjętych przez autorkę badaniach metoda G. Polya została zastosowana w pracy z uczniami w młodszym wieku szkolnym. W polskiej literaturze przedmiotu trudno odnaleźć empiryczne egzemplifikacje badań, które weryfikowałyby skuteczność metody w odniesieniu do młodszych uczniów. Można natomiast odnaleźć, również jednak nieliczne, przykłady na praktyczne wykorzystanie założeń metody G. Polya w praktyce nauczycielskiej. Przykładem praktycznego zastosowania może być artykuł A. Cygan, która opisuje w nim swoje

---

[458] M. Wojnowska: *Między przekazem a odkryciem…*, s. 42.
[459] G. Polya: *Odkrycie matematyczne…* G. Polya: *Jak to rozwiązać…*

pomysły na wykorzystanie metody w pracy z uczniami.[460] Ten stan rzeczy uznany powinien być za niewystarczający. Zauważalny niedostatek badań empirycznych z tego zakresu był jednym z czynników, które wpłynęły na obranie tej właśnie tematyki pracy.

Przykłady, którymi G. Polya licznie ilustruje kolejne etapy rozwiązywania zadań, dotyczą zarówno zdań arytmetycznych, jak i zadań z zakresu geometrii. Autorka niniejszej rozprawy podjęła się próby ustalenia tego, czy na etapie nauczania wczesnoszkolnego metoda G. Polya będzie równie skuteczna w przypadku stosowania jej do rozwiązywania zadań arytmetycznych, jak i geometrycznych. Ponadto zadania, które wykorzystywane były w toku badań były zadaniami problemowymi.

Celem przeprowadzonych przez autorkę niniejszej rozprawy badań empirycznych było ustalenie wpływu zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Wybór metody G. Polya nie był przypadkowy. Sposób ujmowania przez autorkę tejże pracy procesu nauczania – uczenia się matematyki jest bardzo bliski sposobowi, jaki daje się odczytać z prac węgierskiego matematyka. Naturalny i zdroworozsądkowy charakter metody stał się inspiracją do przeniesienia najważniejszych jej założeń na grunt praktyki edukacyjnej. Podczas eksperymentalnych zajęć uczniowie mieli możliwość samodzielnego wykonywania wszystkich zaproponowanych przez Węgra etapów rozwiązywania zadań. Ponadto w czasie ich trwania stosowano także dyrektywy oraz reguły postępowania zaproponowane przez G. Polya.

Autorka niniejszej rozprawy podjęła się ponadto próby poznania opinii nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej na temat metody G. Polya. Jej celem było ustalenie, czy jest ona metodą popularną i powszechnie stosowaną w polskich szkołach na etapie nauczania początkowego. Dodatkowo podjęto się próby poznania opinii badanych nauczycieli na temat matematycznych zadań problemowych i metod ich rozwiązywania.

W kolejnym rozdziale niniejszej dysertacji opisane zostały założenia metodologiczne badań własnych.

---

[460] A. Cygan: *Metoda Georga Polya czyli jak zachęcić uczniów do rozwiązywania zadań*. „*Nauczanie początkowe: kształcenie zintegrowane*" 2012/2013, nr 1.

5. Założenia metodologiczne badań własnych

„Jeśli potrzeby jest wam trójsłowny opis metody naukowej,
to pozwólcie, iż zaproponuję:
ODGADYWAĆ I SPRAWDZAĆ.”[461]
/George Polya/

W opracowaniach o charakterze empirycznym, a taki właśnie charakter ma niniejsza rozprawa wyróżnia się najczęściej dwie części – teoretyczną, zawierającą krytyczną analizę teorii, którą stanowiły cztery zamieszczone wyżej rozdziały oraz część empiryczną. Na część empiryczną składają się dwa możliwe do rozróżnienia elementy – opis metodologii realizowanych badań, a także analiza oraz interpretacja ich wyników wraz z odpowiednimi statystykami. Niniejszy rozdział dotyczy pierwszego wymienionego elementu.

Badania, jak pisze Earl R. Babbie, są naturalną działalnością człowieka.[462] Człowiek odkrywa rzeczywistość i stopniowo ją poznaje dzięki nauce. Jest to możliwe dzięki osobistym doświadczeniom uzyskiwanym za pomocą działalności badawczej.[463] Ludzka aktywność, która ma na celu poszukiwanie i poznawanie odkrywanych zjawisk jest rozumiana jako badanie empiryczne.[464] Metodologia może być rozpatrywana jako:

- metodologia teoretyczna, zajmująca się badaniami naukowymi w ogóle oraz ich filozoficzno-logicznymi podstawami,
- metodologia praktyczna, zajmująca się procesem badawczym oraz czynnościami, jakie wykonują badacze podczas poznawania interesującego ich przedmiotu.[465]

W kolejnym podrozdziale niniejszej rozprawy zaprezentowana została charakterystyka planowanych badań własnych. Sformułowano w nim ponadto cele badań.

---

[461] G. Polya*: Odkrycie matematyczne…*, s. 347.
[462] E. Babbie: *Badania społeczne w praktyce*. Przeł. W. Betkiewicz. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004, s. 20.
[463] Ibidem, s. 21
[464] S. Juszczyk: *Badania ilościowe w naukach społecznych*. Katowice: Śląska Wyższa Szkoła Zarządzania, 2005, s. 25.
[465] K. Rubacha: *Metodologia badań nad edukacją*. Warszawa: Wydawnictwa Akademickie i Profesjonalne, 2008, s. 9.

5.1. Charakterystyka planowanych badań i ich cele

Badania własne realizowane na potrzeby niniejszej dysertacji są badaniami ilościowymi. Są badaniami weryfikacyjnymi typu indukcyjnego, realizowanymi w celu określenia z jakim skutkiem zastosowana celowo metoda pracy wpłynie na umiejętności badanej grupy uczniów.

Badania własne objęły aktywnych zawodowo nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej oraz uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Zróżnicowanie badanych środowisk wymagało rozdzielenia planowanych badań na dwa odrębne obszary badawcze. Zostały one poddane wpływom odrębnych czynników, zróżnicowanych pod względem metodologicznym.

Pierwszą grupę objętą badaniami stanowili czynni zawodowo nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej, pracujący w szkołach podstawowych znajdujących się na terenach miejskich i wiejskich województwa śląskiego. Celem przeprowadzonych badań ilościowych było poznanie opinii badanych nauczycieli na temat zadań problemowych i sposobów ich rozwiązywania oraz poznanie ich opinii na temat heurystycznej metody G. Polya. Przeprowadzone w tej grupie badania były badaniami empirycznymi, diagnostyczno – weryfikacyjnymi o charakterze ilościowym.

Celem badań diagnostycznych jest określenie obecnego stanu interesujących badacza zjawisk. Zdaniem Waldemara Dutkiewicza stwierdzają one pewne fakty oraz ustalają cechy i zasady ich funkcjonowania.[466] Zadaniem badań weryfikacyjnych jest ustalenie zależności między zmiennymi niezależnymi i zależnymi, a ich punkt wyjścia stanową znane bliżej skutki bez znajomości ich przyczyn lub też znane dokładnie przyczyny bez znajomości ich skutków.[467]

Drugą grupą objętą badaniami byli uczniowie czterech klas trzecich uczęszczający do szkoły podstawowej mieszczącej się w Będzinie. Celem zrealizowanych badań było sprawdzenie, czy zastosowanie metody G. Polya podczas zajęć matematycznych wpłynie na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich. Badania empiryczne przeprowadzone w grupie uczniów miały charakter ilościowy.

Wybrana procedura badawcza i jej przeprowadzenie, a następnie opisanie i weryfikacja otrzymanych rezultatów podporządkowana jest celom, które zakłada badacz

---

[466] W. Dutkiewicz: *Podstawy metodologii badań*. Kielce: Wydawnictwo Stachurski, 2001, s. 17.
[467] Ibidem, s. 18.

przed wszczęciem procedury badawczej. Celem praktycznym badań jest dostarczenie jednostkom i społeczeństwu naukowo uzasadnionej wiedzy niezbędnej do podejmowania działań praktycznych w różnych dziedzinach życia społeczno-gospodarczego.[468] Celem praktycznym niniejszej rozprawy jest sformułowanie postulatów niezbędnych dla praktyki pedagogicznej oraz popularyzowanie wśród nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej heurystycznej metody G. Polya.

5.2. Problemy badawcze i hipotezy

Problem badawczy jest pytaniem, który w miarę precyzyjnie określa cel planowanych badań empirycznych. Jednocześnie problem ten powinien ujawniać braki w dotychczasowej wiedzy na interesujący badacza temat. [469] Prawidłowe sformułowanie problemu badawczego, który powinien być „intelektualnym bodźcem wszczynającym procedurę badań naukowych" [470] jest początkowym elementem postępowania badawczego.

Z uwagi na to, iż badania przeprowadzone zostały w dwóch odrębnych grupach badawczych, problematyka badawcza została rozdzielona na dwie części. Skonstruowane zostały dwa zespoły pytań badawczych, w ramach których wyróżniono odrębne pytania szczegółowe oraz związane z nimi zmienne.

W niniejszej części pracy zaprezentowana zostanie problematyka badań własnych w podziale na badania prowadzone metodą sondażu diagnostycznego oraz metodą eksperymentu pedagogicznego.

5.2.1. Problemy badawcze w badaniach metodą sondażu diagnostycznego

W odniesieniu do badań sondażowych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej przyjęto dwa główne problemy badawcze. Pierwszym głównym problemem badawczym w badaniach sondażowych nauczycieli jest pytanie:

---

[468] S. Juszczyk: *Badania jakościowe w naukach społecznych. Szkice metodologiczne*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, 2013, s. 13-14.
[469] M. Łobocki: *Metody i techniki badań pedagogicznych*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2000, s. 21.
[470] S. Juszczyk: *Badania ilościowe w naukach…,* s. 48.

Jakie opinie na temat matematycznych zadań problemowych i metod ich rozwiązywania posiadają badani nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej?

W ramach pierwszego problemu badawczego wyróżnione zostały następujące pytania szczegółowe:

- Jakie określenia opisują matematyczne zadania problemowe zdaniem badanych nauczycieli?
- Jak często badani nauczyciele stosują matematyczne zadania problemowe podczas zajęć matematycznych?
- Którym uczniom badani nauczyciele proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych?
- Jakie są, zdaniem badanych nauczycieli, pozytywne skutki rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych?
- Jakie są, zdaniem badanych nauczycieli, negatywne skutki rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych?
- Jakie metody rozwiązywania matematycznych zadań problemowych znają badani nauczyciele?
- Jakie metody rozwiązywania matematycznych zadań problemowych stosują badani nauczyciele?

Drugi główny problemem badawczy w badaniach sondażowych nauczycieli przybrał brzmienie:

Jakie opinie na temat wykorzystania heurystycznej metody G. Polya posiadają badani nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej?

W ramach drugiego głównego problemu badawczego wyróżnione zostały następujące pytania szczegółowe:

- Czy badani nauczyciele znają metodę G. Polya?
- Czy badani nauczyciele stosują metodę G. Polya podczas zajęć matematycznych z uczniami?
- Jakie umiejętności można zdaniem badanych nauczycieli rozwijać z wykorzystaniem metody G. Polya?
- Jakie są, zdaniem badanych nauczycieli, pozytywne skutki stosowania podczas zajęć matematycznych metody G. Polya?

– Jakie są, zdaniem badanych nauczycieli, negatywne skutki stosowania podczas zajęć matematycznych metody G. Polya?

Odpowiedzi na postawione wyżej pytania badawcze dostarczyła analiza wyników sondażu diagnostycznego przeprowadzonego techniką ankiety wśród nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej.

Końcowym wynikiem przeprowadzonego badania empirycznego jest rozstrzygnięcie hipotetycznych założeń pracy.[471] W badaniach sondażowych nauczycieli nie stawiano hipotez, gdyż diagnostyczny charakter badań nie implikował takiej konieczności.[472] Hipotezy badawcze sformułowane zostały dla badań eksperymentalnych.

5.2.2. Problemy badawcze i hipotezy w badaniach metodą eksperymentu pedagogicznego

Główny problem badawczy w badaniach przeprowadzonych metodą naturalnego eksperymentu pedagogicznego wśród uczniów klas trzecich szkoły podstawowej przybrał następujące brzmienie:
Z jakim skutkiem zastosowanie heurystycznej metody G. Polya wpłynie na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej?

W ramach głównego problemu badawczego w badaniach eksperymentalnych wyróżniono następujące pytania szczegółowe:

– W jaki sposób zastosowanie metody G. Polya wpłynie na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych u badanych uczniów?
– W jaki sposób zastosowanie metody G. Polya wpłynie na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych u badanych uczniów?
– Czy istnieje zależność pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych u badanych uczniów a ich płcią?

Odpowiedzi na powyższe pytania badawcze dostarczyła analiza statystyczna danych uzyskanych w toku przeprowadzonego eksperymentu pedagogicznego.

[471] S. Nowak: *Metodologia badań społecznych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2007, s. 36.
[472] S. Juszczyk: *Statystyka dla pedagogów*. Toruń: Wydawnictwo Adam Marszałek, 2001, s. 39.

W badaniach przeprowadzonych metodą eksperymentu pedagogicznego weryfikacji poddana została główna hipoteza badawcza, w brzmieniu:
Umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej, biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem metody G. Polya jest wyższa od umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów kształconych innymi metodami.
W ramach głównej hipotezy badawczej sformułowano następujące hipotezy szczegółowe:

1. Umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej, biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem metody G. Polya jest wyższa od umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów kształconych innymi metodami.
2. Umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej, biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem metody G. Polya jest wyższa od umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów kształconych innymi metodami.
3. Nie ma zależności pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych u badanych uczniów a ich płcią.

5.3. Operacjonalizacja zmiennych

Zmienna stanowi zbiór stanów, w których dany obiekt może być. [473] Stany te są rozłączne, a ich zbiór pozwala scharakteryzować każdy obiekt należący do rozpatrywanego zbioru obiektów. Inaczej mówiąc, zmienna stanowi pewną kategorię zjawisk, których wielkość i częstotliwość występowania może ulegać zmianom w zależności od okoliczności. Zmienna to właściwość empiryczna mająca dwie lub więcej wartości.[474] Ustalenie zmiennych stanowi niezwykle istotny element każdych planowanych badań. Od zmiennych bowiem zależeć będzie to, pod jakim względem badacz będzie analizował interesujące go zjawisko lub proces. Równie istotnym elementem procedury badawczej jest określenie wskaźników zmiennych. Wskaźnik jest to „cecha, zdarzenie lub zjawisko na podstawie zajścia którego wnioskujemy

[473] K. Konarzewski: *Jak uprawiać badania oświatowe*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2000, s. 38-40.
[474] S. Juszczyk: *Statystyka dla pedagogów…*, s. 26

z pewnością, bądź z określonym prawdopodobieństwem (…), iż zachodzi zjawisko, które nas interesuje”.[475]

W tym miejscu pracy wyszczególniono zmienne wraz z ich wskaźnikami, które sformułowane zostały w odniesieniu do badań przeprowadzonych metodą sondażu diagnostycznego oraz metodą eksperymentu pedagogicznego.

5.3.1. Zmienne i ich wskaźniki w badaniach metodą sondażu diagnostycznego

Najczęściej formułowanymi zmiennymi w badaniach sondażowych są zmienne niezależne i zmienne zależne.

Zmiennymi zależnymi dla pierwszego głównego problemu badawczego w badaniach metodą sondażu diagnostycznego są:

1. Opinie badanych nauczycieli na temat matematycznych zadań problemowych (wskaźniki zmiennej: pozytywne, negatywne, obojętne).
2. Opinie badanych nauczycieli na temat metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych (wskaźniki zmiennej: pozytywne, negatywne, obojętne).

Zmiennymi niezależnymi dla obu głównych problemów badawczych w badaniach metodą sondażu diagnostycznego są:

- lokalizacja miejsca pracy badanych nauczycieli (wskaźniki zmiennej – teren pracy – miasto/wieś),
- poziom wykształcenia badanych nauczycieli (wskaźniki zmiennej – wykształcenie magisterskie/licencjackie),
- staż pracy w szkole badanych nauczycieli (wskaźniki zmiennej – od 0 do 5 lat, od 6 do 10 lat, od 11do 15 lat, powyżej 15 lat).

Zmienne niezależne szczegółowe dla pierwszego głównego problemu badawczego w badaniach sondażowych zostały zamieszczone w tabeli 2.

[475] T. Pilch, T. Bauman: *Zasady badań pedagogicznych. Strategie ilościowe i jakościowe*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak”, 2010, s. 53.

Tabela 2. Zmienne niezależne szczegółowe i ich wskaźniki dla pierwszego głównego problemu badawczego w badaniach sondażowych

Zmienna niezależna szczegółowa	Wskaźniki zmiennej
Określenia opisujące matematyczne zadania problemowe	– każde zadanie matematyczne jest zadaniem problemowym – to zadania niewymagające wysiłku umysłowego – to zadania wymagające od uczniów wzmożonego wysiłku umysłowego – to zadania zbyt trudne, by stosować je na etapie edukacji wczesnoszkolnej – to zadania, które powinny być stosowane powszechnie na etapie wczesnoszkolnym – to zadania odtwórcze – to zadania twórcze – to zadania rozwijające myślenie matematyczne – to zadania rozwijające krytyczną postawę do rzeczywistości – to zadania, które nie mają większych walorów poznawczych – to zadania, w przypadku których uczeń nie zna algorytmu ich rozwiązania
Częstotliwość stosowania matematycznych zadań problemowych	– co najmniej raz w tygodniu – kilka razy w miesiącu – kilka razy w semestrze – 1 – 2 razy w roku szkolnym – nie stosuję
Cechy uczniów, którym nauczyciele proponują rozwiązywanie zadań problemowych	– wszyscy uczniowie w klasie – uczniowie uzdolnieni matematycznie – uczniowie przeciętni – uczniowie wykazując trudności w uczeniu

	się matematyki
Pozytywne skutki rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych	– rozwijają myślenie – powodują wzrost zaangażowania uczniów – poprawiają wyniki pracy uczniów – mobilizują do twórczości na zajęciach – mobilizują uczniów do pracy – wprowadzają radosną atmosferę na zajęciach – nie przynoszą pozytywnych skutków
Negatywne skutki rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych	– ograniczają myślenie – wprowadzają stresującą atmosferę na zajęciach – powodują zniechęcenie do rozwiązywania zadań – szybko się nudzą – powodują dezorganizację pracy na lekcji – angażują do pracy tylko wybraną część klasy – nie przynoszą negatywnych skutków
Metody rozwiązywania matematycznych zadań problemowych znane przez badanych nauczycieli	– burza mózgów – dialog sokratejski – metoda Kartezjusza – drama – metaplan – metoda G. Polya – inscenizacja – metoda kruszenia – gry dydaktyczne – metoda sześciu kapeluszy myślowych – klasyczna metoda problemowa
Metody rozwiązywania	– burza mózgów

matematycznych zadań problemowych stosowane przez badanych nauczycieli	– dialog sokratejski – metoda Kartezjusza – drama – metaplan – metoda G. Polya – inscenizacja – metoda kruszenia – gry dydaktyczne – metoda sześciu kapeluszy myślowych – klasyczna metoda problemowa

Źródło: Opracowanie własne.

Zmienną zależną dla drugiego głównego problemu badawczego w badaniach metodą sondażu diagnostycznego są opinie badanych nauczycieli na temat heurystycznej metody G. Polya (wskaźniki zmiennej: pozytywne, negatywne, obojętne).

Zmienne niezależne szczegółowe dla drugiego głównego problemu badawczego w badaniach sondażowych zostały zamieszczone w tabeli 3.

Tabela 3. Zmienne niezależne szczegółowe i ich wskaźniki dla drugiego głównego problemu badawczego w badaniach sondażowych

Zmienna niezależna szczegółowa	Wskaźniki zmiennej
Znajomość metody G. Polya	– nauczyciel zna metodę G. Polya – nauczyciel nie zna metody G. Polya
Stosowanie metody G. Polya	– nauczyciel stosuje metodę G. Polya – nauczyciel nie stosuje metody G. Polya

Umiejętności rozwijane z wykorzystaniem metody G. Polya	– umiejętność samodzielnego myślenia – umiejętność krytycznego myślenia – umiejętność twórczego myślenia – umiejętność pracy w grupach – umiejętność samodzielnego wyboru sposobu rozwiązania problemu – umiejętność przyjęcia porażki – wytrwałość w dążeniu do wyznaczonego celu
Pozytywne skutki stosowania metody G. Polya	– powoduje rozwój myślenia – przyczynia się do wzrostu samodzielności uczniów podczas rozwiązywania zadań – kształtuje twórcze podejście do zadań matematycznych – kształtuje umiejętność samodzielnego radzenia sobie z problemem – motywuje do pracy – powoduje wzrost wiary we własne siły uczniów – powoduje wzrost zaangażowania uczniów – możliwość obserwowania samodzielnej pracy uczniów – możliwość poznania struktury grupy – możliwość poznania preferowanych przez uczniów metod rozwiązywania zadań – możliwość poznania preferowanych przez uczniów form pracy (samodzielnie, w parach, w grupach) – możliwość dostrzeżenia uczniów wykazujących trudności w rozwiązywaniu zadań – możliwość dostrzeżenia uczniów uzdolnionych matematycznie – możliwość oceny zaangażowania uczniów w rozwiązanie zadania

Negatywne skutki stosowania metody G. Polya	– ogranicza samodzielność uczniów przy rozwiązywaniu zadań matematycznych – ogranicza myślenie uczniów – zniechęca uczniów do rozwiązywania zadań matematycznych – powoduje spadek motywacji uczniów – powoduje spadek zaangażowania uczniów – brak całkowitej kontroli nad czasem pracy uczniów – brak całkowitej kontroli nad sposobem pracy uczniów – nieprzewidywalność zajęć – chaos organizacyjny – głośna praca uczniów – nie można z góry założyć efektów końcowych – nie ma gwarancji osiągnięcia poprawnego wyniku

Źródło: Opracowanie własne.

5.3.2. Zmienne i ich wskaźniki w badaniach metodą eksperymentu pedagogicznego

Zmienną niezależną główną w badaniach przeprowadzonych metodą eksperymentu pedagogicznego jest heurystyczna metoda G. Polya, natomiast zmienną zależną główną jest umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich.

Zmienne zależne szczegółowe wraz z ich wskaźnikami w badaniach eksperymentalnych zostały zamieszczone w tabeli 4.

Tabela 4. Zmienne zależne szczegółowe i ich wskaźniki dla głównego problemu badawczego w badaniach eksperymentalnych

Zmienna zależna szczegółowa	Wskaźniki zmiennej
Umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich	wynik posttestu z części arytmetycznej
Umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas trzecich	wynik posttestu z części geometrycznej

Źródło: Opracowanie własne.

Zmienne niezależna szczegółowa i jej wskaźniki w badaniach eksperymentalnych została zamieszczona w tabeli 5.

Tabela 5. Zmienna niezależna szczegółowa i jej wskaźnik dla głównego problemu badawczego w badaniach eksperymentalnych

Zmienna niezależna szczegółowa	Wskaźniki zmiennej
Płeć ucznia	Cecha fizyczna: – dziewczynka – chłopiec

Źródło: Opracowanie własne.

W kolejnym podrozdziale zaprezentowane zostały metody oraz techniki badawcze, a także narzędzia badawcze, za pomocą których przeprowadzono planowane badania empiryczne.

5.4. Metody, techniki i narzędzia badawcze

Metoda badawcza w naukach o wychowaniu to sposób, za pomocą którego badacz dochodzi do wiedzy poprzez rzeczywistość wychowawczą. Obejmuje ona system zasad, który powinien gwarantować intersubiektywnie sprawdzalny dostęp do społecznej rzeczywistości. [476] Na potrzeby niniejszego opracowania przyjęto podział metod badawczych ze względu na dwie płaszczyzny nauk: empiryczną (metody badania

[476] H.H. Kruger: *Wprowadzenie w teorie i metody badawcze nauk o wychowaniu*. Przeł. D. Sztobryn. Gdańsk: Gdańskie Towarzystwo Psychologiczne, 2005, s. 140.

empirycznego) i teoretyczną (metody badania teoretycznego).[477] Posłużono się podziałem metod i technik badawczych zaproponowanym przez T. Pilcha. Badania empiryczne zrealizowane zostały przy pomocy dwóch metod, którymi były sondaż diagnostyczny oraz naturalny eksperyment pedagogiczny.

W niniejszej części pracy zaprezentowane zostaną techniki oraz narzędzia badawcze wykorzystane podczas prowadzenia badań metodą sondażu diagnostycznego oraz metodą eksperymentu pedagogicznego.

5.4.1. Techniki i narzędzia badawcze wykorzystane w badaniach metodą sondażu diagnostycznego

Główną metodą badawczą wykorzystaną w badaniach nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej była metoda sondażu diagnostycznego. Zgodnie z definicją, „badania sondażowe obejmują wszelkiego typu zjawiska społeczne o znaczeniu istotnym dla wychowania, ponadto stany świadomości społecznej, opinii i poglądów określonych zbiorowości, narastania badanych zjawisk, ich tendencji i nasilenia (…) mają na celu wykrycie ich istnienia oraz ukazanie wszystkich atrybutów strukturalnych i funkcjonalnych”. [478] W ramach badań sondażowych najczęściej wykorzystuje się techniki takie jak wywiad, ankieta, analiza dokumentów oraz techniki statystyczne.

W opisywanych badaniach, w ramach metody sondażu diagnostycznego wykorzystano technikę ankiety. Ankieta jest techniką gromadzenia informacji, która polega na wypełnianiu przez badanego specjalnych kwestionariuszy w obecności lub też bez obecności ankietera. [479] Ankieta została przeprowadzona w oparciu o kwestionariusz ankiety skierowany do nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej, będący aneksem 1 do niniejszej rozprawy. Samodzielnie przygotowany na potrzeby prowadzonych badań kwestionariusz ankiety składał się ze wstępu, 17 pytań ankietowych oraz z metryczki respondenta. Pierwsze osiem pytań kwestionariusza dotyczyło znajomości oraz stosowania przez badanych nauczycieli metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych. Pozostałe dziewięć pytań dotyczyło znajomości i stosowania przez respondentów heurystycznej metody G. Polya. Kwestionariusz

[477] S. Juszczyk: *Statystyka dla pedagogów…,* s. 44.
[478] T. Pilch, T. Bauman: *Zasady badań pedagogicznych…*, s. 79-89.
[479] Ibidem, s. 86.

zawierał pytania jednokrotnego oraz wielokrotnego wyboru. Kwestionariusze ankiet zostały dostarczone badanym nauczycielom zarówno w sposób bezpośredni, jak i poprzez przesyłkę pocztową.

Weryfikacja danych otrzymanych w toku badań zrealizowanych metodą sondażu diagnostycznego dokonana została za pomocą wnioskowania statystycznego. Statystyka jest stworzonym przez człowieka narzędziem naukowym, posługującym się określonymi formami wnioskowania, którego celem jest uproszczenie zagmatwanego obrazu obiektywnej rzeczywistości, tak, by móc poznać ją głębiej.[480] Istotnym zagadnieniem jest dobór odpowiedniego testu statystycznego, który spełniać będzie wymogi podjętych analiz. Przy doborze testu statystycznego badacz powinien pamiętać, iż powinien on być dostosowany do poziomu pomiaru, do wielkości próby, charakteru i ilości prób oraz kształtu rozkładu.[481]

Wnioskowania statystyczne, dotyczące opracowania wyników w badaniach sondażowych przeprowadzone zostały z wykorzystaniem testu rho-Spearmana (1), testu Kruskala-Wallisa (2) oraz testu niezależności chi-kwadrat (3).

Korelacja rangowa Spearmana jest stosowana w celu badania zgodności dwóch grup, podczas gdy zmienne wyrażone są w skalach rangowych, a liczba obserwacji nie jest duża.[482]

Wzór na korelację rangową Spearmana przybiera postać:

$$r_S = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} \qquad (1)$$

gdzie:

d_i– różnice między rangami pierwszej i drugiej cechy,

n – liczebność zbioru.[483]

Na potrzeby niniejszych badań analiza korelacja rho-Spearmana wykorzystana została w odniesieniu do stażu pracy badanych nauczycieli.

Test Kruskala-Wallisa jest stosowany w celu sprawdzania hipotezy – na podstawie niezależnych prób wykazuje się, że rozkłady cech są w kilku populacjach jednakowe.

---

[480] G. Clauss, H. Ebner: *Podstawy statystyki dla psychologów, pedagogów i socjologów*. Przeł. J. Olesiak. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1972, s. 18.

[481] J. Brzeziński: *Metody badań psychologicznych w zarysie*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, 1975, s. 112-113.

[482] S. Juszczyk: *Badania ilościowe w naukach…,* s. 213.

[483] S. Juszczyk: *Statystyka dla pedagogów*…, s. 172.

Poszczególne populacje mogą być wyodrębnione na podstawie jakościowych kategorii zmiennej niezależnej, natomiast porównywane są rozkłady rang dla zmiennej zależnej, mierzonej na skali porządkowej.[484]

Hipotezy testu Kruskala-Wallisa przyjmują postać:

H_0: dystrybuanty rozkładów w porównywanych *m* grupach są jednakowe ($F1=F2=\ldots=Fm$).

H_1: istnieją co najmniej dwie grupy, dla których dystrybuanty są różne.

Wzór na test Kruskala-Wallisa przyjmuje postać:

$$T = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1) \qquad (2)$$

gdzie:

n – łączna liczba obserwacji w próbach,

n_i – liczba obserwacji w próbie pochodzącej z *i*-tej populacji,

R_i– suma rang przyporządkowanych obserwacjom pochodzącym z *i*-tej populacji.[485]

Test Kruskala-Wallisa w niniejszym opracowaniu zastosowany został w odniesieniu do stażu pracy badanych nauczycieli.

Test niezależności chi-kwadrat jest stosowany w przypadku sprawdzania niezależności dwóch cech zmiennych dychotomicznych, zazwyczaj nominalnych, a także dla dwóch zmiennych wielodzielnych, przy czym zmienne te są najczęściej zmiennymi jakościowymi.[486]

Wzór na test niezależności cech przybiera następującą postać:

$$X^2 = \frac{(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \cdot N \qquad (3)$$

gdzie:

a, b, c, d – liczebności wariantów obu cech uzyskane w badaniach,

N – liczebność próby.[487]

Test niezależności chi-kwadrat wykorzystany został w odniesieniu do lokalizacji miejsca pracy badanych nauczycieli oraz do poziomu ich wykształcenia.

---

[484] J. Jóźwiak, J. Podgórski: *Statystyka od podstaw*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, 2009, s. 323.

[485] Ibidem, s. 324-325.

[486] S. Juszczyk: *Badania ilościowe w naukach…,* s. 244.

[487] S. Juszczyk: *Statystyka dla pedagogów*…, s. 216.

Analiza statystyczna wykonana została przy użyciu programu SPSSW oraz pakietu Excel 2010. Wszystkie testy wykonano na poziomie istotności α = 0,05. Obliczenia przeprowadzane były z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Badanie metodą sondażu diagnostycznego przeprowadzono wśród aktywnych zawodowo nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej pracujących w szkołach podstawowych mieszczących się na terenach miejskich i wiejskich województwa śląskiego. Operat losowania szkół opisano na stronach 167-168 niniejszej pracy.

5.4.2. Techniki i narzędzia badawcze wykorzystane w badaniach metodą eksperymentu pedagogicznego

Główną metodą badawczą w badaniach określających skutek zastosowania heurystycznej metody G. Polya był naturalny, terenowy eksperyment pedagogiczny.

Metoda eksperymentalna uznawana jest za jedną z najistotniejszych metod wykorzystywanych w badaniach pedagogicznych. Zgodnie z definicją jest to metoda „badania określonego wycinka rzeczywistości (wychowawczej), polegająca na wywoływaniu lub tylko zmienianiu przebiegu procesów przez wprowadzanie do nich jakiegoś nowego czynnika i obserwowaniu zmian powstałych pod jego wpływem”.[488]

Za badanie eksperymentalne uważa się takie badanie, które umożliwia manipulację zmienną niezależną główną, kontrolowanie pozostałych zmiennych niezależnych oraz pomiar zmienności zmiennej zależnej spowodowanej zamierzonym przez badacza oddziaływaniem na nią zmiennej niezależnej głównej[489]. O eksperymencie w terenie myślimy w sytuacji, kiedy badacz w pewnym stopniu kontroluje czynniki, które będą zmieniane (zmienne niezależne), a które jego zdaniem wpłyną w jakiś sposób na badane zjawisko (zmienną zależną) oraz kiedy odbywa się on w środowisku, w którym zwykle przebywają badane osoby. [490] Jak zauważa Piotr Sobczak, metoda eksperymentalna nie jest chętnie stosowana przez pedagogów. [491] Może to być

[488] T. Pilch, T. Bauman: *Zasady badań pedagogicznych…*, s. 73.
[489] J. Brzeziński: *Badania eksperymentalne w psychologii i pedagogice*. Warszawa: Wydawnictwo Scholar, 2000, s. 52.
[490] P. Sobczak: *Metoda badania eksperymentalnego w pedagogice*. W: *Metody badań pedagogicznych w zarysie*. Red. A. Góralski. Warszawa: Wydawnictwo Universitas Rediviva, 2009, s. 89.
[491] Ibidem, s. 88.

spowodowane trudnością formułowania uogólnionych wniosków oraz dużymi wymaganiami, jakie stawia przed badaczem plan eksperymentalny.

Metoda eksperymentu przebiega wedle ściśle określonego schematu postępowania, nazywanego planem eksperymentalnym. Prawidłowo sformułowany plan eksperymentalny powinien na zadawalającym poziomie spełniać kryteria natury metodologicznej, związane z formalną poprawnością postępowania badawczego, a także kryteria natury psychologicznej związane z psychologicznymi osobliwościami badania eksperymentalnego prowadzonego z udziałem ludzi rozumianych jako „obiekty badane".[492] Kryteriami metodologicznymi są trafność teoretyczna, trafność wewnętrzna, trafność zewnętrzna oraz odpowiedniość modelu statystycznego planowanych badań eksperymentalnych. Do kryteriów psychologicznych zaliczane są realizm życiowy i psychologiczny, a także interakcja badacz – osoba badana.

Schemat eksperymentalny zapewnia badaczowi możliwość bezpośredniej manipulacji co najmniej jedną zmienną niezależną oraz możliwość kontroli nad zmiennymi ubocznymi. Ponadto osoby poddane badaniom oraz poziomy zmiennej eksperymentalnej są rozdzielane w sposób losowy.[493] Wprowadzenie czynnika eksperymentalnego do badanego środowiska ma owocować skutkami, których opisanie jest jednym z nadrzędnych celów badań eksperymentalnych. W niniejszych badaniach metoda eksperymentalna zastosowana została do określenia wpływu wprowadzenia czynnika eksperymentalnego, jakim było wykorzystanie heurystycznej metody G. Polya podczas zajęć matematycznych, na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich.

Opisywane badania opierały się na naturalnym eksperymencie terenowym. Realizacja zaplanowanego eksperymentu przebiegała etapowo, zgodnie z przyjętym na potrzeby badań schematem postępowania. Poszczególne fazy eksperymentu były następujące:

- diagnoza wstępna – pretest, będący punktem wyjścia do późniejszych analiz,
- wprowadzenie czynnika eksperymentalnego – przeprowadzenie zajęć z wykorzystaniem metody G. Polya na zajęciach matematycznych wśród uczniów klas trzecich szkoły podstawowej,

---

[492] J. Brzeziński: *Badania eksperymentalne w…,* s. 17.
[493] J. Brzeziński: *Metody badań psychologicznych…,* s. 20.

- diagnoza końcowa – posttest, umożliwiająca określenie wpływu zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej.

W opisywanych badaniach eksperymentalnych wykorzystano czterogrupowy plan Solomona[494] z dwiema grupami eksperymentalnymi (GE1 i GE2) oraz dwiema grupami kontrolnymi (GK1 i GK2) – z pretestem w dwóch grupach i posttestem w czterech grupach. Zastosowany w niniejszym opracowaniu plan eksperymentalny uznawany jest za najbardziej rzetelny spośród możliwych planów prowadzenia badań pedagogicznych. Jerzy Brzeziński określił go mianem „wzoru doskonałości w naukach społecznych”[495]. Ten sam Autor uważa także, że czterogrupowy plan Solomona pozbawiony jest wad metodologicznych.[496] Schemat przebiegu planu Solomona przedstawia ilustracja 1.

Ilustracja 1. Plan czterogrupowy z dwiema grupami eksperymentalnymi i dwiema grupami kontrolnymi - z pretestem w dwóch grupach i posttestem w czterech grupach (plan Solomona)

$\mathbf{GE1}_{pre}$	$\boldsymbol{X}$	$\mathbf{GE1}_{post}$	Grupa 1 eksperymentalna (z pretestem i posttestem)
$\mathbf{GK1}_{pre}$	$\boldsymbol{\sim X}$	$\mathbf{GK1}_{post}$	Grupa 1 kontrolna (z pretestem i posttestem)
	$\boldsymbol{X}$	$\mathbf{GE2}_{post}$	Grupa 2 eksperymentalna (z posttestem)
	$\boldsymbol{\sim X}$	$\mathbf{GK2}_{post}$	Grupa 2 kontrolna (z posttestem)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: J. Brzeziński: *Metodologia badań psychologicznych*. Warszawa 2007, s. 328.

gdzie:

X **–** występowanie czynnika eksperymentalnego

~*X* **–** brak czynnika eksperymentalnego

–$_{\mathbf{pre}}$ – pomiar początkowy (pretest)

–$_{\mathbf{post}}$ – pomiar końcowy (posttest)

Realizacja planu Solomona ma przebieg etapowy i zakłada wykonanie następujących kroków:

---

494 J. Brzeziński: *Badania eksperymentalne w…,* s. 69-73.
495 J. Brzeziński: *Metody badań psychologicznych…,* s. 38.
496 J. Brzeziński: *Badania eksperymentalne w…,* s. 73.

- Etap 1 – przeprowadzenie diagnozy wstępnej (pretestu) w grupie eksperymentalnej GE1 i grupie kontrolnej GK1
- Etap 2 – wprowadzenie czynnika eksperymentalnego do grup eksperymentalnych GE1 i GE2
- Etap 3 – przeprowadzenie diagnozy końcowej (posttestu) w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz grupach kontrolnych GK1 i GK2.

Pretest, jak i posttest zastosowany w niniejszych badaniach był testem dydaktycznym, opracowanym przez autorkę niniejszej dysertacji. Test dydaktyczny jest zbiorem zadań do wykonania, identycznym dla wszystkich badanych, wprowadzonym intencjonalnie w ściśle kontrolowanych warunkach oraz umożliwiającym za pomocą jednakowych dla wszystkich kryteriów, pomiar ilości i jakości efektów nauczania i uczenia się w ściśle określonym zakresie.[497] Zakres wiedzy i umiejętności potrzebnych do rozwiązania zadań zawartych w preteście i w postteście był zgodny z obowiązującą w czasie trwania eksperymentu Podstawą programową kształcenia ogólnego, a ściślej z jej zapisami odnoszącymi się do edukacji matematycznej realizowanej w ramach nauczania początkowego. Każde zadanie opatrzone zostało zrozumiałą dla ucznia instrukcją.

Każdy z przygotowanych testów zawierał matematyczne zadania problemowe o charakterze otwartym. Zadanie otwarte wymaga od ucznia samodzielnego formułowania i zapisywania odpowiedzi.[498] Część zadań w przygotowanych testach zaczerpnięta została z dostępnej literatury zawierającej gotowe zadania dla uczniów[499], natomiast część z nich była autorstwa własnego. Zarówno pretest, jak i posttest zawierał zadania:

- arytmetyczne – wymagające znajomości pojęcia cyfry i liczby oraz umiejętności radzenia sobie z czterema podstawowymi działaniami arytmetycznymi (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie)
- geometryczne – wymagające znajomości poszczególnych figur geometrycznych i ich podstawowych własności.

[497] W. W. Kubielski: *Podstawy pomiaru, konstruowania i ewaluacji testu dydaktycznego*. Warszawa: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP, 2006, s. 48.
[498] Ibidem, s. 29.
[499] m.in.: D. Klus-Stańska, A. Kalinowska: *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2004 oraz A. Kalinowska: *Matematyczne zadania problemowe w klasach początkowych – między wiedzą osobistą a jej formalizacją*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2010.

Test początkowy – pretest (aneks 2), zawierał 12 matematycznych zadań problemowych dotyczących umiejętności arytmetycznych oraz geometrycznych. Zadania arytmetyczne (zadanie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) wymagały znajomości pojęcia cyfry i liczby oraz umiejętności radzenia sobie z czterema podstawowymi działaniami na liczbach. Zadania geometryczne (zadanie 9, 10, 11, 12) wymagały znajomości poszczególnych figur geometrycznych, znajomości ich własności, a także znajomości procedury obliczania obwodów figur płaskich. Trzy zadania były zadaniami tekstowymi. Rozwiązanie każdego zadania wymagało odpowiedniego poziomu zrozumienia treści zadania oraz wyboru odpowiedniej strategii postępowania, prowadzącej do otrzymania poprawnego wyniku.

Test końcowy – posttest (aneks 3), zawierał 13 matematycznych zadań problemowych dotyczących umiejętności arytmetycznych oraz geometrycznych. Zadania arytmetyczne (zadanie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) wymagały znajomości pojęcia cyfry i liczby oraz umiejętności radzenia sobie z czterema podstawowymi działaniami na liczbach. Zadania geometryczne (zadanie 9, 10, 11, 12, 13) wymagały znajomości poszczególnych figur geometrycznych oraz ich własności, a także znajomości procedury obliczania obwodów figur płaskich. Spośród wszystkich zadań posttestu, pięć stanowiło zadania tekstowe.

Ocena poprawności rozwiązania przez uczniów poszczególnych zadań pretestu i posttestu dokonana została w oparciu o przygotowany przez autorkę pracy schemat punktowania. Schemat punktowania zadania testowego jest wykazem pożądanych właściwości procesu, produktu lub procesu i produktu działania praktycznego ucznia wraz ze skalami ocen tych właściwości.[500] Podczas oceny poprawności większości zadań testu początkowego i końcowego uznano za słuszne stanowisko, iż odpowiedź za każde pytanie może być albo poprawna, albo zła albo częściowo poprawna.[501] Po pierwsze, zadania te składały się z kilku przykładów, wiec zasadnym było umożliwienie uzyskania punktów za poprawne rozwiązanie każdego z nich. Po drugie, rozwiązanie tych zadań polegało na wykonaniu kilku czynności, za wykonanie których możliwe było uzyskanie punktów cząstkowych. Wybrane zadania testowe posiadały ocenę zero-jedynkową (odpowiedź poprawna lub zła). Maksymalna liczba punktów możliwych do otrzymania przez uczniów za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań zarówno w preteście,

[500] B. Niemierko: *Pomiar wyników kształcenia*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1999, s. 83.
[501] W. W. Kubielski: *Podstawy pomiaru, konstruowania*…, s. 121.

jak i w postteście wynosiła 40. Poniżej zamieszczono kryteria oceny punktowej poszczególnych zadań pretestu oraz posttestu.

Kryteria oceny punktowej zadań pretestu:

Zadanie1:

Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 8.

Zadanie 2:

Za prawidłowo zapisane działanie, bez względu na poprawność wyniku końcowego uczeń otrzymuje 1 punkt. Za poprawny wynik końcowy uczeń otrzymuje 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 2.

Zadanie 3:

Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 4.

Zadanie 4:

Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3.

Zadanie 5:

Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 4.

Zadanie 6:

Za prawidłową odpowiedź uczeń dostaje 1 punkt. Za odpowiedź błędną oraz jej brak uczeń otrzymuje 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 1.

Zadanie 7:

Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 4.

Zadanie 8:

Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 4.

Zadanie 9:

Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3.

Zadanie 10:

Za prawidłowe uzupełnienie rysunku uczeń otrzymuje 1 punkt. Za prawidłowo napisaną odpowiedź uczeń otrzymuje 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 2.

Zadanie 11:

Za prawidłową odpowiedź uczeń otrzymuje 1 punkt. Za prawidłowe uzasadnienie swojej odpowiedzi uczeń otrzymuje 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 2.

Zadanie 12:

Za prawidłowo zapisane działanie, bez względu na poprawność wyniku końcowego uczeń otrzymuje 1 punkt. Za poprawny wynik końcowy uczeń otrzymuje 1 punkt. Za prawidłowo napisaną odpowiedź uczeń otrzymuje 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3.

Kryteria oceny punktowej zadań posstestu:

Zadanie 1:

Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 8.

Zadanie 2:

Za prawidłowo zapisane działanie, bez względu na poprawność wyniku końcowego uczeń otrzymuje 1 punkt. Za poprawny wynik końcowy uczeń otrzymuje 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 2.

Zadanie 3:

Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 4.

Zadanie 4:

Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3.

Zadanie 5:

Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 4.

Zadanie 6:

Za prawidłową odpowiedź uczeń dostaje 1 punkt. Za odpowiedź błędną oraz jej brak uczeń otrzymuje 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 1.

Zadanie 7:

Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 4.

Zadanie 8:
Za prawidłowo zapisane działanie, bez względu na poprawność wyniku końcowego uczeń otrzymuje 1 punkt. Za poprawny wynik końcowy uczeń otrzymuje 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 2.
Zadanie 9:
Za każdy prawidłowo rozwiązany przykład uczeń otrzymuje 1 punkt, za odpowiedź nieprawidłową lub jej brak – 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3.
Zadanie 10:
Za prawidłowo wykonany rysunek uczeń otrzymuje 1 punkt. Za prawidłową odpowiedź uczeń otrzymuje 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 2.
Zadanie 11:
Za prawidłową odpowiedź uczeń dostaje 1 punkt. Za odpowiedź błędną oraz jej brak uczeń otrzymuje 0 punktów. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 1.
Zadanie 12:
Za prawidłowo wykonany rysunek uczeń otrzymuje 1 punkt. Za prawidłowo zapisane działanie, bez względu na poprawność wyniku końcowego uczeń otrzymuje 1 punkt. Za poprawny wynik końcowy uczeń otrzymuje 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3.
Zadanie 13:
Za prawidłowo zapisane działanie, bez względu na poprawność wyniku końcowego uczeń otrzymuje 1 punkt. Za poprawny wynik końcowy uczeń otrzymuje 1 punkt. Za prawidłowo napisaną odpowiedź uczeń otrzymuje 1 punkt. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: 3.

Punkty uzyskane przez uczniów w teście początkowym oraz w teście końcowym posłużyły do wykonania analiz statystycznych, mających na celu weryfikację postawionych w badaniach eksperymentalnych hipotez oraz udzielenie odpowiedzi na postawione w pracy pytania badawcze.

Procedura wykonania analiz wyników badań własnych wynikała bezpośrednio z przyjętego na potrzeby niniejszej dysertacji planu eksperymentalnego – czterogrupowego planu Solomona. Analiza wyników badań w planie Solomona odbywa się wedle ściśle określonego schematu. W analizie wyników badań realizowanej według planu Solomona wyróżnia się trzy podstawowe etapy, którymi są:

- Etap I – potwierdzenie hipotezy badawczej
- Etap II – kontrola efektu pretestu

– Etap III – wykazanie, iż w grupie kontrolnej nie wystąpiły celowe zmiany (w przypadku badan eksperymentalnych posiadających takie założenie)

Dla potwierdzenia hipotezy badawczej (etap I) należy przeprowadzić następujące porównania:

$$GE1_{pre} = GK1_{pre}, \quad GE1_{post} > GK1_{post}, \quad GE2_{post} > GK2_{post},$$

$$D_1 > D_2, \text{ gdzie: } GE1_{post} - GE1_{pre}, \quad GK1_{post} - GK1_{pre}$$

D_1 – różnica wyniku posttestu i pretestu w grupie GE1

D_2 – różnica wyniku posttestu i pretestu w grupie GK1

W celu kontroli efektu pretestu (etap II) wymagane jest aby:

$$GE1_{post} = GE2_{post} \quad \text{oraz} \quad GK1_{post} = GK2_{post}$$

W przypadku badań eksperymentalnych, które zakładają, że w grupie kontrolnej nie powinny wystąpić celowe zmiany, dodatkowo badacz powinien wykazać, iż (etap III):

$$GK2_{post} = GE1_{pre} \quad \text{oraz} \quad GK2_{post} = GK1_{pre}.$$ [502]

Zgodnie z powyższym, analiza otrzymanych wyników badań własnych przebiegała według procedury określonej planem Solomona. Każdy z wymienionych etapów wymaga realizacji ściśle określonych procedur, które w niniejszym opracowaniu nazwano krokami postępowania. Poniżej określono kolejne kroki postępowania wykonane dla poszczególnych etapów analizy wyników badań realizowanych według planu Solomona.

Etap I - dla potwierdzenia hipotezy badawczej należy wykonać następujące kroki:

Krok I – porównanie wyników pretestu w grupach GE1 i GK1 – sprawdzenie równoważności badanych grup – wykazanie, iż wynik pretestu w grupie GE1 jest równy wynikowi pretestu w grupie GK1 ($GE1_{pre} = GK1_{pre}$),

Krok II – porównanie wyników posttestu w grupach GE1 i GK1 – wykazanie, iż wynik posttestu w grupie GE1 jest lepszy niż wynik posttestu w grupie GK1 ($GE1_{post} > GK1_{post}$),

[502] opracowano na podstawie: J. Brzeziński: *Metodologia badań psychologicznych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2007, s. 328-329.

Krok III – porównanie wyników posttestu w grupach GE2 i GK2 – wykazanie, iż wynik posttestu w grupie GE2 jest lepszy niż wynik posttestu w grupie GK2 ($GE2_{post} > GK2_{post}$),

Krok IV – wyznaczenie wartości wskaźników D_1 i D_2 postępów uczniów w grupach GE1 i GK1:

– obliczenie różnicy wyniku posttestu i pretestu ($D_1 = GE1_{post} – GE1_{pre}$) w grupie GE1, która jest wskaźnikiem postępu uczniów grupy GE1 po zastosowaniu czynnika eksperymentalnego,

– obliczenie różnicy wyniku posttestu i pretestu ($D_2 = GK1_{post} – GK1_{pre}$) w grupie GK1, która jest wskaźnikiem postępu uczniów grupy GK1 bez zastosowania czynnika eksperymentalnego,

Krok V – porównanie postępów w grupach GE1 i GK1 – porównanie różnicy wyniku posttestu i pretestu w grupie GE1 oraz różnicy wyniku posttestu i pretestu w grupie GK1 – wykazanie, iż postęp uczniów grupy GE1 jest większy niż postęp uczniów grupy GK1 ($D_1 > D_2$),

Etap II - w celu kontroli efektu pretestu należy wykonać następujące kroki:

Krok I – porównanie wyników posttestu w grupie GE1 oraz wyników posttestu w grupie GE2 – wykazanie, iż wynik posttestu w grupie GE1 jest równy wynikowi posttestu w grupie GE2 ($GE1_{post} = GE2_{post}$),

Krok II – porównanie wyników posttestu w grupie GK1 oraz wyników posttestu w grupie GK2 – wykazanie, iż wynik posttestu w grupie GK1 jest równy wynikowi posttestu w grupie GK2 ($GK1_{post} = GK2_{post}$),

Etap III – w celu wykazania, iż w grupie kontrolnej nie wystąpiły celowe zmiany należy wykonać następujące kroki:

Krok I – porównanie wyników posttestu w grupie GK2 oraz wyników pretestu w grupie GE1 – wykazanie, iż wynik posttestu w grupie GK2 jest równy wynikowi pretestu w grupie GE1 ($GK2_{post} = GE1_{pre}$),

Krok II – porównanie wyników posttestu w grupie GK2 oraz wyników pretestu w grupie GK1 – wykazanie, iż wynik posttestu w grupie GK2 jest równy wynikowi pretestu w grupie GK1 ($GK2_{post} = GK1_{pre}$).

Weryfikacja wyników otrzymanych w toku badań eksperymentalnych dokonana została za pomocą wnioskowania statystycznego na poziomie istotności 0,05 ($\alpha = 0,05$).

Zastosowano test U Manna-Whitneya (4), testu *t* dla prób niezależnych (5), a także test Levene'a jednorodności wariancji (6).

Przeprowadzone analizy statystyczne wymagały obliczenia średniego procentowego wyniku wykonania zadań przez badanych uczniów w preteście i w postteście. Obliczenie średniego procentowego wyniku dla każdego ucznia polegało na zsumowaniu liczby zdobytych przez niego punktów i podzieleniu tej liczby na maksymalną liczbę punktów możliwych do zdobycia oraz w dalszej kolejności na pomnożeniu uzyskanego wyniku razy 100%. Obliczenie średniego procentowego wyniku dla wszystkich uczniów polegało na zsumowaniu otrzymanych średnich wyników każdego ucznia i podzieleniu otrzymanej liczby przez liczbę wszystkich uczniów.

Test U Manna-Whitneya jest testem porządku rang dla różnic pomiędzy dwiema niezależnymi grupami. Test ten oparty jest na analizie rang nadanych poszczególnym obserwacjom. Hipotezy w przypadku tego testu przyjmują postać:

H_0: $F1=F2$ (dystrybuanty rozkładów w porównywanych dwóch grupach są jednakowe – próby pochodzą z jednej populacji)

H_1: $F1 \neq F2$.

Do weryfikacji hipotezy H_0 służy wzór :

$$Z = U - \frac{\frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}}. \qquad (4)$$

gdzie:

$U=R1-n1(n1+1)/2$,

$R1$ – suma rang elementów z pierwszej próby,

n_1, n_2 – liczności odpowiednio pierwszej i drugiej próby.[503]

Test *t* dla prób niezależnych bada równość średnich w dwóch populacjach. W tym celu należy pobrać próbę losową $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ oraz $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$. Następnie należy oznaczyć przez μ_1, μ_2 nieznane średnie odpowiednio w obu populacjach. Hipotezy przybierają postać:

[503] B. M. King, E. W. Minium: *Statystyka dla psychologów i pedagogów*. Przeł. M. Zakrzewska. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2009, s. 562-564.

$H_0: \mu_1 = \mu_2$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2.$

Założenia testu wymagają aby zmienność wyników (wariancja) była równa w porównywanych grupach. Jeśli liczba obserwacji jest większa niż 30, a grupy są w przybliżeniu równoliczne to statystyka testowa przybiera postać:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})}} \quad (5)$$

gdzie:

$\overline{x}_1 ; \overline{x}_2$ – średnie z próby,

S_1^2 S_2^2 – wariancje z próby,

n_1 , n_2 – liczności obu grup.[504]

Analiza wariancji służy do badania wyników (obserwacji), które zależą od jednego lub więcej czynników działających równocześnie; za jej pomocą określa się, czy wyodrębnione czynniki wywierają wpływ na obserwowane wyniki.[505] Jednym z najczęściej stosowanych testów służących do oceny jednorodności wariancji jest test równości wariancji Levene'a. Hipotezy testu przybierają postać:
H_0: $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_m$ (m – liczba grup)
H_a: $\sigma_i \neq \sigma_j$ (dla przynajmniej jednej pary (i, j))

Statystyka testowa przybiera postać:

$$F = \frac{m\sum_{i=1}^{m} n_i(\overline{x}_i - \overline{x})^2 / (m-1)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} n_i(\overline{x}_{ij} - \overline{x}_i)^2 / \sum_{i=1}^{m} (n_i - 1)} \quad (6)$$

gdzie:

$\overline{x}_{ij}$ – średnia z bezwzględnych odchyleń wartości z *j*-tej grupy od średniej w *i*-tej grupie.

[504] J. Brzeziński: *Badania eksperymentalne w psychologii i pedagogice*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe „Scholar”, 2000, s. 182.
[505] J. Jóźwiak, J. Podgórski: *Statystyka od podstaw*…, s. 299.

Statystyka F ma rozkład F z $m - 1$ i $\sum_{i=1}^{m} n_i - m$ stopniami swobody.[506]

We wszystkich obliczeniach statystycznych dotyczących badań eksperymentalnych uczniów przyjęto poziom istotności $\alpha = 0{,}05$. Analiza statystyczna wykonana została przy użyciu programu SPSSW oraz pakietu Excel 2010. Wszystkie obliczenia przeprowadzane były z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Zajęcia matematyczne w grupach eksperymentalnych przeprowadzone zostały przez autorkę niniejszej rozprawy przy pomocy samodzielnie przygotowanych scenariuszy zajęć. Przykładowy scenariusz zajęć dotyczący zadań arytmetycznych zamieszczony został w aneksie 4 do niniejszej rozprawy. Przykładowy scenariusz zajęć dotyczący zadań geometrycznych znajduje się w aneksie 5 do niniejszej rozprawy. W każdym scenariuszu określony został zakres tematyczny realizowanych zajęć, wraz z wyszczególnionymi ich celami ogólnymi i operacyjnymi. Opisana została metoda kształcenia, forma pracy uczniów oraz przebieg zajęć. Scenariusze zawierały także zadania przeznaczone dla uczniów. Zajęcia matematyczne w grupach kontrolnych prowadzone były przez nauczycielki tychże klas w oparciu o przygotowane scenariusze zajęć. Scenariusze zajęć w grupach kontrolnych obejmowały podobny zakres tematyczny oraz planowane do realizacji cele, co scenariusze realizowane w grupach eksperymentalnych. Zawierały ponadto metody kształcenia, formę pracy uczniów oraz szczegółowy przebieg zajęć. Treści zawarte w scenariuszach grup eksperymentalnych i kontrolnych były zgodne z Podstawą programową kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych, która obowiązywała w roku szkolnym przypadającym na czas realizacji badań.

Badanie metodą eksperymentu pedagogicznego przeprowadzono wśród uczniów klas trzecich szkoły podstawowej.

W trakcie badań eksperymentalnych prowadzono uzupełniające badania, w ramach których wykorzystano technikę obserwacji. Zgodnie z definicją T. Pilcha obserwacja to jedna z najbardziej wszechstronnych technik gromadzenia materiałów, „jest czynnością badawczą polegającą na gromadzeniu danych drogą postrzeżeń".[507]

[506] W. Szymczak: *Podstawy statystyki dla psychologów*. Warszawa: Wydawnictwo Difin SA, 2018, s. 250-256.
[507] T. Pilch, T. Bauman: *Zasady badań pedagogicznych…*, s. 86.

Badania polegały na przeprowadzeniu kontrolowanej obserwacji (bezpośredniej, jawnej) zajęć z zakresu edukacji matematycznej zarówno w grupach eksperymentalnych, jak i grupach kontrolnych. Podczas obserwacji posłużono się samodzielnie opracowanym narzędziem, którym był arkusz obserwacji pracy uczniów podczas zajęć matematycznych (aneks 6). Arkusz miał charakter skategoryzowany, zawierał informacje na temat osoby prowadzącej obserwowane zajęcia (nauczyciel lub prowadząca badania) oraz składał się z 9 kategorii dotyczących sposobów pracy uczniów na zajęciach matematycznych. Kilka obserwacji przeprowadzono we wszystkich czterech grupach, przed rozpoczęciem prowadzenia zajęć w grupach eksperymentalnych. Kolejne obserwacje odbywały się w trakcie trwania eksperymentu w grupach kontrolnych.

Po zakończonych badaniach eksperymentalnych przeprowadzono także rozmowy z nauczycielami grup eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz grup kontrolnych GK1 i GK2.

Rozmowa stanowi próbę swobodnie przeprowadzonej interakcji w celach badawczych, należąc do tak zwanych metod „miękkich", jest pozbawiona z góry przewidywanego przebiegu, nie jest strukturalizowana.[508]

Narzędziem wykorzystywanym podczas rozmowy z nauczycielami był samodzielnie skonstruowany kwestionariusz rozmowy (aneks 7). Kwestionariusz rozmowy z nauczycielem edukacji wczesnoszkolnej zawierał 9 pytań otwartych.

W dalszej części pracy opisana została organizacja planowanych badań wraz z ich przebiegiem w podziale na badania sondażowe oraz badania eksperymentalne.

5.5. Organizacja i przebieg badań

Badania empiryczne realizowane zarówno metodą sondażu diagnostycznego, jak i eksperymentu pedagogicznego przeprowadzone zostały wedle harmonogramu zawartego w tabeli 6.

[508] S. Juszczyk: *Badania jakościowe w naukach…,* s. 140.

Tabela 6. Harmonogram badań własnych

Czynności badawcze	**Czas realizacji**	
Kwerenda	styczeń – marzec 2013	
Projekt badań empirycznych i konstruowanie narzędzi badawczych	kwiecień 2013	
Badania pilotażowe	maj 2013	
Badania właściwe:	Badania metodą sondażu diagnostycznego	Badana metodą eksperymentu pedagogicznego
Pretest		wrzesień 2013
Przeprowadzenie zajęć w ramach eksperymentu		październik 2013 – czerwiec 2014
Posttest		czerwiec 2014
Ankiety	czerwiec 2013	
Obserwacje		wrzesień 2013 – maj 2014

Źródło: Badanie własne.

W związku z wyodrębnieniem w niniejszej pracy dwóch grup badawczych, zarówno organizacja, jak i przebieg badań w każdej z nich obejmowała innego rodzaju czynności. Poniżej opisano organizację i przebieg badań własnych przeprowadzonych metodą sondażu diagnostycznego oraz metodą eksperymentu pedagogicznego w grupie badanych nauczycieli oraz w grupie badanych uczniów.

5.5.1. Organizacja i przebieg badań zrealizowanych metodą sondażu diagnostycznego

Badania zrealizowane metodą sondażu diagnostycznego miały charakter etapowy. Na każdy ze zrealizowanych etapów składał się szereg opisanych poniżej czynności badacza.

Etap wstępny składał się z następujących czynności:

- zwiad terenowy przeprowadzony w celu sprecyzowania problematyki badawczej, ustalenia zakresu poszukiwanych informacji oraz poznania struktury zbiorowości,
- konstrukcja kwestionariusza ankiety skierowanej do nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej,
- sprawdzenie komunikatywności treści słownych do poszczególnych pytań zastosowanych w kwestionariuszu ankiety,
- przeprowadzenie badań pilotażowych w celu weryfikacji przygotowanego narzędzia badawczego pod kątem jego przydatności do rozwiązania problemu badawczego.

Badania zasadnicze zawierały:

- Badania sondażowe, obejmujące następujące czynności:

- losowanie szkół podstawowych, w których przeprowadzone miały zostać badania ankietowe,
- przeprowadzenie sondażu diagnostycznego wykorzystującego kwestionariusz ankiety w wylosowanych szkołach podstawowych.

- Badania weryfikujące, obejmujące następujące czynności:

- porządkowanie i klasyfikację otrzymanych materiałów badawczych,
- obliczenie na podstawie uzyskanych wyników niezbędnych statystyk,
- analizę wyników otrzymanych badań.

Szkoły, do których rozesłane zostały kwestionariusze ankiet wybrane zostały losowo spośród publicznych szkół podstawowych mieszczących się w województwie śląskim. Operatem losowania był wykaz szkół i placówek zamieszczony na stronie internetowej Kuratorium Oświaty w Katowicach[509]. Z wykazu wyselekcjonowano wszystkie publiczne szkoły podstawowe działające w danym roku szkolnym na terenie województwa śląskiego. Następnym etapem było wylosowanie szkół, do których rozesłano kwestionariusze ankiet. Zastosowano losowanie nieograniczone indywidualne, w wyniku którego wybrano sto szkół mieszczących się na terenie województwa śląskiego, do których rozesłano łącznie 300 kwestionariuszy ankiet. Wybrane szkoły znajdowały się zarówno na terenach miejskich, jak i na terenach wiejskich.

5.5.2. Organizacja i przebieg badań zrealizowanych metodą eksperymentu pedagogicznego

Organizacja i przebieg badań eksperymentalnych również miały charakter etapowy i przebiegały wedle opisanego poniżej schematu.

Etap wstępny obejmował następujące czynności:

– wybór szkoły, w której realizowany był eksperyment pedagogiczny,
– dobór grup eksperymentalnych i kontrolnych,
– konstrukcja zadań testowych pretestu i posttestu,
– sprawdzenie komunikatywności treści słownych do poszczególnych zadań pretestu i posttestu,
– ustalenie schematu punktowania poprawnie rozwiązanych zadań pretestu i posttestu,
– opracowanie scenariuszy zajęć matematycznych dla uczniów klas trzecich szkoły podstawowej,
– przeprowadzenie badań pilotażowych mających na celu sprawdzenie przygotowanych narzędzi badawczych pod kątem ich przydatności do rozwiązania problemu badawczego.

Badania zasadnicze obejmowały wykonanie pomiaru początkowego (pretestu), przeprowadzenie eksperymentu pedagogicznego oraz wykonanie badań weryfikujących w postaci posttestu.

- Pomiar początkowy – pretest:

[509] http://www.kuratorium.katowice.pl/index.php?page=UserPage&menuItemId=345.

- ocena umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych zawartych w preteście przez uczniów grupy eksperymentalnej GE1 oraz kontrolnej GK1,
- ocena umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych zawartych w preteście przez uczniów grupy eksperymentalnej GE1 oraz kontrolnej GK1,
- ocena umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych zawartych w preteście przez uczniów grupy eksperymentalnej GE1 oraz kontrolnej GK1.

• Przeprowadzenie naturalnego eksperymentu pedagogicznego:
- przeprowadzenie przez badaczkę w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 zajęć matematycznych z wykorzystaniem heurystycznej metody G. Polya oraz przeprowadzenie przez nauczycielki w grupach kontrolnych GK1 i GK2 zajęć matematycznych wykorzystujących tradycyjne metody pracy,
- przeprowadzenie obserwacji zajęć matematycznych prowadzonych przez nauczycielki we wszystkich czterech grupach,
- przeprowadzenie rozmów z nauczycielkami grup eksperymentalnych GE1 i GE2 i grup kontrolnych GK1 i GK2.

• Pomiar końcowy – posttest:
- ocena umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych zawartych w postteście przez uczniów grup eksperymentalnych GE1 i GE2 i grup kontrolnych GK1 i GK2,
- ocena umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych zawartych w postteście przez uczniów grup eksperymentalnych GE1 i GE2 i grup kontrolnych GK1 i GK2,
- ocena umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych zawartych w postteście przez uczniów grup eksperymentalnych GE1 i GE2 i grup kontrolnych GK1 i GK2.

Końcowym etapem było przeprowadzenie badań weryfikujących, na które składały się następujące czynności:
- porządkowanie i klasyfikacja otrzymanych materiałów badawczych,
- obliczenie na podstawie uzyskanych wyników niezbędnych statystyk,

– analiza wyników otrzymanych badań.

Przed przystąpieniem do realizacji badań właściwych przeprowadzone zostały badania pilotażowe. Ich celem była weryfikacja narzędzi skonstruowanych na potrzeby realizacji planowanych badań. Badania pilotażowe przeprowadzone zostały w Szkole Podstawowej Nr 1 w Wojkowicach na kilka miesięcy przed rozpoczęciem badań właściwych. Podczas wstępnej weryfikacji sprawdzono poprawność konstrukcji narzędzi badawczych skierowanych do uczniów oraz nauczycieli.

Badania eksperymentalne rozpoczęły się od wyselekcjonowania szkoły, w której planowano zrealizować badania. Posłużono się doborem celowym. Celowy dobór próby pozwala na wybór konkretnych przypadków, gdyż po pierwsze odzwierciedla on pewną interesującą badacza cechę bądź proces, a po drugie uwzględnia krytyczne spojrzenie na wskaźniki występujące w badanej populacji.[510] Przyjęty w opisywanej tu procedurze badawczej czterogrupowy plan Solomona implikował konieczność przeprowadzenia badań w szkole, w której w roku szkolnym przypadającym na czas realizacji badań znajdowały się równocześnie przynajmniej cztery klasy trzecie. Realizacja badań w jednej szkole miała na celu zminimalizowanie liczby zmiennych zakłócających, które mogłyby wystąpić podczas realizacji badań w kilku szkołach.

Opisany warunek spełniał Miejski Zespół Szkół Nr 2 im. Huberta Wagnera w Będzinie. Kolejnym czynnikiem wpływającym na wybór tej szkoły była deklarowana przez jej dyrekcję oraz nauczycieli w niej pracujących chęć uczestniczenia w badaniach. Ostatnim argumentem decydującym o celowym doborze miejsca badań było to, iż lokalizacja szkoły pozwoliła autorce niniejszej pracy na regularne prowadzenie zajęć w grupach eksperymentalnych oraz prowadzenie przez niej obserwacji.

Po wyselekcjonowaniu szkoły, w której przeprowadzony został eksperyment pedagogiczny istotnym działaniem był dobór grup. W tym wypadku przyporządkowanie poszczególnych klas do określonych grup badawczych miało charakter losowy, uwzględniający zasadę randomizacji. Zastosowano losowanie nieograniczone indywidualne[511], w którym operatem losowania były cztery klasy trzecie uczęszczające w danym roku szkolnym do wybranej szkoły. W wyniku losowania otrzymano dwie grupy eksperymentalne (grupę GE1, w której przeprowadzono pretest i posttest oraz grupę GE2, w której wykonano jedynie posttest), a także dwie grupy kontrolne

[510] S. Juszczyk: *Badania jakościowe w naukach…,* s. 111.
[511] J. Brzeziński: *Metody badań psychologicznych…,* s. 22-23.

(grupę GK1, w której przeprowadzono pretest i posttest oraz grupę GK2, w której zrealizowano jedynie posttest).

Do trzech klas biorących udział w badaniach uczęszczało 24 uczniów, do jednej z nich 25 uczniów. Warunkiem koniecznym do zaliczenia uczniów do grup biorących udział w końcowych analizach była minimum pięćdziesięcioprocentowa obecność na zajęciach matematycznych oraz uczestniczenie w postteście. Początkowo zakładano udział w badaniach i końcowych analizach wszystkich uczniów z każdej z czterech klas trzecich, jednak z niezależnych od badacza przyczyn do końcowych analiz zdecydowano się wziąć pod uwagę po 23 uczniów z każdej z czterech grup.

Spośród wszystkich uczniów klas biorących udział w badaniach zdecydowano, by nie brać pod uwagę w końcowych analizach łącznie 5 uczniów. Z grupy GE1 postanowiono wykluczyć dwóch uczniów. Pierwszy z nich to chłopiec, który od początku trwania zajęć eksperymentalnych odmawiał aktywnego uczestniczenia w nich. Nie był on zainteresowany tokiem zajęć, nie wykonywał zadań i ćwiczeń realizowanych przez resztę grupy. Był to chłopiec sprawiający duże problemy natury wychowawczej, a w przypadku którego wszelkie próby zachęcenia go do aktywnego udziału w zajęciach okazywały się nieskuteczne. Odmówił on także wzięcia udziału w postteście. Drugi uczeń z grupy GE1 został wykluczony ze względu na bardzo dużą absencję na zajęciach eksperymentalnych, przekraczającą 50%.

Jeden uczeń z grupy GE2 również nie uczęszczał regularnie w zajęciach. Pojawił się na nich tylko kilka razy w ciągu całego roku szkolnego, oraz nie przystąpił do posttestu.

Uczniowie z grup GK1 oraz GK 2 (po jednym uczniu z każdej z nich) zostali wykluczeni z analiz, ponieważ nie uczestniczyli w postteście. Wszystkie podjęte próby wyegzekwowania od nich posttestu okazały się nieskuteczne, gdyż uczniowie ci wykazywali się wysoką absencją szkolną. W wyniku pominięcia pięciu uczniów z powyższych przyczyn, otrzymano finalnie cztery równoliczne grupy, do których zaliczono po 23 uczniów.

Po dokonaniu podziału klas na grupy eksperymentalne i kontrolne przystąpiono do realizacji przyjętego planu badawczego. W grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 przeprowadzono pretest. Następnie w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej wprowadzono czynnik eksperymentalny – heurystyczną metodę G. Polya. Grupy kontrolne GK1 i GK2 uczestniczyły w zajęciach matematycznych prowadzonych bez wykorzystania metody G. Polya. Po zakończeniu cyklu zajęć matematycznych, we wszystkich czterech grupach – eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz kontrolnych GK1 i GK2 przeprowadzono posttest.

Zajęcia matematyczne, w czasie których realizowany był eksperyment pedagogiczny odbywały się dwa razy w tygodniu przez okres dwóch semestrów. W każdej z grup uczestniczących w eksperymencie zrealizowano 44 zajęcia. Każdorazowo trwały one 45 minut i były realizowane w trakcie planowo odbywających się zajęć lekcyjnych. Podczas zajęć uczniowie grup eksperymentalnych GE1 i GE2 rozwiązywali matematyczne zadania problemowe z wykorzystaniem heurystycznej metody G. Polya. Zadania matematyczne były zadaniami o charakterze arytmetycznym oraz geometrycznym. Zajęcia matematyczne w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 były prowadzone przez autorkę niniejszej dysertacji. Zajęcia matematyczne w grupach kontrolnych GK1 i GK2 były prowadzone przez nauczycielki – wychowawczynie poszczególnych grup. Zajęcia te były realizowane w tym samym obszarze tematycznym oraz z uwzględnieniem tych samych celów operacyjnych, co zajęcia w grupach eksperymentalnych. Nauczycielki stosowały natomiast inne metody kształcenia, nie wykorzystywały podczas swoich zajęć metody G. Polya.

Wybrane do zajęć w grupach eksperymentalnych zadania problemowe stanowiły zadania tekstowe oraz zadania beztekstowe, zgodnie z przyjętą na potrzeby realizacji niniejszych badań koncepcją W. Okonia.[512] Sięgając do podziału zadań zaproponowanego przez G. Polya – twórcę metody będącej czynnikiem eksperymentalnym w niniejszych badaniach, proponowane uczniom podczas zajęć matematycznych zadania były zadaniami typu „znaleźć".

W związku z zaobserwowanymi, od samego początku trwania eksperymentu, dużymi trudnościami uczniów grup eksperymentalnych w zakresie rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, zdecydowano, iż większa ich część stanowić będzie zadania sklasyfikowane przez D. Klus-Stańską i A. Kalinowską jako zadania problemowe najprostsze, odrywające uczniów od usztywniającego myślenie schematu oraz zadania bardziej zaawansowane, zawierające dane, których nie da się uporządkować w żadnym poznanym wcześniej schemacie.[513] Rzadko sięgano natomiast po zadania twórcze. Ograniczenie proponowanych uczniom zadań problemowych do ich najłatwiejszego typu było zabiegiem koniecznym, który można określić jako próbę indywidualizacji stosowanych wobec uczniów oddziaływań dydaktycznych. Celem

[512] W. Okoń: *U podstaw problemowego…,* s. 93
[513] D. Klus-Stańska, A. Kalinowska: *Rozwijanie myślenia matematycznego…,* s. 31-32.

tej indywidualizacji było zorganizowanie procesu nauczania-uczenia się w taki sposób, by proponowane uczniom zadania były dostosowane do ich możliwości, by wykorzystywały je w największym stopniu oraz, by je rozwijały.[514] Prowadząca nie mogła proponować uczniom zadań zbyt trudnych, wykraczających poza ich możliwości. Takie postępowanie byłoby niekorzystne z punktu widzenia realizacji założonych celów dydaktycznych, jak również mogłoby spowodować zniechęcenie uczniów do uczestniczenia w zajęciach. W dłuższej perspektywie mogłoby przyczynić się do zniechęcenia uczniów do matematyki jako dziedziny wiedzy w ogólności.

Poniżej zamieszczono przykładowe zadania wykorzystywane podczas trwania eksperymentu. Zadania, które okazały się być łatwe dla uczniów grup eksperymentalnych:

Zadanie 1: Mamy kwadrat o boku długości 6 cm. Zamieniamy go w prostokąt tak, by jego dwa boki zwiększyły się o połowę. Oblicz obwód powstałej figury.

Zadanie 2: Olek zbudował pięć wież z klocków LEGO. Pierwsza wieża składała się z 8 klocków, a każda kolejna wieża była większa od poprzedniej o 7 klocków. Ile wszystkich klocków LEGO użył Olek do zbudowania pięciu wież?

Zadanie 3: Z Warszawy do Poznania jest 298 km, a z Poznania do Szczecina jest o 68 km mniej. Ile km ma droga z Warszawy do Szczecina przez Poznań?

Zadania, które okazały się być trudne dla uczniów grup eksperymentalnych:

Zadanie 1: Beata ma 37 płyt CD. Jej koleżanka, Renata powiedziała jej: *Jeśli dasz mi 10 płyt, to obie będziemy miały ich po tyle samo*". Ile płyt CD miała Renata?

Zadanie: Mamy cztery kwadraty o boku długości 3 cm. Narysuj je tak, by każdy kolejny kwadrat był „przyklejony" do poprzedniego lewym bokiem. Jaka figura powstanie, gdy rysunek będzie gotowy? Oblicz jej obwód.

Zadanie 3: Henio ma 80 zł, a Asia ma 70 zł. Poszli do sklepu, gdzie Henio kupował autka po 6 zł, a Asia laleczki po 4 zł. Wyszli ze sklepu z zapakowanymi paczkami, jednak nie pamiętali ile jest w nich autek bądź laleczek. Pamiętali jednak, że została im taka sama reszta, którą oddali mamie. Pomóż dzieciom przypomnieć sobie ile kupili autek i laleczek. Ile jest prawidłowych odpowiedzi?

[514] B. Marzec: *Indywidualizacja procesu nauczania w szkołach podstawowych*. W: *Współczesna edukacja. Wielopłaszczyznowość zadań*. Red. J. Skibska, J. Wojciechowska. Kraków: Wydawnictwo LIBRON – Filip Lohner, 2016, 222.

Wszystkie zajęcia matematyczne prowadzone były w oparciu o samodzielnie przygotowane scenariusze zajęć. Przykładowe scenariusze zajęć stanowią aneksy do niniejszej dysertacji. Treści zawarte w scenariuszach były zgodne z obowiązującą w roku szkolnym przypadającym na czas realizacji eksperymentu Podstawą programową kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych. Zadania matematyczne zawarte w scenariuszach były częściowo zaczerpnięte z dostępnej literatury, natomiast częściowo były autorstwa własnego.

Podczas zajęć matematycznych uczniowie grup eksperymentalnych stosowali heurystyczną metodę G. Polya do rozwiązywania zadań problemowych. W jej ramach wykonywali kolejne etapy rozwiązywania zadań, jakimi są wedle założeń metody: zrozumienie zadania, układanie planu rozwiązania, wykonanie planu, sprawdzenie wyniku oraz refleksja nad zadaniem – rzut oka wstecz.

W tym miejscu dysertacji przedstawiono przykładowy, uogólniony przebieg pracy uczniów grup eksperymentalnych nad rozwiązaniem matematycznego zadania problemowego z wykorzystaniem heurystycznej metody G. Polya. Zawarto w nim przykładowe czynności uczniów i prowadzącej, jakie wykonywali oni w poszczególnych etapach rozwiązywania zadania, zgodnie z założeniami metody.

Treść zadania:

Olek zbudował pięć wież z klocków LEGO. Pierwsza wieża składała się z 8 klocków, a każda kolejna wieża była większa od poprzedniej o 7 klocków. Ile wszystkich klocków LEGO użył Olek do zbudowania pięciu wież?

Przykładowe czynności uczniów i prowadzącej w pierwszym etapie rozwiązywania zadania zgodnie z koncepcją G. Polya – zrozumienie zadania:

- uczniowie samodzielne zapoznają się z treścią zadania,
- uczniowie analizują treść zadania, wyszukują wielkości dane oraz szukane, próbują także dostrzec ich wzajemne zależności,
- uczniowie opowiadają swoimi słowami treść zadania,
- uczniowie zadają pytania dotyczące tych treści zadania, które są dla nich niezrozumiałe,
- prowadząca zadaje uczniom pytania pomocnicze związane z treścią zadania– przykładowe pytania: *Czy ktoś rozwiązywał już kiedyś podobne zadanie?*

Co wiemy z treści zadania? Ile było wież? Czy znamy wielkość każdej wieży? Wielkość której wieży jest nam znana? Czy każda wieża jest tej samej wielkości? Jaka jest różnica w wielkości wież? itp.

Przykładowe czynności uczniów i prowadzącej w drugim etapie rozwiązywania zadania zgodnie z koncepcją G. Polya – układanie planu rozwiązania:

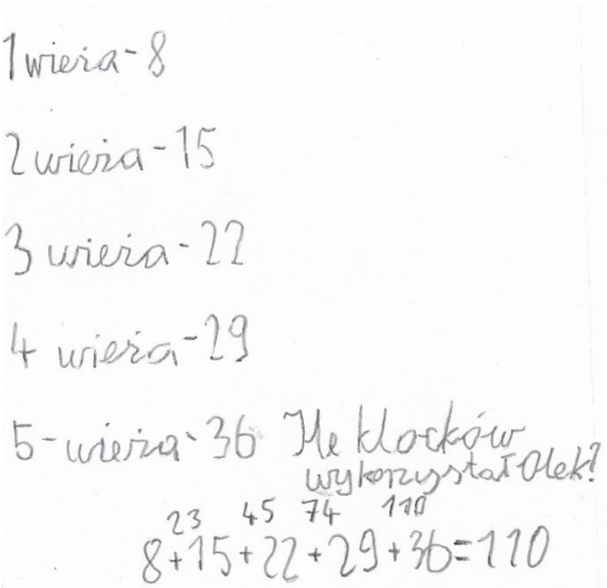
- uczniowie starają się wygenerować pomysły dotyczące tego, w jaki sposób rozwiązać zadanie,
- prowadząca zadaje uczniom pytania pomocnicze związane z treścią zadania – przykładowe pytania: *Jaka jest różnica w wielkości wież? Jak ją obliczyć? Czy można wykonać rysunek? Które dane będą potrzebne do wykonania obliczeń? Czy wystarczy jedno obliczenie, czy będzie ich kilka?* itp.

Przykładowe czynności uczniów i prowadzącej w trzecim etapie rozwiązywania zadania zgodnie z koncepcją G. Polya – wykonanie planu:

- uczniowie zapisują swoje pomysły rozwiązania zadania,
- w miarę konieczności prowadząca udziela uczniom wsparcia w dokonywaniu obliczeń, ich zapisywaniu, itp.,
- uczniowie prezentują pomysły dotyczące sposobów rozwiązania zadania.

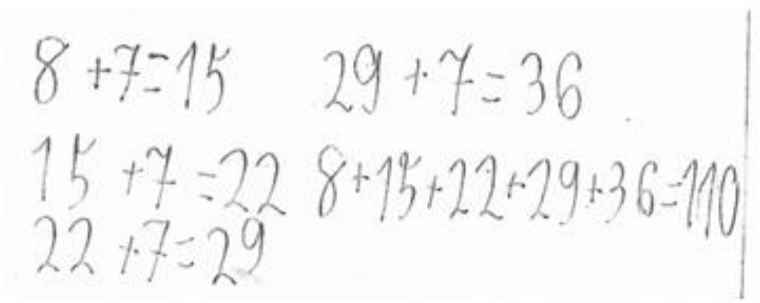
Poniższej, w formie skanowanych ilustracji, zamieszczono przykładowe pomysły uczniów na rozwiązanie przytoczonego wcześniej zadania.

Ilustracja 2. Rozwiązanie zadania zaproponowane przez Michała (GE2)



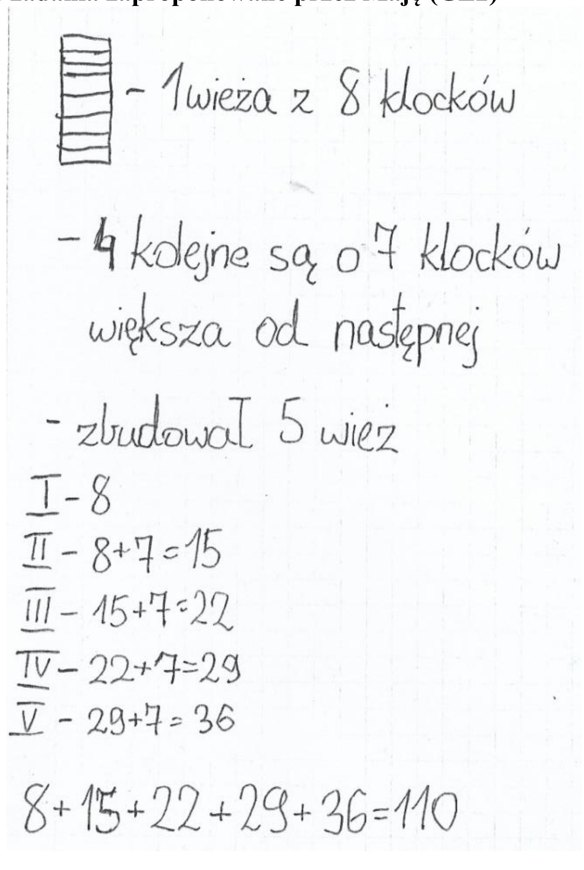
Źródło: Badanie własne.

Ilustracja 3. Rozwiązanie zadania zaproponowane przez Dawida (GE2)



Źródło: Badanie własne.

Ilustracja 4. Rozwiązanie zadania zaproponowane przez Maję (GE2)



Źródło: Badanie własne.

Przykładowe czynności uczniów i prowadzącej w czwartym etapie rozwiązywania tego zadania zgodnie z koncepcją G. Polya – sprawdzanie wyniku:

– uczniowie sprawdzają, czy ich pomysły prowadzą do uzyskania poprawnego rozwiązania zadnia,

- prowadząca zadaje uczniom pytania pomocnicze – przykładowe pytania: *Czy jesteście pewni, że otrzymany wynik jest poprawny? Jak możemy sprawdzić otrzymany wynik? Czy otrzymany wynik jest zgodny z treścią zadania? Czy możemy wykonać rysunek?* itp.
- sprawdzenie poprawności wykonania zadania za pomocą konkretów – układanie wież z klocków zgodnie z wykonanymi obliczeniami.

Przykładowe czynności uczniów i prowadzącej w piątym etapie rozwiązywania zadania zgodnie z koncepcją G. Polya – refleksja nad zadaniem:

- uczniowie opowiadają o swoich refleksjach na temat zadania – może to być forma dyskusji uczniów z prowadzącą,
- prowadząca zadaje uczniom pytania pomocnicze – przykładowe pytania: *Czy już kiedyś rozwiązywaliście podobne zadanie? Czy zadanie było trudne? Dlaczego sprawiło trudność? Czy w przyszłości poradzie sobie z podobnym zadaniem? Czego nauczyliście się podczas rozwiązania zadania? Czy potraficie wymyśleć inne, podobne zadanie?* itp.
- prowadząca odpowiada na ewentualne pytania uczniów.

Zajęcia matematyczne realizowane w grupach eksperymentalnych prowadzone były wedle struktury lekcji problemowej, która obejmowała:

a) część przygotowawczą:

- wstępna organizacja i przystąpienie do lekcji,
- sprawdzenie pracy domowej,
- powtórzenie materiału i nawiązanie do nowego tematu inicjującego stworzenie sytuacji problemowej.

b) część podstawową:

- zetknięcie uczniów z trudnością, jej odczucie i uświadomienie,
- ustalenie trudności i sformułowanie problemów, pytań, zagadnień,
- ustalenie pomysłu rozwiązania, planu wykonania zadania lub hipotez,
- wykonanie zadań, realizacja pomysłów, weryfikacja hipotez przez dobór i analizę danych, ich interpretację, przemyślenie i ocenę,
- sprawdzenie poprawności rozwiązania.

c) część końcową:

- usystematyzowanie, powtórzenie i utrwalenie materiału,

– omówienie zadania domowego,
– zastosowanie, wykorzystanie i wzbogacenie poznanych zagadnień.[515]

Cechy osoby przeprowadzającej badania eksperymentalne mogą w różnoraki sposób wpływać na otrzymywane przez nią rezultaty badań. Eksperymentatorzy różniący się pod względem cech osobowych (…) czasami otrzymują rozbieżne rezultaty, gdy badają podobne osoby.[516] Z tego też względu zajęcia matematyczne w grupach eksperymentalnych były prowadzone przez jedną osobę – przez autorkę niniejszej pracy. Autorka posiada wykształcenie pedagogiczne w zakresie edukacji wczesnoszkolnej i przedszkolnej (jednolite studia magisterskie) oraz wykształcenie w zakresie nauczania matematyki (studia w trybie podyplomowym).

W trakcie trwania eksperymentu w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz kontrolnych GK1 i GK2 przeprowadzono szereg obserwacji zajęć matematycznych. Po ich zakończeniu uczniowie uczestniczyli w postteście. Następnie dokonano analiz otrzymanych wyników, w trakcie których posłużono się opisanymi w podrozdziałach 5.4.1 oraz 5.4.2 metodami analiz statystycznych.

5.6. Charakterystyka terenu badań i populacji generalnej

Właściwy dobór próby jest istotną sprawą w badaniach naukowych. Opisywane tu badania dotyczą dwóch grup badawczych, jakimi byli:

– aktywni zawodowo nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej pracujący w szkołach zlokalizowanych na terenach miejskich i wiejskich województwa śląskiego,
– uczniowie czterech klas trzecich szkoły podstawowej mieszczącej się w Będzinie.

Wyodrębnienie w niniejszej pracy dwóch grup badawczych warunkowało sposób prowadzenia badań właściwych. Poniżej dokonano charakterystyki obu grup badawczych biorących udział w badaniach.

---

[515] T. Pilch: *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku*. T. 4, Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak”, 2005, s. 913.

[516] T. X. Barber: *Pułapki w badaniach: dziewięć rodzajów wpływów, związanych z osobami badacza i eksperymentatora*. W: *Społeczne konteksty badań psychologicznych i pedagogicznych. Wybór tekstów*. Red. J. Brzeziński, J. Siuta. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, 1991, s. 409.

5.6.1. Charakterystyka grupy badanych nauczycieli

Sondaż diagnostyczny przeprowadzono w grupie aktywnych zawodowo nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej pracujących w szkołach podstawowych na terenie województwa śląskiego. Finalnie otrzymano 213 prawidłowo wypełnionych kwestionariuszy ankiet. Zawartość wszystkich otrzymanych kwestionariuszy ankiet poddana została analizie statystycznej. Ankiety udało się pozyskać z 33 miast oraz z 14 wsi. Dokładna liczba pozyskanych ankiet z podziałem na miasto i wieś znajduje się w tabeli 7.

Tabela 7. Lokalizacja miejsca pracy badanych nauczycieli (*N* = 213)

Teren pracy	Liczebność	%
Miasto	165	77
Wieś	48	23
Razem	213	100

Źródło: Badanie własne.

Większość nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej biorących udział w badaniach, (77%) pracowała w szkołach znajdujących się na terenach miejskich. Badani nauczyciele pracowali w następujących miastach województwa śląskiego: Będzin, Bielsko-Biała, Bieruń, Bytom, Cieszyn, Czechowice-Dziedzice, Czerwionka-Leszczyny, Gliwice, Jastrzębie-Zdrój, Jaworzno, Kalety, Katowice, Kłobuck, Knurów, Lędziny, Lubliniec, Łaziska Górne, Miasteczko Śląskie, Mysłowice, Orzesze, Piekary Śląskie, Poręba, Racibórz, Rybnik, Siemianowice Śląskie, Siewierz, Skoczów, Sosnowiec, Szczyrk, Świętochłowice, Tychy, Ustroń, Wojkowice oraz Zabrze.

Pozostali badani, stanowiący 23% ogólnej liczby badanych nauczycieli, pracowali w szkołach położonych na terenach wiejskich. Badania przeprowadzono w szkołach w następujących wsiach: Bestwina, Bojszowy, Boronów, Chybie, Goczałkowice Zdrój, Jastrząb, Koniaków, Koszęcin, Krupski Młyn, Nakło, Strzebiń, Świerczyniec oraz Wysoka.

Poziom wykształcenia badanych nauczycieli zawiera tabela 8.

Tabela 8. Poziom wykształcenia badanych nauczycieli (*N* = 213)

Wykształcenie	Liczba	%
Wyższe magisterskie	202	95
Wyższe licencjackie	5	2
Brak danych	6	3
Razem	213	100

Źródło: Opracowanie własne.

Większość, stanowiąca 95% ogólnej liczby badanych nauczycieli, posiadała wykształcenie wyższe magisterskie. Jedynie 2% spośród nich w momencie wypełniania kwestionariusza ankiety posiadało wykształcenie wyższe licencjackie. W takich przypadkach respondenci deklarowali, że są aktualnie w trakcie uzupełniania wykształcenia. Sześć osób nie udzieliło odpowiedzi na pytanie dotyczące poziomu wykształcenia.

Respondenci deklarowali dużą aktywność w zakresie podnoszenia kompetencji oraz kwalifikacji zawodowych. W tabeli 9 zebrano informacje na temat ukończonych przez respondentów form doskonalenia zawodowego.

Tabela 9. Formy doskonalenia zawodowego ukończone przez badanych nauczycieli (*N* = 213)

Forma doskonalenia zawodowego	Liczba	%
Studia podyplomowe	127	60
Kursy	126	59
Szkolenia	114	53

Źródło: Badanie własne.

Zdecydowana większość badanych nauczycieli uczestniczyła w przeszłości lub była w trakcie uczestniczenia w różnorodnych formach doskonalenia zawodowego. Zgodnie z informacjami uzyskanymi z kwestionariuszy ankiet, 60% badanych nauczycieli deklarowało ukończenie studiów podyplomowych. Deklarowanymi ukończonymi kierunkami tych studiów były logopedia (33%), terapia pedagogiczna (30%) oligofrenopedagogika (20%) oraz kierunki studiów nadających uprawnienia do prowadzenia zajęć na drugim etapie edukacyjnym, takie jak: filologia polska (7%), matematyka (4%), biologia (4%), a także teologia (2%).

Respondenci dokształcali się także na różnorodnych kursach kwalifikacyjnych (59%) oraz licznych szkoleniach (53%). Spośród wymienianych form doskonalenia zawodowego tego typu nauczyciele wymieniali najczęściej szkolenie z zakresu udzielania pierwszej pomocy przedmedycznej oraz szkolenia i kursy z wybranych metod pracy z dziećmi, takich jak np.: *Metoda Dobrego Startu* M. Bogdanowicz, *Metoda Ruchu Rozwijającego W. Sherborne*, czy arteterapia.

Liczba oraz różnorodność deklarowanych przez badanych nauczycieli podejmowanych form podnoszenia kwalifikacji zawodowych świadczy między innymi o ich samoświadomości na temat konieczności uczenia się przez całe życie oraz o świadomej potrzebie stałej aktualizacji posiadanego już zasobu wiedzy i umiejętności pedagogicznych.

Respondentów zapytano także o staż pracy w szkole. Tabela 10 zawiera odpowiedzi badanych w tym zakresie.

Tabela 10. Staż pracy badanych nauczycieli (*N* = 213)

Staż pracy w szkole	**Liczba**	**%**
1 – 5 lat	12	6
5 – 10 lat	12	6
10 – 15 lat	9	4
Powyżej 15 lat	174	81
Brak danych	6	3
Razem	213	100

Źródło: Badanie własne.

Najliczniejszą grupą badanych byli nauczyciele pracujący w szkole powyżej 15 lat. Stanowili oni 81% ogółu indagowanych. W dalszej kolejności najliczniejsze grupy stanowili nauczyciele pracujący odpowiednio od roku do pięciu lat oraz od pięciu do dziesięciu lat (po 6%), a także nauczyciele ze stażem pracy sięgającym od dziesięciu do piętnastu lat (4%). Sześć osób nie udzieliło odpowiedzi na pytanie dotyczące stażu pracy w szkole.

Otrzymane wyniki wskazują, iż zdecydowana większość osób biorących udział w badaniu to doświadczeni nauczyciele, którzy pracują w zawodzie od minimum 10 lat (łącznie 85% respondentów).

W momencie przeprowadzania badań sondażowych największą liczbę ankietowanych (34%) stanowili nauczyciele klas trzecich. Równo po 31% nauczycieli było wychowawcami klas pierwszych oraz drugich. Dziesięciu respondentów nie wypowiedziało się na temat aktualnie prowadzonej klasy (4%).

5.6.2. Charakterystyka grupy badanych uczniów

W badaniu uczestniczyli uczniowie czterech klas trzecich szkoły podstawowej. Łącznie wzięło w nich udział 92 uczniów. W tabeli 11 przedstawiono rozkład płci badanych osób.

Tabela 11. Płeć badanych uczniów (*N* = 92)

Płeć	Liczba	%
Dziewczynka	49	53
Chłopiec	43	47
Razem	92	100

Źródło: Badania własne.

W sumie w grupach eksperymentalnych i kontrolnych większość stanowiły dziewczynki. Tabela 12 zawiera szczegółowe dane na temat liczebności grup badawczych z uwzględnieniem podziału na płeć badanych uczniów.

Tabela 12. Płeć badanych uczniów z podziałem na przynależność do grup eksperymentalnych oraz grup kontrolnych (*N* = 92)

Rodzaj grupy	Nazwa grupy	Liczba dziewczynek	%	Liczba chłopców	%	Razem	%
Grupa eksperymentalna	GE1	13	57	10	43	23	100
	GE2	12	52	11	48	23	100
Grupa kontrolna	GK1	11	48	12	52	23	100
	GK2	13	57	10	43	23	100
	Razem	49	53	43	47	92	100

Źródło: Badanie własne.

Najliczniejsze pod względem liczby dziewczynek były grupy GE1 oraz GK2, ponieważ w tych grupach było ich 57%. Najmniej dziewczynek znajdowało się w grupie kontrolnej (GK1) i było ich 48%. Najwięcej chłopców (52%) znajdowało się w grupie kontrolnej (GK1), zaś najmniejszą pod względem liczebności chłopców były grupy GE1 oraz GK2, ponieważ w tych grupach było ich po 43%.

W dalszej części rozprawy zaprezentowana została analiza wyników badań własnych zrealizowanych metodą sondażu diagnostycznego wśród aktywnych zawodowo nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej.

6. Analiza wyników badań zrealizowanych metodą sondażu diagnostycznego

Nieodzownym elementem pracy badacza jest analiza otrzymanych podczas badań wyników. Analiza ta polega na rozpatrywaniu ich w różnych aspektach, w taki sposób, aby przedstawić badany problem lub zjawisko w sposób możliwe dokładny i wyczerpujący.[517]

W tym miejscu pracy zaprezentowane zostaną wyniki badań własnych zrealizowanych metodą sondażu diagnostycznego wśród aktywnych zawodowo nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej pracujących w szkołach podstawowych z terenu województwa śląskiego. Zaprezentowane wyniki pozwolą odpowiedzieć na główne problemy badawcze oraz zweryfikować pytania szczegółowe.

Główne problemy badawcze dotyczące grupy badanych nauczycieli przybrały następujące brzmienie:

1. Jakie opinie na temat matematycznych zadań problemowych i metod ich rozwiązywania posiadają badani nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej?
2. Jakie opinie na temat wykorzystania heurystycznej metody G. Polya posiadają badani nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej?

Należy w tym miejscu wyjaśnić przyczynę występujących w przedstawionych poniżej analizach różnic dotyczących liczebności nauczycieli ujętych w poszczególnych tabelach. W sumie w badaniach uczestniczyło 213 nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej. Spośród wszystkich indagowanych, sześć osób nie udzieliło informacji na temat poziomu swojego wykształcenia oraz posiadanego stażu pracy. W związku z powyższym analizy statystyczne dotyczące korelacji zmiennych takich jak poziom wykształcenia i staż pracy badanych nauczycieli przeprowadzone zostały na próbie 207 nauczycieli, którzy udzielili w metryczce respondenta niezbędnych informacji.

[517] S. Juszczyk: *Statystyka dla pedagogów…,* s. 91.

6.1. Opinie badanych nauczycieli na temat matematycznych zadań problemowych i metod ich rozwiązywania

Istotną kwestią dla tematyki niniejszej rozprawy było poznanie opinii nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej biorących udział w badaniu sondażowym na temat matematycznych zadań problemowych oraz metod ich rozwiązywania.

Prezentacja otrzymanych wyników badań sondażowych została przedstawiona w następującym porządku:

- przedstawienie otrzymanych wyników w formie graficznej wraz z ich opisem i analizą,
- ukazanie zależności między lokalizacją miejsca pracy badanych nauczycieli a udzielonymi przez nich odpowiedziami na poszczególne pytania,
- ukazanie zależności między stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a udzielonymi przez nich odpowiedziami na poszczególne pytania,
- ukazanie zależności między poziomem wykształcania badanych nauczycieli a udzielonymi przez nich odpowiedziami na poszczególne pytania.

Analiza statystyczna wykonana została przy użyciu programu SPSSW oraz pakietu Excel 2010. Wszystkie testy wykonano na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$. Wszystkie obliczenia przeprowadzane były z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

W wykonanych obliczeniach jeśli zachodzi nierówność $p < \alpha$ hipotezę H_0 należy odrzucić i przyjąć jako prawdziwą hipotezę H_1. Przy wystąpieniu nierówności przeciwnej nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

W zamieszczonych poniżej tabelach symbol *p* oznacza istotność.

W kolejnym podrozdziale zebrano opinie respondentów na temat najistotniejszych ich zdaniem cech matematycznych zadań problemowych.

6.1.1. Określenia opisujące matematyczne zadania problemowe w opiniach badanych nauczycieli

Respondenci zostali poproszeni o wskazanie tych stwierdzeń, które ich zdaniem najtrafniej opisują matematyczne zadania problemowe. Wskazania te zostały zawarte w tabeli 13. Badani mieli możliwość wyboru więcej niż jednej odpowiedzi.

Tabela 13. Stwierdzenia opisujące matematyczne zadania problemowe wskazane przez badanych nauczycieli (*N = 213*)

Wskazanie	Liczba wskazań	%
Zadania problemowe to zadania rozwijające myślenie matematyczne	205	96
Zadania problemowe to zadania wymagające od uczniów wzmożonego wysiłku umysłowego	174	82
Zadania problemowe to zadania twórcze	140	66
Zadania problemowe to zadania, które powinny być stosowane powszechnie na etapie wczesnoszkolnym	106	50
Zadania problemowe to zadania, w przypadku, których uczeń nie zna algorytmu ich rozwiązania	53	25
Zadania problemowe to zadania rozwijające krytyczną postawę do rzeczywistości	48	23
Każde zadanie matematyczne jest zadaniem problemowym	40	19
Zadania problemowe to zadania niewymagające wysiłku umysłowego	9	4
Zadania problemowe to zadania odtwórcze	7	3
Zadania problemowe to zadania zbyt trudne, by stosować je na etapie edukacji wczesnoszkolnej	6	2

Źródło: Badanie własne.

Niemal wszyscy badani nauczyciele uważają, iż matematyczne zadania problemowe są zadaniami, które rozwijają myślenie matematyczne (96%). Świadczy to o dużej świadomości badanych na temat korzyści i rozległych walorów poznawczych, jakie przynosi uczniom rozwiązywanie zadań tego typu. Zdecydowana większość indagowanych uważa jednocześnie, iż zadania te wymagają od uczniów wzmożonego wysiłku umysłowego podczas ich rozwiązywania (82%). Zatem wielu badanych w swoich opiniach dotyczących pojęcia matematycznych zadań problemowych łączy dwie niezależne od siebie cechy. Z jednej strony wskazują na skutek rozwiązywania tychże zadań, z drugiej zaś na włożony przez uczniów wysiłek. Jednocześnie traktowanie przez nauczycieli zadań problemowych jako wymagających od uczniów wzmożonego wysiłku umysłowego może skutkować proponowaniem zadań tego typu przez nauczycieli jedynie tym uczniom, którzy są w ich opinii uczniami najzdolniejszymi.

Duża część badanych docenia twórczy pierwiastek matematycznych zadań problemowych utożsamiając je z zadaniami twórczymi (66%). Nauczyciele w ten sposób traktujący te zadania powinni mieć świadomość tego, że poziom edukacji matematycznej w klasach I-III jest elementarny, a wiedza matematyczna uczniów niewielka, dlatego też uczniowie nie są w stanie wykazać się twórczością matematyczną w znaczeniu obiektywnym. W związku z tym wytwory tej twórczości nie mogą mieć znaczenia dla samej matematyki. Mogą natomiast mieć cechy twórczości w sensie subiektywnym, a więc być nowe dla samego ucznia. Połowa respondentów uważa, że matematyczne zadania problemowe powinny być powszechnie stosowane podczas pracy na zajęciach matematycznych z uczniami pierwszego etapu edukacyjnego. Pewien niepokój budzić to, że pozostali ankietowani nie wskazali tej kategorii odpowiedzi. Traktowanie tych zadań jako niewymagających powszechnego stosowania może powodować ich marginalizację lub nawet wykluczanie spośród zadań proponowanych uczniom do rozwiązywania.

Zdaniem jednej czwartej badanych matematyczne zadania problemowe to takie, w przypadku których uczeń nie zna algorytmu, za pomocą którego będzie mógł je rozwiązać. Tak mała liczba wskazań sugeruje, iż nie wszyscy badani nauczyciele rozumieją specyfikę zadań problemowych, w których definicyjne ich rozwiązywanie wykracza poza znane dotąd uczniom schematy postępowania. Podobna liczba badanych (23%) wskazuje, iż zadania problemowe rozwijają krytyczną postawę wobec rzeczywistości. Co ciekawe, niemal 20% wszystkich badanych nauczycieli uważa, iż zadaniem problemowym jest każde zadanie matematyczne. To błędne przekonanie może sprawiać, iż nauczyciele ci nie proponują swoim uczniom rozwiązywania zadań prawdziwie problemowych. Tym samym, zamiast rozwijać myślenie uczniów, mogą nieświadomie usztywniać je stosując jedynie zadania standardowe. Niewielki odsetek respondentów uznał zadania tego typu za zadania niewymagające od uczniów wysiłku umysłowego (4%). Równie znikomy odsetek badanych uważał, iż zadania problemowe są zadaniami odtwórczymi (3%) oraz, że są one zbyt trudne, by móc je stosować na etapie nauczania wczesnoszkolnego (2%). Odpowiedzi te stanowią wprawdzie marginalny odsetek respondentów, jednakże świadczą o braku ich wiedzy z zakresu kształcenia problemowego, zwłaszcza matematycznych zadań problemowych.

W celu ustalenia wpływu lokalizacji miejsca pracy badanych nauczycieli (miasto/wieś) na udzielane przez nich odpowiedzi przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat pomiędzy lokalizacją miejsca pracy badanych nauczycieli a wybieraniem przez nich poszczególnych wskazań. W tabeli 14 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 14. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między stwierdzeniami badanych nauczycieli, opisującymi matematyczne zadania problemowe a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)

Z którym z poniższych zdań się zgadzasz?	**Teren pracy**				**Wynik testu chi^2**	**Wartość p**
	Miasto		**Wieś**			
	N	**%**	**N**	**%**		
Każde zadanie matematyczne jest zadaniem problemowym	29	17,58	11	22,92	0,69	0,404
Zadania problemowe to zadania niewymagające wysiłku umysłowego	6	3,64	3	6,25	0,15	0,701
Zadania problemowe to zadania wymagające od uczniów wzmożonego wysiłku umysłowego	138	83,64	36	75	1,85	0,173
Zadania problemowe to zadania zbyt trudne, by stosować je na etapie edukacji wczesnoszkolnej	4	2,42	2	4,17	0,02	0,883
Zadania problemowe to zadania, które powinny być stosowane	77	46,67	29	60,42	2,81	0,094

powszechnie na etapie wczesnoszkolnym						
Zadania problemowe to zadania odtwórcze	5	3,03	2	4,17	<0,01	>0,999
Zadania problemowe to zadania twórcze	115	69,7	25	52,08	**5,12**	**0,024**
Zadania problemowe to zadania rozwijające myślenie matematyczne	159	96,36	46	95,83	<0,01	>0,999
Zadania problemowe to zadania rozwijające krytyczną postawę do rzeczywistości	38	23,03	10	20,83	0,10	0,748
Zadania problemowe to zadania, które nie mają większych walorów poznawczych	165	100	48	100	-	-
Zadania problemowe to zadania, w przypadku, których uczeń nie zna algorytmu ich rozwiązania	41	24,85	12	25	<0,01	0,983

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat wykazała istotną statystycznie różnicę. Jak wykazano, nauczyciele pracujący w mieście częściej uznawali zadania problemowe za zadania twórcze, niż nauczyciele pracujący na terenach wiejskich. W tym przypadku uzyskano wartość $p = 0{,}024$, a więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$). W przypadku pozostałych odpowiedzi nie wykazano istotnych pod względem statystycznym różnic.

Wykazane małe różnice pomiędzy poszczególnymi opiniami nauczycieli pracującymi w mieście i na wsi są efektem tego, że zgodnie z prawem oświatowym obowiązującym w Polsce wszyscy nauczyciele muszą posiadać wyższe wykształcenie, nabywane najczęściej w tych samych uczelniach wyższych. Zatem nie powinno budzić zdziwienia to, iż nauczyciele posiadają podobny zasób wiedzy na temat problemowych metod pracy z uczniami.

W celu ustalenia wpływu stażu pracy w szkole badanych nauczycieli na udzielane przez nich odpowiedzi przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana pomiędzy stażem pracy badanych nauczycieli a wybieraniem przez nich poszczególnych wskazań. W tabeli 15 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 15. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między stwierdzeniami badanych nauczycieli, opisującymi matematyczne zadania problemowe a stażem ich pracy w szkole (*N = 213*)

Wskazanie	Staż pracy w szkole	
	rho-Spearmana	**wartość p**
Każde zadanie matematyczne jest zadaniem problemowym	**0,18**	**0,010**
Zadania problemowe to zadania niewymagające wysiłku umysłowego	0,02	0,759
Zadania problemowe to zadania wymagające od uczniów wzmożonego wysiłku umysłowego	0,06	0,354
Zadania problemowe to zadania zbyt trudne, by stosować je na etapie edukacji wczesnoszkolnej	0,07	0,329
Zadania problemowe to zadania, które powinny być stosowane powszechnie na etapie wczesnoszkolnym	0	0,961
Zadania problemowe to zadania odtwórcze	0,08	0,245
Zadania problemowe to zadania twórcze	0,08	0,237
Zadania problemowe to zadania rozwijające myślenie matematyczne	-0,02	0,778
Zadania problemowe to zadania rozwijające krytyczną postawę do rzeczywistości	0	0,995
Zadania problemowe to zadania, w przypadku, których uczeń nie zna algorytmu ich rozwiązania	0,01	0,836

Źródło: Badanie własne.

Analizy korelacji wykazały, że im badani nauczyciele mieli większy staż pracy w szkole, tym częściej uznawali za słuszne zdanie, iż każde zadanie matematyczne jest zadaniem problemowym. W tym przypadku uzyskano wartość $p = 0,010$, więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$). W przypadku pozostałych odpowiedzi nie wykazano istotnych pod względem statystycznym korelacji.

Wykazano budzącą refleksję zależność między stażem pracy badanych nauczycieli, a ich opinią dotyczącą matematycznych zadań problemowych, związaną z traktowaniem przez starszych nauczycieli wszystkich zadań jako problemowe. Prawdopodobnie jest to wynikiem ogólnie panujących opinii, że rozwiązywanie zadań matematycznych sprawia uczniom klas początkowych znaczne trudności. Zatem, jeżeli matematyczne zadania problemowe są traktowane przez badanych nauczycieli jako trudne, to z biegiem czasu mogą oni dokonać pewnej generalizacji i zacząć traktować wszystkie matematyczne zadania jako problemowe. Tym samym mogą pozbawiać swoich uczniów możliwości rozwiązywania prawdziwych zadań problemowych. Ten stan rzeczy może sprawiać, że nauczyciele traktujący wszystkie zadania matematyczne jako problemowe przestaną w planowanych i realizowanych przez siebie zajęciach celowo dobierać i proponować uczniom do rozwiązywania zadania, które w perspektywie dydaktycznej rzeczywiście są problemowymi. Warto zatem, by dyrektorzy szkół podejmujący decyzje dotyczące pracy nauczycieli, zwłaszcza tych z większym stażem, delegowali ich na różnego rodzaju formy dokształcania z zakresu problemowego nauczania-uczenia się.

W celu ustalenia wpływu poziomu wykształcenia badanych nauczycieli na udzielane przez nich odpowiedzi przeprowadzono analizę testem niezależności chi kwadrat pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a wybieraniem przez nich poszczególnych wskazań. W tabeli 16 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 16. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między stwierdzeniami badanych nauczycieli opisującymi matematyczne zadania problemowe a poziomem ich wykształcenia (*N = 213*)

Wskazanie	**Wykształcenie**				**Wynik testu chi^2**	**Wartość p**
	Magisterskie		**Licencjackie**			
	N	**%**	**N**	**%**		
Każde zadanie matematyczne jest zadaniem problemowym	40	19,80	0	0,00	0,29	0,593
Zadania problemowe to zadania niewymagające	9	4,46	0	0,00	<0,01	>0,999

wysiłku umysłowego						
Zadania problemowe to zadania wymagające od uczniów wzmożonego wysiłku umysłowego	166	82,18	2	40,00	3,25	0,071
Zadania problemowe to zadania zbyt trudne, by stosować je na etapie edukacji wczesnoszkolnej	5	2,48	0	0,00	<0,01	>0,999
Zadania problemowe to zadania, które powinny być stosowane powszechnie na etapie wczesnoszkolnym	103	50,99	2	40,00	<0,01	>0,999
Zadania problemowe to zadania odtwórcze	7	3,47	0	0,00	<0,01	>0,999
Zadania problemowe to zadania twórcze	133	65,84	4	80,00	0,03	0,855
Zadania problemowe to zadania rozwijające myślenie matematyczne	194	96,04	5	100,00	<0,01	>0,999
Zadania problemowe to zadania rozwijające krytyczną postawę do rzeczywistości	45	22,28	2	40,00	0,15	0,693
Zadania problemowe to zadania, które nie mają większych walorów poznawczych	202	100,00	5	100,00	-	-
Zadania problemowe to zadania, w przypadku, których uczeń nie zna algorytmu ich rozwiązania	53	26,24	0	0,00	0,65	0,418

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że opinie nauczycieli różniących się poziomem wykształcenia nie różniły się pod względem udzielanych odpowiedzi na temat stwierdzeń, które ich zdaniem opisują matematyczne zadania problemowe.

Jak już wcześniej wspomniano, wszyscy nauczyciele w Polsce powinni posiadać wykształcenie wyższe – bądź zawodowe (licencjackie) bądź też magisterskie. Mimo, że nauczyciele z wykształceniem licencjackim stanowili mały odsetek badanych, to analizy statystyczne wykazały, iż między nimi, a nauczycielami z wykształceniem magisterskim nie ma istotnej różnicy w opiniach na temat matematycznych zadań problemowych. Ten stan rzeczy może być uznany jako naturalny, ponieważ wykształcenie na poziomie licencjatu traktowane jest jako kształcenie zawodowe, nadające kwalifikacje do wykonywania zawodu nauczyciela, a zatem dające także odpowiednie kompetencje zawodowe, w tym także kompetencje w zakresie nauczania problemowego. Ze względu na to, iż nauczyciele posiadający stopnień magistra wcześniej ukończyli studia licencjackie, to ich podstawowe przygotowanie zawodowe jest podobne, do tego które posiadają nauczyciele z wykształceniem licencjata.

Badanych nauczycieli zapytano o to, czy ich zdaniem istnieje różnica pomiędzy matematycznymi zadaniami problemowymi, a zadaniami typowymi. Tabela 17 zawiera opinię respondentów na temat różnic miedzy oboma typami matematycznych zadań.

Tabela 17. Opinie badanych nauczycieli na temat różnicy pomiędzy stopniem trudności matematycznych zadań problemowych i bezproblemowych (*N = 213*)

Wskazanie	Liczba wskazań	%
Zadania problemowe są trudniejsze	203	94
Nie ma różnicy	4	2
Zadania problemowe są łatwiejsze	1	1
Brak danych	5	3
Razem	213	100

Źródło: Badanie własne.

Zdecydowana większość badanych nauczycieli uznaje matematyczne zadania problemowe za zadania trudniejsze i bardziej wymagające względem zadań bezproblemowych (94%). Jedynie 2% badanych nie dostrzega różnicy pomiędzy oboma typami zadań. Jeden respondent uznał, iż zadania problemowe są zadaniami łatwiejszymi do rozwiązania dla uczniów niż zadania bezproblemowe. W przypadku pięciu badanych nie udało się uzyskać odpowiedzi na zadane pytanie.

Traktowanie przez zdecydowaną większość nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej matematycznych zadań problemowych jako trudniejszych w porównaniu z zadaniami bezproblemowymi, jest w gruncie rzeczy podejściem niewłaściwym. Zarówno bowiem zadania problemowe, jak i bezproblemowe mogą być zadaniami trudnymi. Co więcej, niektóre z drugiej kategorii mogą być dla danego ucznia trudniejszymi niż zadania o charakterze problemowym. W propagowaniu kształcenia problemowego wśród już pracujących nauczycieli, jak i wśród adeptów przygotowujących się do wykonywania tego zawodu, powinno się akcentować poprawne zrozumienie przez nich matematycznych zadań problemowych i nie wiązanie tego typu zadań bezpośrednio z trudnością ich rozwiązywania.

W celu sprawdzenia wpływu lokalizacji miejsca pracy badanych nauczycieli na ich opinie na temat różnic pomiędzy zadaniami problemowymi, a zadaniami bezproblemowymi, przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 18 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 18. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat różnicy pomiędzy stopniem trudności matematycznych zadań problemowych i bezproblemowych a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Nie ma różnicy	4	2,40	0	0,00	1,04	0,672
Zadania problemowe są łatwiejsze	1	0,65	0	0,00		
Zadania problemowe są trudniejsze	156	94,55	47	98,00		
Brak danych	4	2,40	1	2,00		
Razem	165	100	48	100		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że opinie nauczycieli pracujących w miastach i na wsiach nie różniły się pod względem oceny różnicy pomiędzy zadaniami problemowymi, a zadaniami bezproblemowymi.

Jak już argumentowano wcześniej, nauczyciele pracujący w szkołach miejskich i wiejskich posiadają taki sam poziom przygotowania zawodowego. Zatem ich opinie na temat poziomu trudności występującego w matematycznych zadań problemowych i bezproblemowych mogą być podobne.

W celu sprawdzenia, czy istnieje zależność pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli, a oceną różnicy pomiędzy zadaniami problemowymi i bezproblemowymi przeprowadzono analizę testem Kruskala-Wallisa. W Tabeli 19 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 19. Wartość testu Kruskala-Wallisa dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat różnicy pomiędzy stopniem trudności matematycznych zadań problemowych i bezproblemowych a stażem ich pracy w szkole (*N = 213*)

	Wskazanie	**Liczba wskazań**	**Średnia ranga**	**Wynik testu K-W**	**wartość p**
Staż pracy	Nie ma różnicy	4	93,13	0,39	0,822
	Zadania problemowe są łatwiejsze	1	118,00		
	Zadania problemowe są trudniejsze	197	101,59		
	Brak danych	5	-		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem Kruskala-Wallisa nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że staż pracy w szkole nie warunkował opinii badanych nauczycieli na temat różnicy pomiędzy matematycznymi zadaniami problemowymi, a zadaniami bezproblemowymi. Podobnie, jak lokalizacja miejsca pracy, tak i staż pracy w szkole nauczycieli nie wpływa na ich opinie związane z poziomem trudności zadań problemowych względem innych zadań.

W celu ustalenia zależności pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli, a ich opiniami na temat różnic pomiędzy matematycznymi zadaniami problemowymi, a zadaniami bezproblemowymi przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 20 zamieszczono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 20. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat różnicy pomiędzy stopniem trudności matematycznych zadań problemowych i bezproblemowych a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)

Wskazanie	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Nie ma różnicy	4	2,00	0	0,00	2,66	>0,999
Zadania problemowe są łatwiejsze	1	0,50	0	0,00		
Zadania problemowe są trudniejsze	192	95,00	5	100,00		
Brak danych	5	2,50	0	0		
Razem	202	100	5	100		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że opinie badanych nauczycieli różniących się poziomem wykształcenia nie różniły się pod względem oceny różnicy między zadaniami problemowymi a zadaniami bezproblemowymi.

Jak się okazało na ocenę stopnia trudności zadań problemowych względem pozostałych typów zadań nie wywiera wpływu także poziom wykształcenia nauczycieli.

Zaprezentowane powyżej analizy dają obraz sposobu rozumienia przez respondentów matematycznych zadań problemowych, a także ich charakterystycznych cech. Istotnym dla badacza elementem było uzyskanie odpowiedzi na pytanie dotyczące częstości stosowania zadań tego typu podczas codziennej pracy z uczniami przez badanych nauczycieli. Kolejny podrozdział dotyczy tego zagadnienia.

6.1.2. Częstotliwość stosowania przez badanych nauczycieli zadań problemowych podczas zajęć matematycznych

Badanych nauczycieli poproszono o udzielenie odpowiedzi na temat częstotliwości stosowania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych. Tabela 21 zawiera wskazania respondentów.

Tabela 21. Częstotliwość stosowania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych przez badanych nauczycieli (*N = 213*)

Wskazanie	Liczba wskazań	%
Co najmniej raz w tygodniu	112	52
Kilka razy w miesiącu	78	35
Kilka razy w semestrze	17	7
1-2 razy w roku szkolnym	1	1
Nie stosuję	2	2
Brak danych	3	3
Razem	213	100

Źródło: Badanie własne.

Największa liczba badanych nauczycieli zadeklarowała, iż stosuje matematyczne zadania problemowe podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej co najmniej raz w tygodniu (52%). Nieco ponad jedna trzecia respondentów wskazuje, iż stosuje zadania tego typu kilka razy w miesiącu (35%). Nasuwa się jednak pytanie: czy zadania, które nauczyciele uznają za zadania problemowe faktycznie nimi są? Ukazane w poprzednim podrozdziale odpowiedzi respondentów sugerują, iż nie wszyscy nauczyciele prawidłowo rozumieją sens tego typu zadań. Istnieje zatem prawdopodobieństwo, że część nauczycieli deklarujących regularne stosowanie zadań problemowych, w rzeczywistości stosuje zadania bezproblemowe, które w ich mniemaniu spełniają warunki zadań problemowych. Zdecydowanie mniejsza liczba badanych nauczycieli przyznała, że stosuje zadania problemowe kilka razy w semestrze (7%) oraz jeden lub dwa razy w roku szkolnym (1%). Dwóch nauczycieli biorących udział w badaniu przyznało, iż wcale nie stosuje zadań problemowych w swojej pracy. W przypadku 3% respondentów nie udało się uzyskać informacji na temat częstotliwości stosowania przez nich tego typu zadań.

W celu sprawdzenia czy istnieje zależność pomiędzy lokalizacją miejsca pracy badanych nauczycieli, a częstością stosowania przez nich matematycznych zadań problemowych przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 22 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 22. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między częstością stosowania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych przez badanych nauczycieli a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Co najmniej raz w tygodniu	84	51,00	28	58,00	4,93	0,256
Kilka razy w miesiącu	62	37,50	16	33, 00		
Kilka razy w semestrze	16	10,00	1	2,50		
1-2 razy w roku szkolnym	1	0,50	0	0,00		
Nie stosuję	1	0,50	1	2,50		
Brak danych	1	0,50	2	4,00		
Razem	165	100	48	100		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic dotyczących częstości stosowania matematycznych zadań problemowych między nauczycielami pracującymi w mieście i na wsi. Oznacza to, że osoby różniące się lokalizacją miejsca pracy nie różniły się pod względem częstości stosowania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych.

Zaprezentowane wyniki badań wskazują na to, iż lokalizacja miejsca pracy nie warunkuje częstości stosowania zadań problemowych w pracy nauczycieli szkół z terenów wiejskich i miejskich.

Następnie sprawdzono, czy staż pracy w szkole badanych nauczycieli wpływa na częstość stosowania przez nich matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych. W tym celu przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana pomiędzy stażem pracy badanych nauczycieli, a częstością stosowania przez nich zadań problemowych. Tabela 23 zawiera wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 23. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między częstością stosowania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych przez badanych nauczycieli a stażem ich pracy w szkole (*N = 207)*

Zmienna	Staż pracy	
	rho-Spearmana	Wartość p
Częstość stosowania zadań problemowych w ramach edukacji matematycznej z uczniami	0,06	0,389

Źródło: Badanie własne.

Analizy korelacji nie wykazały istotnych statystycznie związków pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli, a częstością stosowania przez nich matematycznych zadań problemowych na zajęciach matematycznych.

Jak wykazały wcześniejsze analizy, u nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej dłużej pracujących w zawodzie zacierała się zdolność odróżniania zadań problemowych od bezproblemowych. Z kolei w przygotowaniu zawodowym nauczycieli występuje duże nasycenie wykorzystywania nauczania problemowego w pracy z uczniami, a to przenoszone jest przez nich na grunt swojej praktyki pedagogicznej. Ta sytuacja sprawia, że różnice miedzy częstotliwością stosowania matematycznych zadań problemowych miedzy porównywanymi grupami nauczycieli nie mają istotnego statystycznie znaczenia.

W celu sprawdzenia, czy osoby różniące się poziomem wykształcenia różniły się pod względem częstotliwości stosowania matematycznych zadań problemowych na zajęciach matematycznych, przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 24 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 24. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między częstością stosowania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych przez badanych nauczycieli a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)

Wskazanie	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Co najmniej raz w tygodniu	108	53,00	3	60,00	3,50	>0,999
Kilka razy w miesiącu	73	36,00	2	40,00		
Kilka razy w semestrze	15	7,00	0	0,00		
1-2 razy w roku szkolnym	1	0,50	0	0,00		

Nie stosuję	2	1,00	0	0,00		
Brak danych	3	2,50	0	0,00		
Razem	202	100	5	100		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że nauczyciele różniący się poziomem wykształcenia nie różnili się pod względem częstości stosowania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych z uczniami.

Jak się okazało, poziom wykształcenia badanych nauczycieli, nie determinuje częstotliwości wykorzystywania przez nich zadań problemowych podczas pracy z uczniami.

Kolejnym interesującym badacza elementem było ustalenie, czy badani nauczyciele, deklarujący stosowanie w swojej pracy matematycznych zadań problemowych proponują ich rozwiązywanie wszystkim uczniom w klasie, czy może tylko wybranym grupom. W kolejnym podrozdziale zawarto analizy danych otrzymanych na ten temat.

6.1.3. Uczniowie, którym badani nauczyciele proponują rozwiązywanie zadań problemowych podczas zajęć matematycznych

Nauczycieli, którzy deklarowali, iż wykorzystują w swojej pracy zadania problemowe poproszono o określenie grupy uczniów, którym proponują zadania tego typu podczas zajęć matematycznych. Tabela 25 zawiera odpowiedzi badanych na ten temat.

Tabela 25. Grupy uczniów, jakim badani nauczyciele proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych (*N = 213*)

Wskazanie	Liczba wskazań	%
Wszystkim uczniom w klasie	198	93
Tylko uczniom uzdolnionym matematycznie	5	2,5
Tylko przeciętnym uczniom	1	1
Brak danych	9	3,5
Razem	213	100

Źródło: Badanie własne.

Niemal wszyscy badani nauczyciele zadeklarowali, iż proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych wszystkim uczniom w klasie (94%). Niski odsetek respondentów wskazał, iż tego typu zadania proponuje wyłącznie uczniom ich zdaniem uzdolnionym matematycznie (5%). Jedna badana osoba przyznała, iż zaleca rozwiązywanie tych zadań wyłącznie uczniom o przeciętnych zdolnościach. W przypadku siedmiu osób nie udało się uzyskać odpowiedzi na zadane pytanie.

Opisana sytuacja, w której zdecydowana większość nauczycieli deklaruje proponowanie wszystkim uczniom w klasie rozwiązywania matematycznych zadań problemowych jest pożądana nie tylko z punktu widzenia dydaktycznego, ale także wychowawczego. W aspekcie dydaktycznym proponowanie rozwiązywania tych zadań wyłącznie uczniom zdolniejszym może mieć negatywne konsekwencje. Po pierwsze nauczyciel może przyzwyczaić się do takiego, dość wybiórczego traktowania nauczania problemowego. Po drugie może to sprawiać, że uczniowie mniej zdolni nie będą mieli możliwości nabywania tych samych kompetencji, co uczniowie zdolniejsi. Po trzecie sytuacja taka może powodować trudności natury organizacyjnej w organizacji pracy uczniów – cóż bowiem mają czynić uczniowie mniej zdolni w czasie, gdy ich zdolniejsi koledzy rozwiązują zadania problemowe? Z punktu widzenia wychowawczego uczniowie oczekują równego traktowania, natomiast wykluczanie jednej grupy uczniów z aktywności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych nie spełnia wymogów takiego ich traktowania.

W celu ustalenia zależności pomiędzy lokalizacją miejsca pracy badanych nauczycieli, a grupami uczniów, którym proponują oni rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych, przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. Tabela 26 zawiera wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 26. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między grupami uczniów, jakim badani nauczyciele proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Wszystkim uczniom w klasie	151	92,00	47	98,00	1,67	0,486
Tylko uczniom uzdolnionym matematycznie	5	3,00	0	0,00		
Tylko przeciętnym uczniom	1	1,50	0	0,00		
Brak danych	8	3,50	1	2,00		
Razem	165	100	48	100		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że nauczyciele różniący się lokalizacją miejsca pracy nie różnili się pod względem wyboru uczniów, jakim proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej.

Jak się okazało, bez względu na to, czy nauczyciele pracowali w szkołach mieszczących w miastach, czy na wsiach, deklarowali oni, iż zadania problemowe rozwiązują wszyscy ich uczniowie. Lokalizacja miejsca pracy nie ma zatem w tym przypadku znaczenia.

W celu zbadania zależności pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a grupami uczniów, którym proponują oni rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych, przeprowadzono analizę testem Kruskala-Wallisa. W tabeli 27 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 27. Wartość testu Kruskala-Wallisa dla zależności między grupami uczniów, jakim badani nauczyciele proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a stażem ich pracy w szkole (*N = 207*)

Zmienna	Wskazanie	Liczba wskazań	Średnia ranga	Wynik testu K-W	Wartość p
Staż pracy	Wszystkim uczniom w klasie	198	103,02	2,24	0,326
	Tylko uczniom uzdolnionym matematycznie	5	78,50		
	Tylko przeciętnym uczniom	1	119,00		
	Brak danych	3			

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem Kruskala-Wallisa nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że nauczyciele różnicujący uczniów, którym proponują rozwiązywanie zadań problemowych nie różnią się pod względem stażu pracy w szkole. Zarówno mniej doświadczeni, jak i bardziej doświadczeni zawodowo nauczyciele deklarują, iż rozwiązują zadania problemowe ze wszystkimi uczniami w klasie. Wynik ten świadczy o tym, iż badani nauczyciele, niezależnie od stażu pracy w szkole dostrzegają walory poznawcze, jakie niesie ze sobą praca z wykorzystaniem zadań tego typu oraz, że chętnie proponują ich rozwiązywanie swoim uczniom.

W celu ustalenia zależności pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a uczniami, którym proponują oni rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych, przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 28 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 28. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między grupami uczniów, jakim badani nauczyciele proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)

Wskazanie	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Wszystkim uczniom w klasie	193	96,00	5	100,00	2,51	>0,999
Tylko uczniom uzdolnionym matematycznie	5	2,00	0	0,00		
Tylko przeciętnym uczniom	1	0,50	0	0,00		
Brak danych	3	1,50	0	0,00		
Razem	202	100	5	100		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że nauczyciele różniący się poziomem wykształcenia nie różnili się pod względem wyboru uczniów, jakim proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej. Poziom wykształcenia, także tym razem okazał się nie mieć znaczenia w opisywanych tu analizach.

Kolejnym aspektem znajdującym się w polu zainteresowania badacza było ustalenie, jakie pozytywne skutki rozwiązywania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych zauważają badani nauczyciele. Kolejny podrozdział zawiera opinie respondentów na ten temat.

6.1.4. Pozytywne skutki rozwiązywania przez uczniów zadań problemowych podczas zajęć matematycznych

Nauczyciele biorący udział w badaniach zostali poproszeni o wskazanie pozytywnych i negatywnych skutków, jakie ich zdaniem wiążą się z rozwiązywaniem przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć. Tabela 29 zawiera zebrane opinie nauczycieli dotyczące pozytywnych skutków tego rozwiązywania. Mogli oni wskazać kilka odpowiedzi.

Tabela 29. Opinie badanych nauczycieli na temat pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych (*N = 213*)

Wskazanie	Liczba wskazań	%
Rozwijają myślenie	210	98
Powodują wzrost zaangażowania uczniów	165	77
Mobilizują do twórczości na zajęciach	155	73
Mobilizują uczniów do pracy	143	67
Poprawiają wyniki pracy uczniów	82	38
Wprowadzają radosną atmosferę na zajęciach	60	28
Inne: – *„zachęcają do uczenia się matematyki”* – *„ułatwiają rozumienie treści zadań”* – *„są dla uczniów wyzwaniem”*	2	1

Źródło: Badanie własne.

Najwięcej badanych nauczycieli (98%) uznało, iż główną zaletą rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych jest rozwijanie ich myślenia. Podobnie liczba badanych (96%) wskazała rozwijanie myślenia matematycznego jako cechę, która ich zdaniem opisuje zadania problemowe (tabela 13). Nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej w zasadzie nie mają narzędzi do diagnozowania poziomu rozwoju, ani myślenia w szerokim rozumieniu, ani też myślenia matematycznego, stąd też wybory tej zalety mają charakter bardziej teoretyczny niż praktyczny. Zdaniem 77% badanych, dzięki rozwiązywaniu matematycznych zadań problemowych u uczniów wzrasta zaangażowanie podczas pracy na zajęciach. Jest to cecha charakterystyczna zadań o charakterze problemowym, ponieważ wymagają one znacznie większego zaangażowania osoby je rozwiązującej w porównaniu do zadań bezproblemowych. Podobny odsetek badanych (73%) uważa, że zadania tego typu mobilizują uczniów do działań mających cechy twórczości podczas zajęć matematycznych. Te wskazania również korespondują z cechami zadań problemowych, które wskazywali badani nauczyciele (tabela 13). Duża część respondentów (67%) uważa także, że zadania problemowe są w stanie zmobilizować uczniów do bardziej aktywnej pracy na zajęciach matematycznych. Wskazania te są zgodne z ogólnie przyjętymi w dydaktyce opiniami zaliczającymi metody nauczania problemowego do metod aktywizujących.[518] Nieco ponad jedna trzecia badanych nauczycieli (38%) jest zdania, iż regularne stosowanie podczas zajęć matematycznych zadań problemowych może wpłynąć na poprawę wyników pracy uczniów. Wyniki te mierzone są w odniesieniu, bądź do teoretycznej wiedzy matematycznej, bądź też do matematycznych umiejętności. Jedną z cech nauczania problemowego jest większy wpływ na kształtowanie umiejętności niż na opanowanie wiedzy. Dlatego też rolą nauczyciela jest podjęcie takich działań, by po zajęciach problemowych osiągnąć równowagę pomiędzy tymi elementami. Wśród badanych nauczycieli pojawiła się także opinia, iż rozwiązywanie przez uczniów matematycznych zadań problemowych wprowadza na zajęciach radosną atmosferę (28%). Doświadczenia tych nauczycieli zgodne są z założeniami dydaktyki, wedle których rozwiązywanie problemów sprawia uczniom intelektualne zadowolenie już z samego faktu operowania myślą i ideami. Jeszcze większą satysfakcję uczniowie odczuwają w momencie rozwiązania tegoż problemu, co może być odbierane jako wspomniana wyżej radość. Badani nauczyciele niechętnie wykraczali poza zaproponowaną kafeterię odpowiedzi. Jedynie dwóch (1%) spośród nich wybrało wskazanie „*inne*”. Zdaniem tych nauczycieli pozytywnym skutkiem rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych jest to, iż zachęcają one do uczenia się matematyki, ułatwiają uczniom rozumienie treści matematycznych zadań oraz to, że stanowią dla nich swojego rodzaju wyzwanie.

W celu ustalenia wpływu lokalizacji miejsca pracy badanych nauczycieli na udzielanie przez nich odpowiedzi dotyczące pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 30 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

[518] M. Wójcicka: *Wybrane metody i techniki aktywizujące. Zastosowania w procesie nauczania i uczenia się matematyki*. Warszawa: Fraszka Edukacyjna, 2005, s. 6.

Tabela 30. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Rozwijają myślenie	163	98,79	47	97,92	<0,01	>0,999
Powodują wzrost zaangażowania uczniów	123	74,55	42	87,5	3,57	0,059
Poprawiają wyniki pracy uczniów	60	36,36	22	45,83	1,41	0,235
Mobilizują do twórczości na zajęciach	117	70,91	38	79,17	1,28	0,258
Mobilizują uczniów do pracy	113	68,48	30	62,5	0,60	0,437
Wprowadzają radosną atmosferę na zajęciach	50	30,3	10	20,83	1,65	0,199
Inne: – *„zachęcają do uczenia się matematyki”* – *„ułatwiają rozumienie treści zadań”* – *„są dla uczniów wyzwaniem”*	2	1,21	0	0	<0,01	>0,999
Nie przynoszą pozytywnych skutków	0	0,00	0	0,00	-	-

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że poglądy nauczycieli z terenów miejskich i wiejskich nie różniły się pod względem wskazywania pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów zadań problemowych na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej.

Nie ma zatem większych różnic w opiniach nauczycieli pracujących na terenach wiejskich i miejskich na temat pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych.

W celu ustalenia zależności pomiędzy stażem pracy badanych nauczycieli, a udzielanymi przez nich odpowiedziami dotyczącymi pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej, przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a wskazywanymi przez nich pozytywnymi skutkami rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej. W tabeli 31 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 31. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a stażem ich pracy w szkole (*N = 207*)

Wskazanie	Staż pracy	
	rho-Spearmana	**wartość p**
Rozwijają myślenie	-0,05	0,452
Powodują wzrost zaangażowania uczniów	**0,15**	**0,027**
Poprawiają wyniki pracy uczniów	0,06	0,412
Mobilizują do twórczości na zajęciach	-0,11	0,103
Mobilizują uczniów do pracy	0,12	0,089
Wprowadzają radosną atmosferę na zajęciach	**-0,19**	**0,005**
Inne: – *„zachęcają do uczenia się matematyki”* – *„ułatwiają rozumienie treści zadań”* – *„są dla uczniów wyzwaniem”*	0,04	0,54
Nie przynoszą pozytywnych skutków	0	0

Źródło: Badanie własne.

Przeprowadzone analizy korelacji wykazały, że im większy staż pracy w szkole posiadali badani nauczyciele, tym rzadziej jako pozytywny skutek rozwiązywania matematycznych zadań problemowych wskazywali powodowanie wzrostu zaangażowania uczniów oraz wprowadzanie radosnej atmosfery na zajęciach. W tym przypadku uzyskano wartość $p = 0{,}005$, więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$).

Otrzymany tu wynik jest dość interesujący. Jak się okazało, bardziej doświadczeni zawodowo nauczyciele wykazują mniejszy entuzjazm wobec możliwości urozmaicenia i tym samym uatrakcyjnienia zajęć matematycznych zadaniami o charakterze problemowym. Nauczyciele z mniejszym doświadczeniem zawodowym częściej kojarzyli radosną atmosferę na zajęciach z możliwością rozwiązywania przez uczniów zadań problemowych. W przypadku pozostałych odpowiedzi nie wykazano istotnych pod względem statystycznym zależności.

W celu zbadania zależności pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a udzielanymi przez nich odpowiedziami dotyczącymi pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej przeprowadzono analizę testem niezależności chi kwadrat. W tabeli 32 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 32. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)

Wskazanie	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Rozwijają myślenie	199	98,51	5	100,00	<0,01	>0,999
Powodują wzrost zaangażowania uczniów	159	78,71	3	60,00	0,21	0,650
Poprawiają wyniki pracy uczniów	78	38,61	2	40,00	<0,01	>0,999
Mobilizują do twórczości na zajęciach	146	72,28	4	80,00	<0,01	>0,999
Mobilizują uczniów do pracy	136	67,33	4	80,00	0,01	0,909
Wprowadzają radosną atmosferę na zajęciach	55	27,23	4	80,00	**4,33**	**0,037**
Inne: – *„zachęcają do uczenia się matematyki”* – *„ułatwiają rozumienie treści zadań”* – *„są dla uczniów wyzwaniem”*	1	0,50	1	20,00	**4,37**	**0,037**
Nie przynoszą pozytywnych skutków	202	100,00	5	100,00	-	-

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat wykazała istotne statystycznie różnice. Ustalono, że osoby z wykształceniem wyższym magisterskim rzadziej niż osoby z wykształceniem wyższym licencjackim jako pozytywne skutki rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej wskazywali odpowiedzi takie jak „*wprowadzają radosną atmosferę na zajęciach*” – w tym przypadku uzyskano wartość $p = 0{,}037$, więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$). Ponadto nauczyciele ci rzadziej wskazywali odpowiedź „*inne*” – w tym przypadku uzyskano wartość $p = 0{,}037$, a więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$).

Jak się okazało, nauczyciele z wykształceniem magisterskim, podobnie jak nauczyciele z dłuższym stażem pracy w szkole, rzadziej wskazywali na wprowadzanie radosnej atmosfery na zajęciach poprzez stosowanie matematycznych zadań problemowych, niż nauczyciele z wykształceniem wyższym licencjackim. Staż pracy w szkole może być powiązany z poziomem wykształcenia. Zdarza się bowiem, iż nauczyciele rozpoczynający pracę w szkole posiadają wykształcenie wyższe licencjackie i dopiero w trakcie swojej pracy podnoszą kwalifikacje zawodowe. Występuje tutaj wzajemne korespondowanie wyników dotyczących stażu pracy w szkole i wykształcenia respondentów.

Interesującym zagadnieniem było poznanie opinii indagowanych na temat pozytywnych, ale także i negatywnych skutków, jakie może powodować stosowanie podczas zajęć z uczniami matematycznych zadań problemowych. W kolejnym podrozdziale zebrano zatem wskazania badanych nauczycieli na temat negatywnych skutków stosowania zadań tego typu.

6.1.5. Negatywne skutki rozwiązywania przez uczniów zadań problemowych podczas zajęć matematycznych

W tym miejscu zaprezentowane zostaną wskazania badanych nauczycieli na temat negatywnych skutków, jakie ich zdaniem może przynosić rozwiązywanie przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych. Tabela 33 zawiera zebrane odpowiedzi.

Tabela 33. Opinie badanych nauczycieli na temat negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych (*N = 213*)

Wskazanie	Liczba wskazań	%
Nie przynoszą negatywnych skutków	108	51
Angażują do pracy tylko wybraną część klasy	69	32
Powodują dezorganizację pracy na lekcji	27	13
Powodują zniechęcenie do rozwiązywania zadań	26	12
Wprowadzają stresującą atmosferę na zajęciach	11	5
Szybko się nudzą	5	2
Ograniczają myślenie	1	1

Inne: – *„wywołują u uczniów strach”* – *„czasami uczniowie pomimo wysiłku nie potrafią ich rozwiązać”* – *„słabsi uczniowie nie rozwiązują ich samodzielnie, tylko odpisują gotowe rozwiązanie”*	7	4

Źródło: Badanie własne.

Doświadczenie wykazuje, że świat nie może być postrzegany jedynie w bieli i w czerni, ale również w całej gamie odcieni szarości. To stwierdzenie odnosi się także do nauczania problemowego. Jednakże ponad połowa indagowanych (51%) nie dostrzega istnienia żadnych negatywnych skutków stosowania matematycznych zadań problemowych. Wśród nauczycieli, którzy zauważają negatywne skutki stosowania tych zadań, najczęstszym wskazaniem było stwierdzenie, iż zadania te angażują do pracy tylko wybraną grupę uczniów (32%). W opiniach tych nauczycieli można wykazać pewną nieścisłość, gdyż większość z nich mieści się w grupie 94% badanych, którzy zadeklarowali, iż proponują rozwiązywanie zadań problemowych wszystkim uczniom w klasie (tabela 25). Z całą pewnością rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych sprawia różnym uczniom rozmaite trudności. Dlatego też nie można wykluczyć, że na pewnym etapie działań związanych z ich rozwiązywaniem może w jakimś stopniu zanikać aktywność uczniów, których kompetencje matematyczne są niewielkie i przez to nie nadążają oni za tokiem myślenia pozostałych członków grupy. W tym przypadku nauczyciel może jednakże po pierwsze proponować uczniom rozwiązywanie zadań o różnym stopniu trudności, także takich z którymi radzą sobie uczniowie słabsi. Po wtóre zaś ma możliwość wpływania na sposób tworzenia się grup uczniów i doprowadzanie do powstania grup jednorodnych pod względem poziomu kompetencji matematycznych, co sprawia że w trakcie rozwiązywania zadań nie nastąpi wspomniany zanik aktywności uczniów. Część respondentów (13%) uważa, iż korzystanie przez uczniów z zadań problemowych powoduje dezorganizację pracy na lekcji. Jednym z największych przejawów takiej dezorganizacji pracy, zarówno nauczycieli, jak i uczniów, na lekcjach problemowych jest podanie prawidłowego rozwiązania zadania w bardzo krótkim czasie (szczególnie przez uczniów matematycznie uzdolnionych). Sprawia to, że inni uczniowie, pozostając na którymś z wcześniejszych etapów tego rozwiązywania, nie osiągają wszystkich korzyści, które daje pełna procedura rozwiązywania zadań problemowych. Drugim, bardzo widocznym przejawem dezorganizacji pracy jest brak rozwiązania matematycznego zadania problemowego w zaplanowanym czasie. Nauczyciel musi wówczas podjąć decyzję, czy czas ten wydłużyć, czy też podać rozwiązanie w gotowej postaci. Nauczyciele jako dezorganizację pracy na lekcji problemowej mogą odbierać także, odmienne w porównaniu z nauczaniem tradycyjnym, zachowanie uczniów. W trakcie rozwiązywania problemów pożądana jest bowiem nieskrępowana atmosfera twórczej pracy, a gdy ma ona charakter pracy grupowej, to może znacznie zwiększyć poziom chaosu i hałasu. Podobny odsetek badanych uważa, iż zadania tego typu mogą przyczyniać się do zniechęcenia uczniów do rozwiązywania zadań (12%). Opinie te są zgodne z założeniami dydaktyki w odniesieniu zwłaszcza do poziomu trudności zadań problemowych.[519] Otóż w przypadku, w którym nauczyciele proponują uczniom rozwiązywanie zadań problemowych przekraczających ich możliwości intelektualne i/lub wykraczających poza ich kompetencje matematyczne może się zdarzyć, iż niektórzy uczniowie nie będą podejmować prób ich rozwiązywania, markując działania i czekając na podanie gotowego rozwiązania przez innych uczniów lub przez samego nauczyciela. Sytuacja taka jest szkodliwa i nie powinna mieć miejsca podczas zajęć problemowych. Niewielki odsetek respondentów (5%) uznaje, iż zadania problemowe wprowadzają na zajęciach stresującą atmosferę. Taką atmosferę może natomiast ewentualnie tworzyć sam nauczyciel, gdyż nie ma powodu, by stres taki pojawiał się w trakcie prawidłowo realizowanych zajęć problemowych. Brak rozwiązania każdego zadania, w tym zadania problemowego nie powinien powodować pojawiania się reakcji stresowych u uczniów, a przekonanie ich o tym należy do nauczyciela. Najmniejsza liczba badanych nauczycieli (2%) jest zdania, iż matematyczne zadania problemowe szybko się nudzą uczniom oraz ograniczają ich myślenie (1%). Ten, dość oryginalny pogląd wskazuje na brak zrozumienia przez respondentów istoty zadań o charakterze problemowym. Siedmiu badanych nauczycieli (4%) skorzystało z możliwości uzupełnienia kategorii „inne" własnymi propozycjami. Zdaniem tych nauczycieli do negatywnych konsekwencji rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych można zaliczyć skutki takie jak wywoływanie u nich strachu oraz działanie demotywujące w momencie, kiedy uczniowie pomimo zaangażowania nie są w stanie uzyskać prawidłowego

[519] K. Kruszewski: *Nauczanie i uczenie się rozwiązywania problemów*. W: *Sztuka nauczania. Czynności nauczyciela*. Red. K. Kruszewski. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993, s. 123.

rozwiązania. Respondenci zwrócili uwagę także na to, iż słabsi uczniowie mogą zaniechać samodzielnego rozwiązywania zadań problemowych i czekać na odpisanie gotowego rozwiązania, podanego przez inną osobę.

W celu ustalenia, czy osoby różniące się lokalizacją miejsca pracy różniły się także pod względem wskazywania negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 34 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 34. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)

Wskazanie	**Teren pracy**				**Wynik testu chi^2**	**Wartość p**
	Miasto		**Wieś**			
	N	**%**	**N**	**%**		
Ograniczają myślenie	0	0,00	1	2,08	0,43	0,510
Wprowadzają stresującą atmosferę na zajęciach	9	5,45	2	4,17	<0,01	>0,999
Powodują zniechęcenie do rozwiązywania zadań	21	12,73	5	10,42	0,18	0,667
Szybko się nudzą	4	2,42	1	2,08	<0,01	>0,999
Powodują dezorganizację pracy na lekcji	20	12,12	7	14,58	0,20	0,652
Angażują do pracy tylko wybraną część klasy	57	34,55	12	25,00	1,55	0,214
Inne: – *„wywołują u uczniów strach”* – *„czasami uczniowie pomimo wysiłku nie potrafią ich rozwiązać”* – *„słabsi uczniowie nie rozwiązują ich samodzielnie, tylko odpisują gotowe rozwiązanie”*	5	3,03	2	4,17	<0,01	>0,999
Nie przynoszą negatywnych skutków	80	48,48	28	58,33	1,44	0,230

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że nauczyciele różniący się lokalizacją miejsca pracy nie różnili się pod względem wskazywania negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej.

Podobnie, jak podczas wskazywania skutków pozytywnych, tak i negatywnych na poszczególne odpowiedzi respondentów nie miała wpływu lokalizacja miejsca ich pracy.

W celu ustalenia zależności pomiędzy stażem pracy badanych nauczycieli, a wskazywanymi przez nich negatywnymi skutkami rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana. Tabela 35 zawiera wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 35. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a stażem ich pracy w szkole (*N = 207*)

Wskazanie	**Staż pracy**	
	rho-Spearmana	**Wartość p**
Ograniczają myślenie	0,03	0,666
Wprowadzają stresującą atmosferę na zajęciach	0,09	0,185
Powodują zniechęcenie do rozwiązywania zadań	0,04	0,587
Szybko się nudzą	-0,03	0,635
Powodują dezorganizację pracy na lekcji	-0,08	0,229
Angażują do pracy tylko wybraną część klasy	-0,07	0,343
Inne: – *„wywołują u uczniów strach”* – *„czasami uczniowie pomimo wysiłku nie potrafią ich rozwiązać”* – *„słabsi uczniowie nie rozwiązują ich samodzielnie, tylko odpisują gotowe rozwiązanie”*	0,08	0,245
Nie przynoszą negatywnych skutków	0,05	0,442

Źródło: Badanie własne.

W tym przypadku analizy korelacji nie wykazały istotnych statystycznie związków pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej.

W celu ustalenia zależności pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 36 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 36. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)

Wskazanie	**Wykształcenie**				**Wynik testu chi^2**	**Wartość p**
	Magisterskie		**Licencjackie**			
	N	**%**	**N**	**%**		
Ograniczają myślenie	1	0,50	0	0,00	<0,01	>0,999
Wprowadzają stresującą atmosferę na zajęciach	10	4,95	0	0,00	<0,01	>0,999
Powodują zniechęcenie do rozwiązywania zadań	25	12,38	1	20,00	<0,01	>0,999
Szybko się nudzą	4	1,98	0	0,00	<0,01	>0,999
Powodują dezorganizację pracy na lekcji	25	12,38	0	0,00	0,02	0,885
Angażują do pracy tylko wybraną część klasy	63	31,19	2	40,00	<0,01	>0,999
Inne: – *„wywołują u uczniów strach”* – *„czasami uczniowie pomimo wysiłku nie potrafią ich rozwiązać”* – *„słabsi uczniowie nie rozwiązują ich samodzielnie,*	7	3,47	0	0,00	<0,01	>0,999

tylko odpisują gotowe rozwiązanie"						
Nie przynoszą negatywnych skutków	106	52,48	1	20,00	0,96	0,326

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że nauczyciele różniący się poziomem wykształcenia nie różnili się pod względem wskazywania negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej.

Badani nauczyciele wskazywali zatem poszczególne, negatywne ich zdaniem skutki stosowania zadań problemowych, niezależnie od poziomu swojego wykształcenia.

6.1.6. Znajomość metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli

Respondentów zapytano o to, jakie znają metody rozwiązywania matematycznych zadań problemowych. Tabela 37 zawiera wskazania nauczycieli. Badani mogli zaznaczyć wszystkie znane przez siebie metody.

Tabela 37. Znajomość metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli (*N = 213*)

Wskazanie	Liczebność	%
Burza mózgów	206	97
Klasyczna metoda problemowa	144	68
Inscenizacja	110	52
Drama	105	49
Metoda kruszenia	89	42
Metaplan	75	35
Metoda sześciu kapeluszy myślowych	72	34
Metoda G. Polya	67	31
Dialog sokratejski	17	8
Metoda Kartezjusza	9	4

Inne: – *„gry dydaktyczne”*	7	3

Źródło: Badanie własne.

Zgodnie z danymi zamieszczonymi w tabeli 37, największa liczba badanych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej, spośród znanych sobie metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych wskazała na metodę burzy mózgów (97%). Zalety tej metody kształcenia i jej stosunkowo łatwa adaptacja do możliwości uczniów klas początkowych sprawiają, że jest to najbardziej rozpowszechniona metoda kształcenia, często proponowana uczniom do rozwiązywania problemów z różnych obszarów edukacyjnych. Kolejnym wskazaniem była klasyczna metoda problemowa, której znajomość deklarowało 68% badanych nauczycieli. Metoda ta, będąc najstarszą, realizowana jest na całej lekcji, przez co została określona przez Czesława Kupisiewicza mianem lekcji w poszukującym toku pracy dydaktycznej.[520] Jej przebieg ma w praktyce charakter zbliżony do algorytmicznego, gdyż poszczególne jej etapy są szczegółowo określone (wyjątek stanowią etapy generowania pomysłów rozwiązania i ich ewaluacji, których ilość jest nieprzewidywalna). Dlatego też przeprowadzenie kilku takich lekcji w klasach I-III, powoduje, że uczniowie przyzwyczajają się do kolejności tych etapów i wiedzą czego one dotyczą. Nieco ponad połowa respondentów wskazała tu na inscenizację (52%). Na pierwszy rzut oka można ocenić, że nauczyciele ci nie znają podstawowego zastosowania tej metody, gdyż jej stosowanie kojarzone jest raczej z edukacją językową i przyrodniczą. Natomiast po głębszym zastanowieniu należy tym nauczycielom przyznać rację, gdyż podstawowym założeniem edukacji wczesnoszkolnej jest integrowanie celów i treści kształcenia, dlatego też matematyczne zadania problemowe mogą wiązać matematykę z innymi obszarami wiedzy. Inscenizacja może być przydatna zwłaszcza na etapie zrozumienia treści matematycznego zadania problemowego (sytuacji problemowej). Mniej niż połowa badanych nauczycieli przyznała, że znana jest im metoda dramy (49%), przez niektórych błędnie utożsamiana z metodą inscenizacji – obie metody mogą mieć podobne zastosowanie na zajęciach matematycznych. Zaledwie 42% respondentów zadeklarowało znajomość metody kruszenia. Tak niska jej znajomość przez badanych nauczycieli jest niepokojąca, gdyż jest to metoda opracowana z myślą o rozwiązywaniu matematycznych zadań. Podobna liczba

[520] Cz. Kupisiewicz: *Podstawy dydaktyki ogólnej*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1974, s. 123-129.

respondentów wskazała znajomość metod takich jak metaplan (35%), metoda sześciu kapeluszy myślowych (34%) oraz metoda G. Polya (31%). Najmniej wybieranymi odpowiedziami były znajomość metod: dialog sokratejski (8%) oraz metoda Kartezjusza (4%). Metody te są dość rzadko spotykane w warunkach szkolnego nauczania. Jednostkowe odpowiedzi (3%), dopisane przez badanych w kategorii „inne" dotyczyły rozwiązywania matematycznych zadań problemowych z wykorzystaniem gier dydaktycznych.

Jak wynika z powyższych analiz, badani nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej wykazali się znajomością różnorakich metod problemowych, przydatnych uczniom w rozwiązywaniu zadań o charakterze problemowym.

W celu sprawdzenia czy osoby różniące się lokalizacją miejsca pracy różniły się pod względem znajomości metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 38 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 38. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między znajomością metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)

Wskazanie	**Teren pracy**				**Wynik testu chi^2**	**Wartość p**
	Miasto		**Wieś**			
	N	**%**	**N**	**%**		
Burza mózgów	159	96,36	47	97,92	0,01	0,943
Dialog sokratejski	12	7,27	5	10,42	0,16	0,686
Metoda Kartezjusza	5	3,03	4	8,33	1,44	0,230
Drama	79	47,88	26	54,17	0,59	0,443
Metaplan	49	29,70	26	54,17	**9,96**	**0,002**
Metoda G. Polya	50	30,30	17	35,42	0,45	0,502
Inscenizacja	88	53,33	22	45,83	0,84	0,360
Metoda kruszenia	69	41,82	20	41,67	<0,01	0,985
Metoda sześciu kapeluszy myślowych	51	30,91	21	43,75	2,74	0,098
Klasyczna metoda problemowa	112	67,88	32	66,67	0,02	0,875
Inne: – *„gry dydaktyczne"*	3	1,82	4	8,33	3,13	0,077

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat wykazała istotne statystycznie różnice. Wykazano, że nauczyciele pracujący na terenach wiejskich częściej niż nauczyciele pracujący w miastach deklarowali znajomość metody metaplan. W tym przypadku uzyskano wartość p = 0,002, a więc p < α (α = 0,05). W pozostałych przypadkach nie wykazano istnienia statystycznych zależności.

Następnie, w celu wykazania zależności pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a znajomością poszczególnych metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana. W tabeli 39 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 39. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między znajomością metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli a stażem ich pracy w szkole (*N = 207*)

Wskazanie	Staż pracy	
	rho-Spearmana	**Wartość p**
Burza mózgów	0,08	0,258
Dialog sokratejski	-0,01	0,858
Metoda Kartezjusza	-0,04	0,612
Drama	0,03	0,695
Metaplan	-0,09	0,197
Metoda G. Polya	-0,08	0,224
Inscenizacja	0,06	0,386
Metoda kruszenia	0,00	0,965
Metoda sześciu kapeluszy myślowych	**-0,20**	**0,004**
Klasyczna metoda problemowa	0,02	0,811
Inne: – *„gry dydaktyczne”*	0,07	0,283

Źródło: Badanie własne.

Analizy korelacji wykazały, że im badani nauczyciele mieli większy staż pracy w szkole, tym rzadziej deklarowali znajomość metody sześciu kapeluszy myślowych. W tym przypadku uzyskano wartość p = 0,004, więc p < α (α = 0,05). W pozostałych przypadkach nie wykazano korelacji.

Metoda sześciu kapeluszy myślowych została w Polsce rozpropagowana poprzez wydanie dwóch monografii Edwarda de Bono. Jednej *„Sześć kapeluszy, czyli sześć sposobów myślenia”*[521] oraz drugiej *„Naucz swoje dziecko myśleć”*.[522] Pierwsza z nich ukazała się na rynku wydawniczym w 1994 roku, a druga w 1996 roku. Dopiero po upływie pewnego czasu metoda ta została zaliczona do kanonu problemowych metod kształcenia. Z tego względu nie mogła być uwzględniona w procesie kształcenia, a nawet dokształcania nauczycieli z dużym stażem pracy. Może to mieć wpływ na mniejszą znajomość metody sześciu kapeluszy myślowych przez nauczycieli posiadających dłuższy staż pracy w szkole.

W celu zbadania zależności pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a znanymi im metodami rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 40 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 40. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między znajomością metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)

Wskazanie	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Burza mózgów	195	96,53	5	100,00	<0,01	>0,999
Dialog sokratejski	16	7,92	0	0,00	<0,01	>0,999
Metoda Kartezjusza	9	4,46	0	0,00	<0,01	>0,999
Drama	100	49,50	1	20,00	0,72	0,395
Metaplan	71	35,15	2	40,00	<0,01	>0,999
Metoda G. Polya	62	30,69	4	80,00	3,43	0,064
Inscenizacja	104	51,49	3	60,00	<0,01	>0,999
Metoda kruszenia	85	42,08	2	40,00	<0,01	>0,999
Metoda sześciu kapeluszy myślowych	67	33,17	2	40,00	<0,01	>0,999
Klasyczna metoda problemowa	135	66,83	5	100,00	1,17	0,279

[521] E. de Bono: *Sześć kapeluszy, czyli sześć sposobów myślenia.* Przeł. M. Patterson. Warszawa: Wydawnictwo MEDIUM, 1996.
[522] E. de Bono: *Naucz swoje dziecko myśleć…*, 1994.

Inne: – *„gry dydaktyczne”*	7	3,47	0	0,00	<0,01	>0,999

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że osoby różniące się poziomem wykształcenia nie różniły się pod względem deklarowanych znanych sobie metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych.

Otrzymany wynik może sugerować, iż znajomość poszczególnych metod pracy z uczniami zależy nie tyle od poziomu wykształcania nauczycieli, co od ich własnej mobilizacji i determinacji w zakresie poszerzania swojej wiedzy i umiejętności.

6.1.7. Metody rozwiązywania matematycznych zadań problemowych stosowane przez badanych nauczycieli

W dalszej kolejności badanych nauczycieli zapytano o to, z jakich metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych korzystają podczas swojej pracy. W tabeli 41 są zebrano uzyskane odpowiedzi.

Tabela 41. Stosowane metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli (*N = 213*)

Wskazanie	Liczebność	%
Burza mózgów	194	91
Klasyczna metoda problemowa	107	50
Drama	96	45
Inscenizacja	82	38
Metoda kruszenia	82	38
Metoda G. Polya	56	26
Metaplan	43	20
Metoda sześciu kapeluszy myślowych	36	17
Dialog sokratejski	12	6
Inne: – *„gry dydaktyczne”*	11	5
Metoda Kartezjusza	10	4

Źródło: Badanie własne.

Znajomość metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych nie jest tożsama z ich stosowaniem, dlatego też kolejne pytanie kwestionariusza ankiety dotyczyło wskazania metod stosowanych przez badanych nauczycieli podczas pracy z uczniami. Uzyskane odpowiedzi indagowanych zamieszczone w tabeli 41 są zbliżone do wskazań opisanych w tabeli 37, zawierającej wskazania badanych dotyczące znanych im metod. Stosowanie metody burzy mózgów deklaruje 91% badanych, co oznacza, że 6% z nich metodę tę zna, ale jej nie wykorzystuje na zajęciach matematycznych. Połowa respondentów wskazała, iż pracuje z użyciem klasycznej metody problemowej (50%), zatem 18% respondentów zna ją, aczkolwiek nie stosuje jej na zajęciach. Rozbieżności wystąpiły także w przypadku stosowania pozostałych metod problemowych. I tak spośród nauczycieli biorących udział w badaniach dramę wykorzystuje 45% z nich, inscenizację oraz metodę kruszenia po 38%, metodę G. Polya 26%, metodę metaplanu 20% oraz metodę sześciu kapeluszy myślowych 17%. Najmniejszy odsetek nauczycieli wskazał, iż pracuje korzystając z dialogu sokratejskiego (6%) oraz metody Kartezjusza (4%). Spośród nauczycieli, którzy wskazali odpowiedź „*inne*” wszyscy zadeklarowali, iż korzystają z gier dydaktycznych (5%). Na podstawie udzielanych przez nauczycieli odpowiedzi można stwierdzić, iż najchętniej stosują oni w swojej pracy te metody, które są im dobrze znane oraz te, w obrębie stosowania których czują się swobodnie i pewnie.

W celu sprawdzenia, czy osoby różniące się pod względem terenu pracy różniły się także pod względem stosowanych przez siebie metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 42 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 42. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między stosowanymi metodami rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Burza mózgów	151	91,52	43	89,58	0,02	0,900
Dialog sokratejski	7	4,24	5	10,42	1,63	0,202
Metoda Kartezjusza	4	2,42	6	12,50	**6,33**	**0,012**
Drama	73	44,24	23	47,92	0,20	0,653
Metaplan	26	15,76	17	35,42	**8,92**	**0,003**
Metoda G. Polya	38	23,03	18	37,50	**4,02**	**0,045**
Inscenizacja	61	36,97	21	43,75	0,72	0,395
Metoda kruszenia	61	36,97	21	43,75	0,72	0,395
Metoda sześciu kapeluszy myślowych	23	13,94	13	27,08	**4,57**	**0,032**
Klasyczna metoda problemowa	81	49,09	26	54,17	0,38	0,536
Inne: – *„gry dydaktyczne”*	8	4,85	3	6,25	<0,01	0,988

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat wykazała istotne statystycznie różnice. Jak wykazano, nauczyciele pracujący na terenach wiejskich częściej niż nauczyciele pracujący na terenach miejskich deklarowali stosowanie metod takich jak metoda Kartezjusza – uzyskano wartość $p = 0{,}012$, więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$), metoda metaplanu – uzyskano wartość $p = 0{,}003$, więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$), metoda G. Polya, w tym przypadku uzyskano wartość $p = 0{,}045$, a więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$) oraz metoda sześciu kapeluszy myślowych – uzyskano wartość $p = 0{,}032$, więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$).

Otrzymane wyniki wskazują na to, iż badani nauczyciele pracujący w szkołach wiejskich chętniej niż nauczyciele pracujący w miastach stosują różnego rodzaju metody rozwiązywania matematycznych zadań problemowych. W pozostałych przypadkach nie wykazano istotnych statystycznie związków.

W celu ustalenia zależności pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a deklarowanymi przez nich stosowanymi metodami rozwiązywania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych, przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana. W tabeli 43 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 43. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między stosowanymi metodami rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli a lokalizacją stażem ich pracy w szkole (*N = 207*)

Wskazanie	Staż pracy	
	rho-Spearmana	**Wartość p**
Burza mózgów	-0,05	0,497
Dialog sokratejski	0,05	0,514
Metoda Kartezjusza	0,10	0,161
Drama	-0,02	0,814
Metaplan	0,00	0,984
Metoda G. Polya	0,02	0,779
Inscenizacja	**0,15**	**0,030**
Metoda kruszenia	0,08	0,224
Metoda sześciu kapeluszy myślowych	-0,08	0,266
Klasyczna metoda problemowa	-0,01	0,896
Inne: – *„gry dydaktyczne”*	0,10	0,141

Źródło: Badanie własne.

Przeprowadzone analizy korelacji wykazały, że im badani nauczyciele posiadali większy staż pracy w szkole, tym częściej stosowali metodę inscenizacji podczas rozwiązywania matematycznych zadań problemowych na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej. W tym przypadku uzyskano wartość $p = 0,030$, więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$). W pozostałych przypadkach nie wykazano istotnych statystycznie korelacji.

Otrzymany wynik może sugerować, iż dłuższy staż pracy w szkole może wpływać na większą otwartość nauczycieli w zakresie stosowania poszczególnych metod rozwiązywania zadań problemowych.

W celu ustalenia, czy osoby różniące się poziomem wykształcenia różniły się pod względem stosowanych przez siebie metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 44 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 44. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między stosowanymi metodami rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)

Wskazanie	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Burza mózgów	183	90,59	5	100,00	<0,01	>0,999
Dialog sokratejski	12	5,94	0	0,00	<0,01	>0,999
Metoda Kartezjusza	10	4,95	0	0,00	<0,01	>0,999
Drama	92	45,54	2	40,00	<0,01	>0,999
Metaplan	42	20,79	1	20,00	<0,01	>0,999
Metoda G. Polya	52	25,74	2	40,00	0,04	0,840
Inscenizacja	78	38,61	2	40,00	<0,01	>0,999
Metoda kruszenia	80	39,60	2	40,00	<0,01	>0,999
Metoda sześciu kapeluszy myślowych	34	16,83	1	20,00	<0,01	>0,999
Klasyczna metoda problemowa	100	49,50	3	60,00	<0,01	0,991
Inne: – *„gry dydaktyczne”*	10	4,95	1	20,00	0,22	0,636

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a stosowaniem przez nich metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych.

Kolejny podrozdział pracy dotyczy opinii badanych nauczycieli na temat heurystycznej metody G. Polya.

6.2. Opinie badanych nauczycieli na temat heurystycznej metody G. Polya

Druga część kwestionariusza ankiety, o którego wypełnienie zostali poproszeni nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej uczestniczący w badaniach sondażowych dotyczyła ich opinii na temat heurystycznej metody G. Polya oraz możliwości jej zastosowania w rozwiązywaniu matematycznych zadań problemowych w pracy z uczniami w wieku wczesnoszkolnym.

6.2.1. Znajomość metody G. Polya przez badanych nauczycieli

Badanych nauczycieli zapytano o to, czy znają metodę G. Polya. W tabeli 45 zebrano uzyskane na ten temat dane.

Tabela 45. Znajomość metody G. Polya przez badanych nauczycieli (*N* = 213)

Udzielona odpowiedź	Liczba	%
Tak	79	37
Nie	132	62
Brak danych	2	1
Razem	213	100

Źródło: Badanie własne.

Znajomości metody G. Polya zadeklarowało 37% spośród wszystkich badanych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej. Można zatem wykazać pewien brak konsekwencji w wypełnianiu przez nich narzędzia badawczego, gdyż zgodnie z danymi zaprezentowanymi w tabeli 37, znajomość tę początkowo deklarowało 31% nauczycieli biorących udział w badaniu. Powodem tego stanu rzeczy jest prawdopodobnie to, iż w drugiej części narzędzia badawczego znajdowały się pytania dotyczące wyłącznie tej metody, a w kafeterii odpowiedzi znajdowały się szczegółowe informacje dotyczące opracowanej przez G. Polya procedury rozwiązywania matematycznych zadań problemowych. Nauczyciele, po zapoznaniu się z tą częścią kwestionariusza ankiety mogli przypomnieć sobie procedurę jej stosowania i w efekcie zaznaczyć, że metodę znają. Pozostała część badanych (62%) uznała, iż nie zna metody G. Polya.

W celu sprawdzenia, czy osoby różniące się lokalizacją miejsca pracy różniły się pod względem posiadania wiedzy o metodzie G. Polya przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 46 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 46. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między znajomością metody G. Polya przez badanych nauczycieli a lokalizacją miejsca ich pracy (*N* = 213)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Tak	58	35,00	21	43,75	1,06	0,304
Nie	107	65,00	27	56,25		
Razem	165	100	48	100		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie zależności pomiędzy lokalizacją miejsca pracy badanych nauczycieli a posiadania przez nich wiedzy o metodzie G. Polya. Znajomość heurystycznej metody G. Polya nie jest związana z terenem pracy badanych nauczycieli.

W celu wykazania zależności pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a posiadaniem przez nich wiedzy o metodzie G. Polya przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana. W tabeli 47 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 47. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między znajomością metody G. Polya przez badanych nauczycieli a stażem ich pracy w szkole (*N* = 207)

Zmienne	Staż pracy	
	rho-Spearmana	Wartość p
Posiadanie wiedzy o metodzie G. Polya	-0,03	0,676

Źródło: Badanie własne.

Analizy korelacji nie wykazały istotnych statystycznie związków pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a posiadaniem przez nich wiedzy o metodzie G. Polya. Pierwsze opracowania prac G. Polya dotyczących rozwiązywania matematycznych zadań zostały opublikowane w języku polskim w latach sześćdziesiątych ubiegłego stulecia. Dlatego też, zarówno młodsi stażem nauczyciele, jak i badani nauczyciele posiadający największy staż pracy w szkole mieli taką samą możliwość zapoznania się z założeniami metody.

W celu sprawdzenia, czy osoby różniące się poziomem wykształcenia różniły się pod względem posiadania wiedzy na temat metody G. Polya przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 48 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 48. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między znajomością metody G. Polya przez badanych nauczycieli a poziomem ich wykształcenia (*N* = 207)

Posiadanie wiedzy o metodzie G. Polya	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Tak	76	38,00	3	60,00	0,32	0,571
Nie	126	62,00	2	40,00		
Razem	202	100	5	100		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy poziomem wykształcenia nauczycieli a posiadaniem przez nich wiedzy o metodzie G. Polya.

Otrzymane wyniki badań sondażowych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej wskazują, iż zmienne takie jak lokalizacja miejsca pracy, staż pracy w szkole oraz poziom wykształcenia badanych nauczycieli nie warunkują posiadania przez nich wiedzy na temat heurystycznej metody G. Polya.

Dalsza analiza opinii nauczycieli na temat metody G. Polya oparta została o dane uzyskane z kwestionariuszy ankiet jedynie tych nauczycieli, którzy deklarowali znajomość metody. W konsekwencji liczba badanych nauczycieli ograniczyła się tu do 79 osób, co stanowi 37% wszystkich nauczycieli uczestniczących w badaniach. W związku z powyższym przedstawione w dalszej części pracy analizy oparte zostały o próbę 79 nauczycieli.

Nauczycieli, którzy znali metodę G. Polya, zapytano o to, jakie są ich zdaniem najważniejsze jej cechy. Zadaniem respondentów było wskazanie tych zdań, które ich zdaniem określały metodę G. Polya. Istniała możliwość zaznaczenia więcej niż jednej odpowiedzi. Tabela 49 zawiera wskazania respondentów.

Tabela 49. Stwierdzenia charakteryzujące metodę G. Polya wskazane przez badanych nauczycieli znających metodę G. Polya (*N* = 79)

Wskazanie	Liczba	%
Metoda ta może być stosowana na etapie edukacji wczesnoszkolnej	68	86
Jest to metoda heurystyczna	63	80
Metoda ta opisuje kolejne etapy rozwiązywania zadań	53	67
Można ją stosować przy rozwiązywaniu każdego zadania matematycznego	39	50
Metoda ta nie jest popularna w polskiej szkole	26	33
Metoda ta jest popularna w polskiej szkole	25	32
Jest to metoda algorytmiczna	12	15
Razem	286	363

Źródło: Badanie własne.

Wśród ankietowanych nauczycieli znających metodą G. Polya większość (86%) uważa, iż metodę tę można z powodzeniem stosować na etapie edukacji wczesnoszkolnej. Nieco mniejsza liczba indagowanych (80%) słusznie zakwalifikowała ją do metod heurystycznych. Jednocześnie 15% badanych nauczycieli błędnie określiło metodę jako algorytmiczną. Ci ankietowani mogą błędnie postrzegać ustaloną kolejność wykonywania etapów rozwiązywania zadań zaproponowaną przez G. Polya jako postępowanie algorytmiczne. Dla 67% badanych metoda G. Polya opisuje kolejne etapy pracy związanej z rozwiązywaniem matematycznych zadań problemowych. W istocie jest to cecha charakterystyczna dla tej metody. Połowa badanych nauczycieli twierdzi, że z zastosowaniem metody G. Polya można rozwiązać każde zadanie matematyczne. Zatem w ich przekonaniu, metoda ta ma charakter uniwersalny. Porównywalna liczba respondentów ma całkowicie odmienne zdanie na temat opisywanej metody, gdyż 33% respondentów uważa, iż jest ona popularna w polskiej szkole, a 32% respondentów uważa, że jest odwrotnie. Tak różne opinie dotyczące metody G. Polya nie sprzyjają jej szerokiemu stosowaniu w praktyce edukacyjnej, dlatego też wiedza na jej temat powinna być elementem zarówno kształcenia, jak i dokształcania nauczycieli.

W celu sprawdzenia, czy badani nauczyciele różniący się lokalizacją miejsca pracy różnili się pod względem wskazywania zdań dotyczących metody G. Polya przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 50 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 50. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między stwierdzeniami charakteryzującymi metodę G. Polya zdaniem badanych nauczycieli znających metodę G. Polya a lokalizacją miejsca ich pracy ($N = 79$)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Jest to metoda algorytmiczna	7	12,07	5	23,81	0,86	0,353
Jest to metoda heurystyczna	46	79,31	17	80,95	<0,01	>0,999
Metoda ta opisuje krok po kroku postępowanie w procesie rozwiązywania zadań	41	70,69	12	57,14	1,28	0,258
Można ją stosować przy rozwiązywaniu każdego zadania matematycznego	26	44,83	13	61,90	1,80	0,180
Metoda ta jest popularna w polskiej szkole	16	27,59	9	42,86	1,66	0,197
Metoda ta nie jest popularna w polskiej szkole	19	32,76	7	33,33	<0,01	0,962
Metoda ta może być stosowana na etapie zintegrowanej edukacji wczesnoszkolnej	50	86,21	18	85,71	<0,01	0,955

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic. Oznacza to, że nauczyciele różniący się lokalizacją miejsca pracy nie różnili się pod względem wskazywania określeń opisujących ich zdaniem heurystyczną metodę G. Polya.

W celu ukazania zależności pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich określeń opisujących metodę G. Polya przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana. W tabeli 51 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 51. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między stwierdzeniami charakteryzującymi metodę G. Polya zdaniem badanych nauczycieli znających metodę G. Polya a stażem ich pracy w szkole (*N* = 79)

Wskazanie	Staż pracy	
	rho-Spearmana	Wartość p
Jest to metoda algorytmiczna	0,17	0,145
Jest to metoda heurystyczna	-0,12	0,291
Metoda ta opisuje krok po kroku postępowanie w procesie rozwiązywania zadań	0,13	0,252
Można ją stosować przy rozwiązywaniu każdego zadania matematycznego	0,11	0,349
Metoda ta jest popularna w polskiej szkole	0,05	0,648
Metoda ta nie jest popularna w polskiej szkole	-0,21	0,070
Metoda ta może być stosowana na etapie zintegrowanej edukacji wczesnoszkolnej	-0,04	0,737

Źródło: Badanie własne.

Analizy korelacji nie wykazały istotnych statystycznie związków pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a wskazaniem przez nich określeń dotyczących metody G. Polya.

W celu zbadania, czy osoby różniące się poziomem wykształcenia różniły się pod względem wskazywania określeń dotyczących ich zdaniem metody G. Polya przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 52 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 52. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między stwierdzeniami charakteryzującymi metodę G. Polya zdaniem badanych nauczycieli znających metodę G. Polya a poziomem ich wykształcenia (*N* = 79)

Wskazanie	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Jest to metoda algorytmiczna	10	13,33	1	33,33	0,02	0,896
Jest to metoda heurystyczna	59	78,67	3	100,00	0,03	0,866
Metoda ta opisuje krok po kroku postępowanie w procesie rozwiązywania zadań	51	68,00	1	33,33	0,39	0,532

Można ją stosować przy rozwiązywaniu każdego zadania matematycznego	37	49,33	1	33,33	<0,01	>0,999
Metoda ta jest popularna w polskiej szkole	24	32,00	1	33,33	<0,01	>0,999
Metoda ta nie jest popularna w polskiej szkole	25	33,33	1	33,33	<0,01	>0,999
Metoda ta może być stosowana na etapie zintegrowanej edukacji wczesnoszkolnej	64	85,33	3	100,00	<0,01	>0,999

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy poziomem wykształcenia nauczycieli a wskazywanymi przez nich określeniami opisującymi metodę G. Polya.

Zaprezentowane wyniki badań wskazują, że zmienne takiej jak lokalizacja miejsca pracy, staż pracy w szkole oraz poziom wykształcenia nie wpływają na wskazania badanych nauczycieli dotyczące określeń ich zdaniem opisujących heurystyczną metodę G. Polya.

6.2.2. Stosowanie metody G. Polya przez badanych nauczycieli

Nauczyciele, którzy znali metodę G. Polya zostali poproszeni o udzielenie odpowiedzi na temat częstotliwości jej stosowania podczas swojej pracy z uczniami. Tabela 53 zawiera wskazania indagowanych.

Tabela 53. Częstotliwość stosowania metody G. Polya przez badanych nauczycieli znających metodę G. Polya (*N* = 79)

Wskazanie	Liczebność	%
Co najmniej raz w tygodniu	31	40
Kilka razy w miesiącu	26	32
Kilka razy w semestrze	17	22
1-2 razy w roku szkolnym	3	4
Nie stosuję	1	1
Brak danych	1	1
Razem	79	100

Źródło: Badanie własne.

Mając na względzie wskazania badanych nauczycieli dotyczące wielości i różnorodności metod przez nich stosowanych w rozwiązywaniu matematycznych zadań problemowych podczas pracy z uczniami (tabela 41), deklarowane wykorzystywanie metody G. Polya przez 40% badanych co najmniej raz w tygodniu oraz przez 32% respondentów kilka razy w miesiącu należy ocenić jako postępowanie właściwe. Kilka razy w semestrze, a co za tym idzie kilka razy w ciągu całego roku szkolnego, wykorzystywanie metody deklaruje 22% badanych. Maksymalnie raz lub dwa razy w roku szkolnym z metody G. Polya korzysta 4% respondentów. Jedna osoba przyznała, że wcale nie wykorzystuje metody G. Polya podczas swojej pracy z uczniami. Od jednej osoby nie udało się uzyskać informacji na powyższy temat. Stosowanie jakiejkolwiek metody kształcenia wyłącznie kilka razy w semestrze lub raz w roku szkolnym jest nieporozumieniem, gdyż każda z metod ma swoje zasady, których przestrzeganie jest konieczne do prawidłowego ich przebiegu. Może to skutkować dwoma sytuacjami dydaktycznymi. Albo uczniowie nie stosują ze zrozumieniem zasad postępowania, gdyż zwyczajnie ich nie pamiętają, albo też nauczyciele są zmuszeni do każdorazowego ich przypominania lub też uczenia ich od nowa.

W celu sprawdzenia, czy osoby różniące się lokalizacją miejsca pracy różniły się pod względem częstotliwości stosowania metody G. Polya podczas prowadzonych przez siebie zajęć z zakresu edukacji matematycznej przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 54 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 54. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między częstotliwością stosowania metody G. Polya przez badanych nauczycieli znających metodę G. Polya a lokalizacją miejsca ich pracy (*N* = 79)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Co najmniej raz w tygodniu	22	38,00	9	42,86	8,15	0,057
Kilka razy w miesiącu	15	26,00	11	52,38		
Kilka razy w semestrze	16	28,00	1	4,76		
1-2 razy w roku szkolnym	3	6,00	0	0,00		
Nie stosuję	1	1,00	0	0,00		
Brak danych	1	1,00	0	0,00		
Razem	58	100	21	100		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy lokalizacją miejsca pracy badanych nauczycieli a częstością stosowania przez nich metody G. Polya w pracy z uczniami w ramach zajęć z zakresu edukacji matematycznej. Częstotliwość stosowania heurystycznej metody G. Polya nie zależy zatem od tego, czy nauczyciele pracują w szkolne na terenach wiejskich, czy też miejskich.

W celu ukazania zależności pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a częstotliwością stosowania przez nich metody G. Polya w pracy z uczniami w ramach zajęć z zakresu edukacji matematycznej przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana. W tabeli 55 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 55. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między częstotliwością stosowania metody G. Polya przez badanych nauczycieli znających metodę G. Polya a stażem ich pracy w szkole (*N* = 79)

Zmienna	Staż pracy	
	rho-Spearmana	**Wartość p**
Częstość stosowania metody G. Polya w pracy z uczniami w ramach zajęć z zakresu edukacji matematycznej	**-0,24**	**0,039**

Źródło: Badanie własne.

Analizy korelacji wykazały istotne statystycznie zależności – im badani nauczyciele posiadali mniejszy staż pracy w szkole tym częściej stosowali metodę G. Polya w pracy ze swoimi uczniami w ramach zajęć z zakresu edukacji matematycznej. W tym przypadku uzyskano wartość $p = 0,039$, a więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$).

Ten wynik świadczy o tym, iż mniej doświadczeni nauczyciele są bardziej otwarci na wykorzystywanie w swojej pracy z uczniami różnorodnych metod kształcenia.

W celu sprawdzenia, czy respondenci różniący się poziomem wykształcenia różnili się pod względem częstotliwości stosowania metody G. Polya w pracy z uczniami w ramach zajęć z zakresu edukacji matematycznej przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 56 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 56. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między częstotliwością stosowania metody G. Polya przez badanych nauczycieli znających metodę G. Polya a poziomem ich wykształcenia (*N* = 79)

Wskazanie	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Co najmniej raz w tygodniu	30	39,00	1	33,33	**9,47**	**0,034**
Kilka razy w miesiącu	26	35,00	0	0,00		
Kilka razy w semestrze	16	22,00	1	33,33		
1-2 razy w roku szkolnym	3	3,00	0	0,00		
Nie stosuję	0	0,00	1	33,33		
Brak danych	1	1,00	0	0		
Razem	76	100	3	100		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat wykazała istotne statystycznie różnice pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a częstotliwością stosowania przez nich metody G. Polya. Oznacza to, że badani nauczyciele posiadający wykształcenie wyższe magisterskie częściej stosowali metodę G. Polya w pracy ze swoimi uczniami w ramach zajęć z zakresu edukacji matematycznej niż nauczyciele z wykształceniem licencjackim – uzyskano wartość $p = 0,034$, więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$).

Wynik ten świadczyć może o tym, iż być może w trakcie kształcenia akademickiego nauczycieli, heurystyczna metoda G. Polya jest omawiana dopiero na etapie studiów magisterskich. Należy zatem zwiększyć świadomość nauczycieli akademickich, co do konieczności omawiania różnorakich metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, w tym opisywanej metody G. Polya, już podczas studiów pierwszego stopnia w ramach przedmiotu metodyka edukacji matematycznej.

Nauczycieli poproszono, by wskazali, w której klasie najczęściej wykorzystują metodę G. Polya podczas pracy ze swoimi uczniami. W tabeli 57 znajdują się odpowiedzi badanych nauczycieli.

Tabela 57. Klasa, w której badani nauczyciele znający metodę G. Polya pracują z wykorzystaniem metody G. Polya (*N* = 79)

Wskazanie	Liczebność	%
W klasach I-III	54	70
W klasach II i III	18	22
Tylko w klasie trzecich	4	5
Tylko w klasie II	1	1
Tylko w klasie I	0	0
Nie stosuję	1	1
Brak danych	1	1
Razem	79	100

Źródło: Badanie własne.

Można zakładać, że stosowanie metody tak uwarunkowanej jak heurystyczna metoda G. Polya częściej nastąpi w klasach starszych niż młodszych ze względu na poziom rozwoju uczniów i ich kompetencji matematycznych. Jednakże otrzymane wyniki badań wykluczyły to założenie. Aż 70% badanych nauczycieli nie uzależnia stosowania metody G. Polya od klasy, w której prowadzi zajęcia matematyczne. W pewnym stopniu różnicuje to 22% nauczycieli biorących udział w badaniu, stosując tę metodę wyłącznie w klasach drugich i trzecich. Pojedynczy nauczyciele deklarowali, iż stosują metodę wybiórczo, tylko w klasie II (1%) lub tylko w klasie trzeciej (5%). Jeden nauczyciel przyznał, że pomimo znajomości metody G. Polya nie stosuje jej w swojej pracy z uczniami.

W celu sprawdzenia, czy osoby różniące się lokalizacją miejsca pracy różniły się pod względem deklarowanej klasy, w której stosują metodę G. Polya w pracy z uczniami w ramach zajęć z zakresu edukacji matematycznej przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 58 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 58. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między klasą, w której badani nauczyciele znający metodę G. Polya pracują z wykorzystaniem metody G. Polya a lokalizacją miejsca ich pracy (*N* = 79)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Tylko w klasie I	0	0,00	0	0,00	3,13	0,587
Tylko w klasie II	0	0,00	1	4,76		
Tylko w klasie trzecich	3	5,00	1	4,76		
W klasach I-III	39	68,50	15	71,43		
W klasach II i III	14	24,50	4	19,05		
Nie stosuję	1	1,00	0	0,00		
Brak danych	1	1,00	0	0,00		
Razem	58	100	21	100		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy terenem pracy badanych nauczycieli (miasto/wieś) a deklaracjami dotyczącymi stosowania metody G. Polya w pracy ze swoimi uczniami w ramach zajęć z zakresu edukacji matematycznej.

W celu sprawdzenia, czy badani różniący się klasą, w której stosują metodę G. Polya różnią się pod względem stażu pracy w szkole przeprowadzono analizę testem Kruskala-Wallisa. W tabeli 59 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 59. Wartość testu Kruskala-Wallisa dla zależności między klasą, w której badani nauczyciele znający metodę G. Polya pracują z wykorzystaniem metody G. Polya a stażem ich pracy w szkole ($N = 79$)

Zmienna	Wskazanie	Liczebność	Średnia ranga	Wynik testu K-W	Wartość p
Staż pracy	Tylko w klasie II	1	43,50	8,01	0,091
	Tylko w klasie trzecich	4	43,50		
	W klasach I-III	54	37,76		
	W klasach II i III	18	39,21		
	Nie stosuję	1	2,50		
	Brak danych	1	2,50		
Razem		79			

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem Kruskala-Wallisa nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a klasą, w której stosują oni metodę G. Polya podczas pracy z uczniami w ramach zajęć matematycznych.

W celu sprawdzenia czy nauczyciele różniący się poziomem wykształcenia różnili się pod względem klasy, w której deklarowali stosowanie metody G. Polya w pracy ze swoimi uczniami w ramach zajęć z zakresu edukacji matematycznej przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 60 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 60. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między klasą, w której badani nauczyciele znający metodę G. Polya pracują z wykorzystaniem metody G. Polya a poziomem ich wykształcenia (*N* = 79)

Wskazanie	**Wykształcenie**				**Wynik testu chi^2**	**Wartość p**
	Magisterskie		**Licencjackie**			
	N	**%**	**N**	**%**		
Tylko w klasie I	0	0,00	0	0,00	10,56	0,066
Tylko w klasie II	1	1,00	0	0,00		
Tylko w klasie trzecich	4	5,00	0	0,00		
W klasach I-III	53	70,50	1	33,33		
W klasach II i III	17	22,50	1	33,33		
Nie stosuję	0	0,00	1	33,33		
Brak danych	1	1,00	0	0		
Razem	76	100	3	100		

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a klasą, w której deklarowali oni stosowanie heurystycznej metody G. Polya w pracy ze swoimi uczniami w ramach zajęć z zakresu edukacji matematycznej.

Jak wykazały badania, zarówno lokalizacja miejsca pracy, jak i staż pracy w szkole oraz poziom wykształcenia badanych nauczycieli nie wpływają na stosowanie przez nich heurystycznej metody G. Polya w pracy z uczniami w poszczególnych klasach edukacji początkowej.

6.2.3. Umiejętności, jakie można rozwijać z wykorzystaniem metody G. Polya w opiniach badanych nauczycieli

Nauczycieli poproszono o próbę wskazania, jakie ich zdaniem umiejętności mogą być rozwijane poprzez stosowanie heurystycznej metody G. Polya podczas zajęć matematycznych w pracy z młodszymi uczniami. Tabela 61 zawiera wskazania respondentów.

Tabela 61. Opinie badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat umiejętności, jakie mogą być kształtowane na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya (*N = 79*)

Wskazanie	Liczba wskazań	%
Umiejętność twórczego myślenia	62	78
Umiejętność samodzielnego myślenia	60	76
Umiejętność samodzielnego wyboru sposobu rozwiązania problemu	50	63
Wytrwałość w dążeniu do wyznaczonego celu	47	59
Umiejętność pracy w grupach	42	53
Umiejętność krytycznego myślenia	28	35
Umiejętność przyjęcia porażki	18	23

Źródło: Badanie własne.

Z opiniami na temat korzyści uzyskiwanych zarówno przez uczniów, jak i nauczycieli, a związanych z rozwiązywaniem matematycznych zadań problemowych z wykorzystaniem metody G. Polya (opisanych w tabelach 65 oraz 69) wiązać należy także opinie dotyczące umiejętności, które mogą być kształtowane podczas pracy tą metodą (tabela 61). Zdaniem największej grupy respondentów (78%) stosowanie metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej rozwija umiejętność twórczego myślenia oraz umiejętność samodzielnego myślenia (76%). W opinii 63% badanych stosowanie metody G. Polya rozwija u uczniów umiejętność samodzielnego wyboru sposobu rozwiązania matematycznego problemu, a 59% ankietowanych zaznaczyło, iż dzięki pracy tą metodą uczniowie trenują wytrwałość w dążeniu do wyznaczonego celu oraz ćwiczą umiejętność pracy w grupach (53%). Ponad jedna trzecia badanych jest zdania, że dzięki metodzie G. Polya wzrasta u uczniów umiejętność krytycznego myślenia. Badani nauczyciele uznali także, iż stosowanie metody G. Polya wpływa pozytywnie na umiejętność przyjęcia przez uczniów porażki (23%).

W celu sprawdzenia czy osoby różniące się lokalizacją miejsca pracy różniły się pod względem wskazania umiejętności, które ich zdaniem mogą być kształtowane na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 62 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 62. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat umiejętności, jakie mogą być kształtowane na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 79*)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Umiejętność samodzielnego myślenia	40	68,97	20	95,24	**5,83**	**0,016**
Umiejętność krytycznego myślenia	21	36,21	7	33,33	0,06	0,814
Umiejętność twórczego myślenia	46	79,31	16	76,19	<0,01	>0,999
Umiejętność pracy w grupach	28	48,28	14	66,67	2,09	0,148
Umiejętność samodzielnego wyboru sposobu rozwiązania problemu	35	60,34	15	71,43	0,81	0,367
Umiejętność przyjęcia porażki	13	22,41	5	23,81	<0,01	>0,999
Wytrwałość w dążeniu do wyznaczonego celu	37	63,79	10	47,62	1,67	0,196

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat wykazała istotne statystycznie różnice pomiędzy lokalizacją miejsca pracy badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich umiejętności, które mogą być kształtowane na zajęciach matematycznych wykorzystujących metodę G. Polya. Wykazano, że badani nauczyciele pracujący na terenach wiejskich częściej niż nauczyciele pracujący w miastach wskazywali, że ich zdaniem umiejętność samodzielnego myślenia może być kształtowana na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya. W tym przypadku uzyskano wartość $p = 0,016$, więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$).W pozostałych przypadkach nie wykazano zależności.

W celu zbadania zależności pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich tych umiejętności, które ich zdaniem mogą być kształtowane na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana. W tabeli 63 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 63. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat umiejętności, jakie mogą być kształtowane na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya a stażem ich pracy w szkole (*N = 79*)

Wskazanie	Staż pracy	
	rho-Spearmana	**Wartość p**
Umiejętność samodzielnego myślenia	0,04	0,763
Umiejętność krytycznego myślenia	0,06	0,616
Umiejętność twórczego myślenia	0,08	0,509
Umiejętność pracy w grupach	0,01	0,919
Umiejętność samodzielnego wyboru sposobu rozwiązania problemu	0,06	0,603
Umiejętność przyjęcia porażki	-0,16	0,174
Wytrwałość w dążeniu do wyznaczonego celu	0,02	0,837

Źródło: Badanie własne.

Analizy korelacji nie wykazały istotnych statystycznie związków pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a wskazywanymi przez nich umiejętnościami, które mogą być ich zdaniem kształtowane na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya.

W celu ustalenia, czy osoby różniące się poziomem wykształcenia różniły się pod względem wskazywania tych umiejętności, które ich zdaniem mogą być kształtowane na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya, przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 64 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 64. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat umiejętności, jakie mogą być kształtowane na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya a poziomem ich wykształcenia (*N = 79*)

Wskazanie	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Umiejętność samodzielnego myślenia	57	76,00	2	66,67	<0,01	>0,999
Umiejętność krytycznego myślenia	27	36,00	1	33,33	<0,01	>0,999
Umiejętność twórczego myślenia	58	77,33	3	100,00	0,05	0,826
Umiejętność pracy w grupach	39	52,00	2	66,67	<0,01	>0,999
Umiejętność samodzielnego wyboru sposobu rozwiązania problemu	47	62,67	2	66,67	<0,01	>0,999
Umiejętność przyjęcia porażki	17	22,67	1	33,33	<0,01	>0,999
Wytrwałość w dążeniu do wyznaczonego celu	45	60,00	1	33,33	0,10	0,747

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich umiejętności, które ich zdaniem mogą być kształtowane na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya.

Podobnie jak w przypadku stażu pracy w szkole, tak i w przypadku poziomu wykształcenia, nauczyciele wskazują na te same umiejętności, które ich zdaniem mogą być rozwijane z wykorzystaniem metody G. Polya. Zmienne te nie różnicują zatem opinii indagowanych w badanym zakresie.

6.2.4. Pozytywne skutki stosowania metody G. Polya podczas zajęć matematycznych w opiniach badanych nauczycieli

Nauczyciele, którzy deklarowali znajomość metody G. Polya zostali poproszeni o wskazanie, jakie są ich zdaniem pozytywne skutki stosowania tej metody podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów. Tabela 65 zawiera wskazania nauczycieli. Nauczyciele mogli zaznaczyć kilka odpowiedzi, wybierając je z podanych wskazań. Mogli także dopisać własne propozycje.

Tabela 65. Opinie badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów (*N = 79*)

Wskazanie	Liczebność	%
Powoduje rozwój myślenia	74	94
Przyczynia się do wzrostu samodzielności uczniów podczas rozwiązywania zadań	65	82
Kształtuje twórcze podejście do zadań matematycznych	62	78
Kształtuje umiejętność samodzielnego radzenia sobie z problemem	55	70
Powoduje wzrost wiary we własne siły uczniów	41	52
Motywuje do pracy	37	47
Powoduje wzrost zaangażowania uczniów	37	47
Inne: – *„pozwala odkrywać uczniom ich potencjał”* – *„uczniowie ją lubią”*	3	4
Nie ma pozytywnych skutków	0	0

Źródło: Badanie własne.

Wszyscy badani nauczyciele, znający metodę G. Polya wymienili jedną lub kilka zalet jej stosowania. Największa grupa z nich za zaletę uznała rozwijanie myślenia uczniów (94%). Rozwiązywanie każdego z zadań problemowych, niezależnie od ich dywergencyjnego, czy konwergencyjnego charakteru wymaga myślenia uczniów wykraczającego poza dotychczas stosowane przez nich schematy. Zatem traktowanie przez nauczycieli procedury proponowanej przez G. Polya, jako rozwijającej proces myślenia uczniów jest słuszne, jednak należy przy tym pamiętać, jak już wspomniano wcześniej, poziomu rozwoju tego myślenia nauczyciele nie są w stanie zmierzyć. Duża grupa nauczycieli uznała również, iż dzięki metodzie G. Polya wzrasta samodzielność uczniów podczas rozwiązywania matematycznych zadań (82%). Stwierdzenie to jest słuszne zarówno w odniesieniu do metody G. Polya, jak i dla każdej innej metody problemowej, w przypadku rozwiązywania przez uczniów zadań indywidualnie. W przypadku rozwiązywania ich w grupach, bądź całym zespołem klasowym, może się tak zdarzyć, iż część uczniów będzie wykorzystywać wysiłek intelektualny koleżanek i kolegów, nie przyczyniając się do sukcesu pozostałych członków grupy lub zespołu i tym samym nie ucząc się samodzielności. Z odpowiedzią, którą wybrało najwięcej indagowanych, czyli rozwojem myślenia, wiązać można odpowiedź wybraną przez 78% respondentów, a związaną z kształtowaniem twórczego podejścia do rozwiązywania zadań problemowych dzięki stosowaniu metody G. Polya. Duża grupa badanych uznała także, iż dzięki metodzie tej uczniowie nabierają umiejętności samodzielnego radzenia sobie z problemem (70%), co z kolei koresponduje z wcześniejszym wskazaniem odpowiedzi dotyczącej wzrostu samodzielności uczniów w swych działaniach. Zdaniem nauczycieli metoda G. Polya oddziałuje także na sferę motywacji do uczenia się matematyki. Nieco ponad połowa respondentów uważa, że dzięki metodzie G. Polya u uczniów wzrasta wiara we własne siły i możliwości (52%), a ponadto 47% badanych uznaje, że dzięki jej stosowaniu wzrasta motywacja uczniów do pracy podczas zajęć matematycznych. Z motywacją uczniów wiązana może być także odpowiedź, którą zaznaczyło tyle samo badanych, mówiąca o tym, iż metoda G. Polya przyczynia się do wzrostu zaangażowania uczniów w proces rozwiązywania matematycznych zadań. Trzech indagowanych (4%) uzupełniając kategorię „inne" dodało, iż metoda G. Polya jest lubiana przez uczniów oraz, że pozwala ona poznać uczniom ich własny potencjał. Wszystkie uzyskane odpowiedzi wskazują, iż respondenci potrafią wskazać wiele pozytywnych walorów stosowania metody G. Polya w pracy z uczniami w młodszym wieku szkolnym.

W celu sprawdzenia, czy osoby różniące się lokalizacją miejsca pracy różniły się pod względem wskazywania ich zdaniem pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya w odniesieniu do uczniów przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 66 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 66. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 79*)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Powoduje rozwój myślenia	53	91,38	21	100,00	0,75	0,386
Przyczynia się do wzrostu samodzielności uczniów podczas rozwiązywania zadań	50	86,21	15	71,43	1,41	0,236
Kształtuje twórcze podejście do zadań matematycznych	42	72,41	20	95,24	3,50	0,061
Kształtuje umiejętność samodzielnego radzenia sobie z problemem	42	72,41	13	61,90	0,80	0,370
Motywuje do pracy	25	43,10	12	57,14	1,22	0,269
Powoduje wzrost wiary we własne siły uczniów	29	50,00	12	57,14	0,31	0,575
Powoduje wzrost zaangażowania uczniów	28	48,28	9	42,86	0,18	0,670
Inne: – *„pozwala odkrywać uczniom ich potencjał”* – *„uczniowie ją lubią*	3	5,17	0	0,00	1,13	0,288
Nie ma pozytywnych skutków	0	0,00	0	0,00	-	-

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy lokalizacją miejsca pracy badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich pozytywnych ich zdaniem skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów.

W celu ustalenia korelacji pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli, a wskazywaniem przez nich ich zdaniem pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya w odniesieniu do uczniów przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana. W tabeli 67 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 67. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów a stażem ich pracy w szkole (*N = 79*)

Wskazanie	**Staż pracy**	
	rho-Spearmana	**Wartość p**
Powoduje rozwój myślenia	0,22	0,057
Przyczynia się do wzrostu samodzielności uczniów podczas rozwiązywania zadań	-0,19	0,107
Kształtuje twórcze podejście do zadań matematycznych	0,06	0,592
Kształtuje umiejętność samodzielnego radzenia sobie z problemem	-0,09	0,430
Motywuje do pracy	0,09	0,443
Powoduje wzrost wiary we własne siły uczniów	-0,18	0,113
Powoduje wzrost zaangażowania uczniów	-0,05	0,649
Inne: – *„pozwala odkrywać uczniom ich potencjał”* – *„uczniowie ją lubią*	0,08	0,475
Nie ma pozytywnych skutków	-	-

Źródło: Badanie własne.

Analizy korelacji nie wykazały istotnych statystycznie związków pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich pozytywnych ich zdaniem skutków stosowania metody G. Polya w odniesieniu do uczniów.

W celu sprawdzenia, czy nauczyciele różniący się poziomem wykształcenia różnili się pod względem wskazywania ich zdaniem pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya w odniesieniu do uczniów przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 68 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 68. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów a poziomem ich wykształcenia (*N = 79*)

Wskazanie	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Powoduje rozwój myślenia	70	93,33	3	100,00	<0,01	>0,999
Przyczynia się do wzrostu samodzielności uczniów podczas rozwiązywania zadań	61	81,33	3	100,00	<0,01	0,953
Kształtuje twórcze podejście do zadań matematycznych	59	78,67	2	66,67	<0,01	>0,999
Kształtuje umiejętność samodzielnego radzenia sobie z problemem	53	70,67	2	66,67	<0,01	>0,999
Motywuje do pracy	35	46,67	1	33,33	<0,01	>0,999
Powoduje wzrost wiary we własne siły uczniów	39	52,00	1	33,33	<0,01	0,964
Powoduje wzrost zaangażowania uczniów	35	46,67	1	33,33	<0,01	>0,999
Inne: – *„pozwala odkrywać uczniom ich potencjał”* – *„uczniowie ją lubią*	3	4,00	0	0,00	<0,01	>0,999
Nie ma pozytywnych skutków	0	0,00	0	0,00	-	-

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich pozytywnych ich zdaniem skutków stosowania metody G. Polya w odniesieniu do uczniów.

Zarówno lokalizacja miejsca pracy, staż pracy w szkole, jak i poziom wykształcenia badanych nauczycieli okazał się nie mieć wpływu na ich opinie w zakresie pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya w odniesieniu do uczniów.

Stosowanie każdej metody kształcenia można oceniać z perspektywy korzyści osiąganych przez uczniów, ale także w odniesieniu do pracy samych nauczycieli. Z tego względu badanych poproszono o wskazanie pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do nauczycieli. Tabela 69 zawiera wskazania respondentów. Istniała możliwość wielokrotnego wyboru odpowiedzi.

Tabela 69. Opinie badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela (*N* = *79*)

Wskazanie	Liczba wskazań	%
Możliwość dostrzeżenia uczniów uzdolnionych matematycznie	72	91
Możliwość poznania preferowanych przez uczniów sposobów rozwiązywania zadań	60	76
Możliwość dostrzeżenia uczniów wykazujących trudności w rozwiązywaniu zadań	57	72
Możliwość obserwowania samodzielnej pracy uczniów	56	71
Możliwość oceny zaangażowania uczniów w rozwiązanie zadania	43	54
Możliwość poznania preferowanych przez uczniów form pracy	41	51
Możliwość poznania struktury grupy/klasy	23	30

Źródło: Badanie własne.

Zdaniem większości badanych dzięki stosowaniu metody G. Polya podczas zajęć matematycznych, nauczyciel ma szansę lepszego poznania swoich uczniów, w tym między innymi poziomu ich kompetencji matematycznych, a także zdolności i zainteresowań z zakresu tej dyscypliny wiedzy. Dla 91% badanych metoda G. Polya jest pomocna w czynnościach mających na celu wyłonienie uczniów wykazujących zdolności matematyczne. Dla 72% badanych okazuje się być pomocną także podczas rozpoznawania uczniów wykazujących trudności w uczeniu się matematyki. Zdaniem 76% respondentów metoda ta umożliwia poznanie preferowanych przez uczniów sposobów rozwiązywania matematycznych zadań. Możliwość obserwowania samodzielnej pracy uczniów wykorzystujących metodę G. Polya jest korzyścią osiąganą przez nauczycieli w opinii 71% badanych. Z kolei stosowanie tej metody dla 54% indagowanych stwarza możliwość dokonania oceny zaangażowania uczniów w proces rozwiązywania matematycznych zadań. 51% nauczycieli jest zdania, iż metoda ta umożliwia poznanie preferowanych przez uczniów form pracy podczas zajęć matematycznych. W opinii niemal jednej trzeciej respondentów w czasie pracy uczniów metodą G. Polya można poznać strukturę grupy/klasy. Zaprezentowane wyniki wskakują, iż nauczyciele doceniają metodę G. Polya zarówno w kontekście pracy uczniów, jak i w kontekście korzyści uzyskiwanych przez nich samych. Ubolewać jedynie należy, że tak niewielka część ogólnej liczby badanych nauczycieli proponuje swoim uczniom rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych z wykorzystaniem metody G. Polya.

W celu ustalenia, czy osoby różniące się lokalizacją miejsca pracy różniły się pod względem wskazywania pozytywnych ich zdaniem skutków stosowania metody G. Polya z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 70 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 70. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 79*)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Możliwość obserwowania samodzielnej pracy uczniów	42	72,41	14	66,67	0,25	0,619
Możliwość poznania struktury grupy	16	27,59	7	33,33	0,25	0,619
Możliwość poznania preferowanych przez uczniów metod rozwiązywania zadań	42	72,41	18	85,71	1,49	0,222
Możliwość poznania preferowanych przez uczniów form pracy	27	46,55	14	66,67	2,50	0,114
Możliwość dostrzeżenia uczniów wykazujących trudności	40	68,97	17	80,95	1,10	0,294

w rozwiązywaniu zadań						
Możliwość dostrzeżenia uczniów uzdolnionych matematycznie	51	87,93	21	100,00	1,49	0,223
Możliwość oceny zaangażowania uczniów w rozwiązanie zadania	32	55,17	11	52,38	0,05	0,826

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy lokalizacją miejsca pracy badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich pozytywnych ich zdaniem skutków stosowania metody G. Polya na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela.

W celu ustalenia zależności pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich ich zdaniem pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana. W tabeli 71 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 71. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela a stażem ich pracy w szkole (*N = 79*)

Wskazanie	Staż pracy	
	rho-Spearmana	Wartość p
Możliwość obserwowania samodzielnej pracy uczniów	-0,09	0,430
Możliwość poznania struktury grupy	0,02	0,867
Możliwość poznania preferowanych przez uczniów metod rozwiązywania zadań	-0,14	0,218
Możliwość poznania preferowanych przez uczniów form pracy	-0,10	0,381
Możliwość dostrzeżenia uczniów wykazujących trudności w rozwiązywaniu zadań	0,00	0,985
Możliwość dostrzeżenia uczniów uzdolnionych matematycznie	0,15	0,193

Możliwość oceny zaangażowania uczniów w rozwiązanie zadania	-0,14	0,224

Źródło: Badanie własne.

Analizy korelacji nie wykazały istotnych statystycznie związków pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich ich zdaniem pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela. Jak się okazało, badani nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej, niezależnie od stażu pracy w szkole wskazywali te same pozytywne skutki stosowania metody G. Polya w odniesieniu do ich własnej pracy.

W celu ustalenia, czy badani różniący się poziomem wykształcenia różnili się także pod względem wskazywania ich zdaniem pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 72 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 72. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela a poziomem ich wykształcenia (*N = 79*)

Wskazanie	**Wykształcenie**				**Wynik testu chi^2**	**Wartość p**
	Magisterskie		**Licencjackie**			
	N	**%**	**N**	**%**		
Możliwość obserwowania samodzielnej pracy uczniów	54	72,00	1	33,33	0,63	0,427
Możliwość poznania struktury grupy	23	30,67	0	0,00	0,25	0,619
Możliwość poznania preferowanych przez uczniów metod rozwiązywania zadań	56	74,67	3	100,00	0,10	0,752
Możliwość poznania preferowanych przez uczniów form pracy	38	50,67	2	66,67	<0,01	>0,999
Możliwość dostrzeżenia uczniów wykazujących trudności w rozwiązywaniu zadań	55	73,33	1	33,33	0,73	0,392
Możliwość dostrzeżenia uczniów	68	90,67	3	100,00	<0,01	>0,999

uzdolnionych matematycznie						
Możliwość oceny zaangażowania uczniów w rozwiązanie zadania	41	54,67	1	33,33	0,02	0,892

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich pozytywnych ich zdaniem skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela.

6.2.5. Negatywne skutki stosowania metody G. Polya podczas zajęć matematycznych w opiniach badanych nauczycieli

Badanych nauczycieli zapytano także, czy ich zdaniem stosowanie metody G. Polya może mieć negatywne skutki w odniesieniu do uczniów. Tabela 73 zawiera zebrane wskazania respondentów.

Tabela 73. Opinie badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów (*N = 79*)

Wskazanie	Liczebność	%
Nie ma negatywnych skutków	67	85,00
Powoduje spadek zaangażowania uczniów	3	4,00
Powoduje spadek motywacji uczniów	2	2,50
Inne – *brak wskazań respondentów*	2	2,50
Ogranicza samodzielność uczniów przy rozwiązywaniu zadań matematycznych	1	1,00
Zniechęca uczniów do rozwiązywania zadań matematycznych	1	1,00
Brak danych	3	4,00
Razem	79	100

Źródło: Badanie własne.

Wśród respondentów stosujących metodę G. Polya zdecydowana większość (91%) jest zdania, że stosowanie jej podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej nie przynosi żadnych negatywnych skutków w odniesieniu do uczniów. Dlatego też tak wielu z nich zadeklarowało stosowanie tej metody co najmniej raz w tygodniu lub kilka razy w miesiącu (tabela 53). Zdaniem 4% badanych stosowanie opisywanej metody może powodować spadek zaangażowania uczniów podczas pracy nad zadaniem matematycznym. Jest to obawa uzasadniona prawie wyłącznie w przypadku utraty możliwości dalszego rozwiązywania zadań na którymś z jego etapów. Uczniowie, których okoliczności nie zmusiły do przerwania aktywności w tym rozwiązywaniu, dążą bowiem do osiągnięcia zamierzonego celu, a więc do rozwiązania postawionego przed nimi zadania. W dalszej kolejności nauczyciele za negatywny skutek stosowania metody G. Polya uznawali kolejno spadek motywacji uczniów (3%), ograniczenie samodzielności uczniów przy rozwiązywaniu matematycznych zadań (1%), a także zniechęcenie uczniów do rozwiązywania matematycznych zadań (1%). Nieliczne, przytoczone powyżej wskazania mogą wynikać z braku wiedzy respondentów, którzy je wybrali na temat metody G. Polya oraz jej walorów poznawczych. Dwóch badanych nauczycieli (3%) wybrało kategorię „inne", jednak żaden z nich nie pokusił się o uzupełnienie swojej wypowiedzi.

W celu sprawdzenia, czy osoby różniące się lokalizacją miejsca pracy różniły się pod względem wskazywania ich zdaniem negatywnych skutków stosowania metody G. Polya w odniesieniu do uczniów przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 74 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 74. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 79*)

Wskazanie	Teren pracy				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Miasto		Wieś			
	N	%	N	%		
Ogranicza samodzielność uczniów przy rozwiązywaniu zadań matematycznych	1	1,00	0	0,00	<0,01	>0,999
Zniechęca uczniów do rozwiązywania zadań matematycznych	1	1,00	0	0,00	<0,01	>0,999
Powoduje spadek motywacji uczniów	2	2,50	0	0,00	0,01	0,914

Powoduje spadek zaangażowania uczniów	2	2,50	1	4,76	<0,01	>0,999
Inne – *brak wskazań respondentów*	0	0,00	2	9,52	2,20	0,138
Nie ma negatywnych skutków	49	89,00	18	85,71	0,20	0,651
Brak danych	3	4,00	0	0	-	-
Razem	58	100	1	100	-	-

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy lokalizacją miejsca pracy badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich negatywnych ich zdaniem skutków stosowania podczas zajęć matematycznych metody G. Polya w odniesieniu do uczniów.

W celu ustalenia zależności pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a wskazaniem ich zadaniem negatywnych skutków stosowania metody G. Polya w odniesieniu do uczniów przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana. W tabeli 75 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 75. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów a stażem ich pracy w szkole (*N = 79*)

Negatywne skutki stosowania metody G. Polya w odniesieniu do uczniów	Staż pracy	
	rho-Spearmana	**Wartość p**
Ogranicza samodzielność uczniów przy rozwiązywaniu zadań matematycznych	0,05	0,675
Zniechęca uczniów do rozwiązywania zadań matematycznych	0,05	0,675
Powoduje spadek motywacji uczniów	-0,19	0,119
Powoduje spadek zaangażowania uczniów	-0,31	0,008
Inne – *brak wskazań respondentów*	0,07	0,551
Nie ma negatywnych skutków	0,13	0,277

Źródło: Badanie własne.

Analizy korelacji nie wykazały istotnych statystycznie związków pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich negatywnych skutków stosowania metody G. Polya w odniesieniu do uczniów.

W celu ustalenia, czy nauczyciele różniący się poziomem wykształcenia różnili się pod względem wskazywania ich zdaniem negatywnych skutków stosowania metody G. Polya w odniesieniu do uczniów przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 76 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 76. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya, na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów a poziomem ich wykształcenia (*N = 79*)

Wskazanie	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Ogranicza samodzielność uczniów przy rozwiązywaniu zadań matematycznych	1	1,39	0	0,00	<0,01	>0,999
Zniechęca uczniów do rozwiązywania zadań matematycznych	1	1,39	0	0,00	<0,01	>0,999
Powoduje spadek motywacji uczniów	2	2,78	0	0,00	<0,01	>0,999
Powoduje spadek zaangażowania uczniów	3	4,17	0	0,00	<0,01	>0,999
Inne – *brak wskazań respondentów*	2	2,78	0	0,00	<0,01	>0,999
Nie ma negatywnych skutków	65	90,28	2	100,00	<0,01	>0,999

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich negatywnych ich zdaniem skutków stosowania metody G. Polya w odniesieniu do uczniów.

Jak pokazały powyższe analizy statystyczne lokalizacja miejsca pracy badanych nauczycieli, ich staż pracy w szkole oraz poziom wykształcenia okazały się nie warunkować udzielanych przez nich odpowiedzi na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć matematycznych w odniesieniu do uczniów.

W dalszej kolejności nauczycieli poproszono o próbę wskazania negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej, w odniesieniu moich pracy. Tabela 77 zawiera wskazania nauczycieli. Respondenci mieli możliwość wielokrotnego wyboru odpowiedzi.

Tabela 77. Opinie badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela (*N = 79*)

Wskazanie	Liczebność	%
Głośna praca uczniów	43	59
Nie można z góry założyć efektów końcowych	39	53
Nieprzewidywalność zajęć	25	34
Nie ma gwarancji osiągnięcia poprawnego wyniku	21	29
Chaos organizacyjny	11	15
Brak całkowitej kontroli nad czasem pracy uczniów	9	12
Inne – *brak wskazań respondentów*	3	4
Brak całkowitej kontroli nad sposobem pracy uczniów	1	1

Źródło: Badanie własne.

Podobnie, jak w przypadku korzyści, tak i negatywne skutki wyboru metod kształcenia sięgają zarówno uczniów, jak i nauczycieli. Najczęściej wskazywanym negatywnym skutkiem stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do pracy nauczycieli była zbyt głośna praca uczniów, mająca miejsce w szczególności podczas pracy w grupach lub zespołem klasowym, a będąca skutkiem wzajemnego komunikowania się uczniów, a niekiedy także uczniów i nauczyciela. Niedogodność tą wskazało 59% indagowanych. Nieco mniej, bo 53% ankietowanych uważa, iż podczas rozwiązywania zadań metodą G. Polya nie można z góry założyć efektu końcowego pracy uczniów. Ta kategoria odpowiedzi dotyczy wszystkich metod heurystycznych, a uzyskanie efektu w postaci rozwiązania matematycznego zadania zależy zarówno od jego trudności, jak i od kompetencji matematycznych uczniów. Nieprzewidywalność przebiegu zajęć matematycznych prowadzonych wedle założeń metody G. Polya należy do negatywnych skutków jej stosowania w poglądach 34% respondentów. Do skutków takich nauczyciele zaliczyli ponadto brak gwarancji osiągnięcia poprawnego wyniku podczas rozwiązywania zadań przez uczniów (29%) oraz chaos organizacyjny (15%). W dalszej kolejności respondenci wskazywali na brak całkowitej kontroli nad czasem (12%) oraz nad sposobem pracy uczniów podczas zajęć matematycznych (1%). Pomimo, iż ankietowani zaznaczyli kategorię „*inne*" (4%), to nie sprecyzowali oni swoich wypowiedzi.

W celu sprawdzenia, czy osoby różniące się lokalizacją miejsca pracy różniły się pod względem wskazywania ich zdaniem negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 78 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 78. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 79*)

Wskazanie	**Teren pracy**				**Wynik testu chi^2**	**Wartość p**
	Miasto		**Wieś**			
	N	**%**	**N**	**%**		
Brak całkowitej kontroli nad czasem pracy uczniów	7	12,96	2	10,53	<0,01	>0,999
Brak całkowitej kontroli nad sposobem pracy uczniów	1	1,85	0	0,00	<0,01	>0,999
Nieprzewidywalność zajęć	17	31,48	8	42,11	0,70	0,401
Chaos organizacyjny	10	18,52	1	5,26	1,03	0,309
Głośna praca uczniów	31	57,41	12	63,16	0,19	0,661
Nie można z góry założyć efektów końcowych	28	51,85	11	57,89	0,21	0,650
Nie ma gwarancji osiągnięcia poprawnego wyniku	15	27,78	6	31,58	0,10	0,753
Inne – *brak wskazań respondentów*	0	0,00	3	15,79	**8,89**	**0,003**

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat wykazała występowanie istotnych statystycznie różnic pomiędzy lokalizacją miejsca pracy badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich negatywnych ich zdaniem skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej. Oznacza to, że osoby pracujące na terenach wiejskich częściej wskazywały odpowiedź „*inne*" w przypadku określania negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela, niż osoby pracujące w mieście – w tym przypadku uzyskano wartość $p = 0,003$, więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$).W pozostałych przypadkach nie wykazano statystycznych zależności.

Niestety otrzymany tu wynik nie pozwala ustalić czym dla badanych były owe „inne" negatywne skutki, gdyż w żadnej ankiecie nie pojawił się takowy zapis. Można zatem uznać, iż lokalizacja miejsca pracy nie warunkuje opinii respondentów na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya w odniesieniu do samych nauczycieli.

W celu wykazania zależności pomiędzy stażem pracy w szkole badanych nauczycieli a wskazaniem przez nich ich zdaniem negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela, przeprowadzono analizy korelacji rho-Spearmana W tabeli 79 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 79. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela a stażem ich pracy w szkole (*N = 79*)

Wskazanie	**Staż pracy**	
	rho-Spearmana	**Wartość p**
Brak całkowitej kontroli nad czasem pracy uczniów	-0,23	0,059
Brak całkowitej kontroli nad sposobem pracy uczniów	0,05	0,687
Nieprzewidywalność zajęć	0,04	0,732
Chaos organizacyjny	**-0,28**	**0,017**
Głośna praca uczniów	0,14	0,234
Nie można z góry założyć efektów	0,08	0,503

końcowych		
Nie ma gwarancji osiągnięcia poprawnego wyniku	-0,11	0,385
Inne – *brak wskazań respondentów*	0,09	0,479

Źródło: Badanie własne.

Analizy korelacji ujawniły istotne statystycznie zależności pomiędzy stażem pracy badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich negatywnych ich zdaniem skutków stosowania metody G. Polya. Wykazano, iż im większy staż pracy w szkole posiadali badani nauczyciele, tym rzadziej jako wadę stosowania metody G. Polya wykazywali chaos organizacyjny panujący na zajęciach. W tym przypadku uzyskano wartość $p = 0{,}017$, a więc $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$). W pozostałych przypadkach nie wykazano występowania korelacji.

Otrzymany wynik świadczy o tym, iż mniej doświadczeni nauczyciele obawiają się chaosu organizacyjnego podczas trwania zajęć. Tendencja ta maleje wraz ze zwiększeniem doświadczeń w zakresie pracy z uczniami. Prawdopodobnie głośna praca uczniów, która ma miejsce podczas zajęć z wykorzystaniem metody G. Polya jest mylnie pojmowana jako coś niepożądanego przez mniej doświadczonych zawodowo nauczycieli.

W celu sprawdzenia, czy osoby różniące się poziomem wykształcenia różniły się pod względem wskazywania negatywnych ich zdaniem skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela, przeprowadzono analizę testem niezależności chi-kwadrat. W tabeli 80 przedstawiono wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 80. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela a poziomem ich wykształcenia (*N = 79*)

Wskazanie	Wykształcenie				Wynik testu chi^2	Wartość p
	Magisterskie		Licencjackie			
	N	%	N	%		
Brak całkowitej kontroli nad czasem pracy uczniów	9	12,86	0	0,00	<0,01	>0,999
Brak całkowitej kontroli nad	1	1,43	0	0,00	<0,01	>0,999

sposobem pracy uczniów						
Nieprzewidywalność zajęć	24	34,29	1	50,00	<0,01	>0,999
Chaos organizacyjny	10	14,29	1	50,00	0,15	0,698
Głośna praca uczniów	41	58,57	1	50,00	<0,01	>0,999
Nie można z góry założyć efektów końcowych	36	51,43	2	100,00	0,41	0,523
Nie ma gwarancji osiągnięcia poprawnego wyniku	20	28,57	1	50,00	<0,01	>0,999
Inne – *brak wskazań respondentów*	3	4,29	0	0,00	<0,01	>0,999

Źródło: Badanie własne.

Analiza testem niezależności chi-kwadrat nie wykazała istotnych statystycznie różnic pomiędzy poziomem wykształcenia badanych nauczycieli a wskazywaniem przez nich negatywnych ich zdaniem skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela.

Zaprezentowane powyżej analizy dotyczyły wyników badań własnych zrealizowanych za pomocą metody sondażu diagnostycznego wśród aktywnych zawodowo nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej. Umożliwiły one poznanie ich opinii na temat matematycznych zadań problemowych oraz metod ich rozwiązywania. Ponadto za ich sprawą możliwe stało się poznanie opinii badanych na temat heurystycznej metody G. Polya.

Kolejny rozdział niniejszej dysertacji zawiera analizę wyników badań własnych zrealizowanych metodą eksperymentu pedagogicznego, który to przeprowadzono wśród uczniów klas trzecich szkoły podstawowej.

7. Analiza wyników badań zrealizowanych metodą eksperymentu pedagogicznego

„Nie ma chyba niczego bardziej interesującego niż badania przejawów działalności ludzkiej. A najbardziej charakterystycznym przejawem tej działalności jest rozwiązywanie zadań…”[523]

/George Polya/

W tym miejscu pracy zaprezentowane zostaną wyniki badań własnych zrealizowanych metodą eksperymentu pedagogicznego przeprowadzonego wśród uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Zaprezentowane wyniki pozwolą odpowiedzieć na główny problem badawczy oraz na pytania szczegółowe dotyczące badanych uczniów a także pozwolą zweryfikować słuszność postawionych hipotez.

Główny problem badawczy dotyczący grupy badanych uczniów przybrał brzmienie:

Z jakim skutkiem zastosowanie heurystycznej metody G. Polya wpłynie na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej?

Uzyskanie odpowiedzi na postawiony wyżej główny problem badawczy było możliwe dzięki analizie wyników badań eksperymentalnych, zaprezentowanych w kolejnych podrozdziałach. Uzyskane wyniki badań własnych przedstawiono w następującej kolejności:

- wyniki uzyskane przez badanych uczniów w preteście (grupa eksperymentalna GE1 i kontrolna GK1),
- sprawdzenie równoważności grupy eksperymentalnej GE1 oraz kontrolnej GK1,
- wyniki uzyskane przez uczniów w postteście (grupy eksperymentalne GE1 i GE2 oraz grupy kontrolne GK1 i GK2),
- wpływ zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej,

[523] G. Polya: *Odkrycie matematyczne…*, s. 146.

- wpływ zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej,
- wpływ zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej,
- zależność miedzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych a płcią badanych uczniów.

W przypadku analiz dotyczących stwierdzenia równoważności grup GE1 i GK1 oraz wpływu zastosowania czynnika eksperymentalnego na pomiar końcowy zastosowano testy statystyczne. Sformułowane zostały także hipotezy statystyczne, których weryfikacja oparła się o wnioski wyciągnięte z przeprowadzonych analiz wnioskowania statystycznego.

Analiza statystyczna wykonana została przy użyciu programu SPSSW oraz pakietu Excel 2010. Wszystkie testy wykonano na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$. Wszystkie obliczenia przeprowadzane były z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

W wykonanych obliczeniach jeśli zachodzi nierówność $p < \alpha$ hipotezę H_0 należy odrzucić i przyjąć jako prawdziwą hipotezę H_1. Przy wystąpieniu nierówności przeciwnej nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

W zamieszczonych poniżej tabelach symbol *p* oznacza istotność, natomiast wartość *df* to liczba stopni swobody.

7.1. Wyniki uzyskane w preteście przez badanych uczniów w grupach eksperymentalnej GE1 oraz kontrolnej GK1

W tym miejscy rozprawy przedstawiono średnie wyniki uzyskane przez badanych uczniów w teście początkowym. Liczba punktów uzyskanych w preteście przez uczniów grupy eksperymentalnej GE1 oraz uczniów grupy kontrolnej GK1 została przedstawiona w tabelach zawartych w aneksie 8 oraz aneksie 9 do niniejszej pracy.

Zaprezentowane w kolejnych podrozdziałach analizy statystyczne wymagały obliczenia średniego procentowego wyniku wykonania zadań pretestu przez uczniów w poszczególnych grupach. Obliczono średni procent wykonania zadań pretestu z uwzględnieniem podziału na zadania arytmetyczne oraz geometryczne.

W tabeli 81 zostały zawarte średnie wyniki uzyskane przez uczniów w preteście w grupie eksperymentalnej GE1 oraz w grupie kontrolnej GK1. Tabela zawiera ponadto średnie wyniki uzyskane przez uczniów w grupie GE1 oraz w grupie GK1 z zadań z części arytmetycznej pretestu oraz z zadań z części geometrycznej pretestu. Dla wszystkich zadań pretestu oraz dla zadań arytmetycznych pretestu i dla zadań geometrycznych pretestu policzona została również mediana uzyskanych przez uczniów wyników. Dzięki temu możliwe było ukazanie wartości przeciętnej (środkowej) uzyskanych przez uczniów wyników oraz ich porównanie.

Tabela 81. Średnie wyniki uzyskane w preteście z podziałem na zadania arytmetyczne i geometryczne przez uczniów z grupy eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

Badana grupa	**Średni procentowy wynik wykonania wszystkich zadań**	**Mediana**	**Średni procentowy wynik wykonania zadań arytmetycznych**	**Mediana**	**Średni procentowy wynik wykonania zadań geometrycznych**	**Mediana**
GE1	59,67%	50,98%	61,59%	63,33%	53,91%	60,00%
GK1	50,98%	52,50%	61,59%	66,67%	19,13%	20,00%
Obie grupy	55,33%	55,00%	61,59%	65,00%	36,52%	40,00%

Źródło: Badanie własne.

Jak się okazało średni procentowy wynik wykonania wszystkich zadań pretestu w grupie eksperymentalnej GE1 (59,67%) był wyższy niż w grupie kontrolnej GK1, w której uzyskano wynik 50,98%. Średni procentowy wynik wykonania zadań pretestu w obu grupach wyniósł 55,33%. Oznacza to, iż grupa eksperymentalna GE1 wykonała prawidłowo większy procent zadań pretestu niż grupa kontrolna GK1.

Mediana uzyskanych przez uczniów wyników w przypadku grupy GE1 wyniosła 50,98%. Oznacza to, iż połowa uczniów z grupy eksperymentalnej osiągnęła wynik nie niższy niż 50,98%. Mediana wyników uzyskanych przez uczniów w grupie kontrolnej wyniosła 52,50%, co oznacza, że połowa uczniów tej grupy osiągnęła wynik nie niższy niż 52,50%. W związku z powyższym można stwierdzić, iż średnie wyniki całego pretestu uczniów należących do grupy kontrolnej GK1 były lepsze niż uczniów należących do grupy eksperymentalnej GE1. Mediana w przypadku obu grup wyniosła 55%. Oznacza to, iż połowa uczniów w obu badanych grupach osiągnęła średnie wyniki dla wszystkich zadań pretestu nie niższe niż 55%.

Średni procentowy wynik wykonania zadań arytmetycznych pretestu w obu badanych grupach był taki sam i wyniósł po 61,59%. Mediana w przypadku zadań arytmetycznych pretestu w grupie GE1 wyniosła 63,33%, podczas gdy w grupie GK1 była równa 66,67%. Oznacza to, iż połowa uczniów grupy kontrolnej osiągnęła z części arytmetycznej pretestu wynik nie niższy niż 66,67%, podczas gdy w grupie eksperymentalnej wartość ta była nie niższa niż 63,33%. Można zatem stwierdzić, iż uczniowie grupy kontrolnej GK1 uzyskali z części arytmetycznej pretestu średnio lepsze wyniki niż uczniowie grupy eksperymentalnej GE1. Mediana wyników uzyskanych przez uczniów w obu badanych grupach wyniosła 65%, co pozwala stwierdzić, iż połowa uczniów obu badanych grup uzyskała z zadań z części arytmetycznej pretestu średnie wyniki nie niższe niż 65%.

Zadania geometryczne okazały się być trudniejszymi dla uczniów w obu badanych grupach. Średni procentowy wynik wykonania zadań geometrycznych pretestu w grupie GE1 wynosił 53,91% i był wyższy niż w przypadku wyniku uzyskanego przez uczniów z grupy kontrolnej (19,13%). Uczniowie obu badanych grup wykonali zadania geometryczne pretestu średnio w 36,52%. Duża różnica miedzy wynikami uzyskanym przez uczniów badanych grup ujawniła się po obliczeniu mediany. W grupie eksperymentalnej GE1 obliczona mediana (60%) pozwala stwierdzić, iż połowa uczniów tej grupy wykonała zadania geometryczne pretestu na poziomie nie niższym niż 60%. W przypadku grupy kontrolnej GK1 połowa uczniów wykonała te zadania na poziomie nie niższym niż 20%. Biorąc pod uwagę średnie wyniki uczniów z obu badanych grup stwierdza się, iż połowa badanych uczniów osiągnęła średnie wyniki z części geometrycznej pretestu na poziomie nie niższym niż 40%.

Podsumowując powyższe wyniki badań stwierdzić można, iż dla obu grup zadania arytmetyczne okazały się być łatwiejszymi niż zadania geometryczne. Podczas początkowego pomiaru uczniowie z grupy kontrolnej GK1 okazali się lepiej wykonywać zadania z części arytmetycznej niż uczniowie grupy eksperymentalnej GE1. Podobnie lepsze wyniki grupa GK1 uzyskała biorąc pod uwagę wszystkie zadania pretestu. Grupa eksperymentalna GE1 okazała się natomiast być lepszą w początkowym pomiarze z zadań z części geometrycznej.

7.2. Sprawdzenie równoważności grupy eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 na podstawie wyników uzyskanych w preteście przez badanych uczniów

Warunkiem koniecznym do prawidłowego zaplanowania oraz przeprowadzenia badań eksperymentalnych jest sprawdzenie równoważności grup, które uczestniczą w pomiarze początkowym. Realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała porównania wyników pretestu uzyskanych przez uczniów w grupie GE1 i GK1. Średnie wyniki pretestu w obu grupach zamieszczono w tabeli 82.

Tabela 82. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w preteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

Wyniki pretestu		
grupa	średni wynik	mediana
GE1	59,67%	57,50%
GK1	50,98%	52,50%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE1 50% uczniów uzyskało z wszystkich zadań pretestu co najmniej 57,5%, natomiast w grupie kontrolnej wynik ten wynosił 52,5%.

W celu porównania średnich wyników pretestu w grupach GE1 i GK1 wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w preteście w grupach GE1 i GK1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji)

H_1 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w preteście w grupach GE1 i GK1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji)

W tabeli 83 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 83. Wartość testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki pretestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	192,0
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,11

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) oznacza, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Otrzymany wynik pozwala zatem przyjąć, że różnica średnich wyników w obu grupach nie jest istotna statystycznie, czyli grupy GE1 i GK1 należą do tej samej populacji. Pozytywna weryfikacja równoważności grup GE1 oraz GK1 umożliwiła przeprowadzenie zaplanowanego eksperymentu pedagogicznego.

7.3. Wyniki uzyskane w postteście przez badanych uczniów w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz kontrolnych GK1 i GK2

W tym podrozdziale przedstawiono wyniki uzyskane przez badanych uczniów w pomiarze końcowym. Liczba punktów uzyskanych w postteście przez uczniów grup eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz uczniów grup kontrolnych GK1 i GK2 została przedstawiona w tabelach, znajdujących się w aneksie 10, aneksie 11, aneksie 12 oraz aneksie 13 niniejszej pracy.

W tabeli 84 zostały zawarte średnie wyniki uzyskane przez uczniów w postteście w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz w grupach kontrolnych GK1 i GK2. Tabela zawiera ponadto średnie wyniki zadań z części arytmetycznej posttestu oraz średnie wyniki zadań z części geometrycznej posttestu uzyskane przez uczniów badanych grup. Dla wszystkich zadań posttestu, w tym także dla zadań arytmetycznych i geometrycznych posttestu policzona została również mediana.

Tabela 824. Średnie wyniki uzyskane w postteście z podziałem na zadania arytmetyczne i geometryczne przez uczniów z grup eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz kontrolnych GK1 i GK2

Badana grupa	Średni procentowy wynik wykonania wszystkich zadań	Mediana	Średni procentowy wynik zadań arytmetycznych	Mediana	Średni procentowy wynik zadań geometrycznych	Mediana
GE1	76,85%	77,50%	83,54%	85,71%	61,23%	66,67%
GK1	51,85%	55,00%	63,35%	67,86%	25,00%	16,67%
GE2	76,96%	82,50%	82,76%	89,29%	63,41%	66,67%
GK2	54,02%	47,50%	62,58%	50,00%	34,06%	33,33%

Źródło: Badanie własne.

Średni procentowy wynik wykonania wszystkich zadań posttestu w grupie eksperymentalnej GE1 wyniósł 76.85%. Mediana wykonania wszystkich zadań posttestu w tej grupie oznacza, iż połowa uczniów grupy GE1 osiągnęła wyniki dla wszystkich zadań posstestu nie niższe niż 77,50%. Uczniowie zdecydowanie lepiej poradzili sobie z częścią arytmetyczną pomiaru końcowego. Średni procent wykonania zadań z części arytmetycznej posttestu wyniósł 83,54%. Przeciętna wartość uzyskana przez uczniów z części zadań arytmetycznych posttestu pozwala na stwierdzenie, iż połowa uczniów grupy eksperymentalnej GE1 osiągnęła średnie wyniki z tej części zadań na poziomie nie niższym niż 85,71%. Zadania geometryczne posttestu okazały się być wykonane w tej grupie średnio w 61,23%. Analizując wartość otrzymanej mediany można stwierdzić, iż w przypadku zadań geometrycznych posttestu połowa uczniów grupy eksperymentalnej GE1 uzyskała średnie wyniki nie niższe niż 66,67%.

W grupie eksperymentalnej GE2 średni procentowy wynik wykonania wszystkich zadań posttestu wyniósł 76,96%. Wynik obliczonej mediany oznacza, iż połowa uczniów grupy GE2 osiągnęła średnie wyniki z posttestu nie niższe niż 82,50%. Zadania z części arytmetycznej posttestu w tej grupie zostały wykonane w 82,76%. Przeciętna wartość wykonania zadań arytmetycznych w grupie oznacza, iż połowa uczniów grupy eksperymentalnej GE2 uzyskała z tej części posttestu wyniki nie niższe niż 89,29%. Zadania z części geometrycznej okazały się być trudniejsze dla uczniów tej grupy. Średni procent ich wykonania wynosił 63,41% i był niższy względem zadań arytmetycznych o niemal 20%. Mediana w przypadku zadań z części geometrycznej posttestu wskazała, iż połowa uczniów grupy GE2 uzyskała średnio wyniki nie niższe niż 66,67%.

Grupa kontrolna GK1 w postteście osiągnęła średni procent wykonania wszystkich zadań na poziomie 51,85%. Mediana w tym przypadku pozwala na stwierdzenie, iż połowa uczniów tej grupy uzyskała w końcowym pomiarze wyniki nie niższe niż 55%. Zadania arytmetyczne w grupie były wykonane średnio w 63,35%, co oznacza iż były łatwiejsze względem zadań geometrycznych, których średnie wykonanie wyniosło 25%. Mediana wykonania zadań arytmetycznych pozwala stwierdzić, iż połowa uczniów grupy kontrolnej GK1 osiągnęła w części arytmetycznej posttestu wyniki nie niższe niż 67,86%, podczas gdy z części geometrycznej wyniki te były nie niższe niż 16,67%.

Średni procentowy wynik wykonania wszystkich zadań posttestu w grupie kontrolnej GK2 wyniósł 54,02%. Zgodnie z wynikiem obliczonej mediany można powiedzieć, iż w grupie tej połowa uczniów osiągnęła wynik ze wszystkich zadań nie niższy niż 47,50%. Podobnie, jak w przypadku pozostałych grup, w grupie kontrolnej GK2 zadania arytmetyczne okazały się być łatwiejszymi niż zadania geometryczne. Uczniowie grupy GK2 wykonali zadania arytmetyczne średnio w 62,58%, natomiast zadania z części geometrycznej w 34,06%. Obliczone mediany wykonania zadań każdego typu pozwalają na stwierdzenie, iż połowa uczniów grupy GK2 osiągnęła wynik z części arytmetycznej posttestu na poziomie nie niższym niż 50%, podczas gdy w przypadku zadań z części geometrycznej połowa uczniów osiągnęła wynik na poziomie nie niższym niż 33,33%.

Podsumowując otrzymane przez uczniów poszczególnych grup wyniki uzyskane z posttestu można stwierdzić, iż w pomiarze końcowym znacznie lepiej poradziły sobie grupy eksperymentalne (GE1 oraz GE2) niż grupy kontrolne (GK1 oraz GK2). Otrzymany średni procentowy wynik wykonania wszystkich zadań posttestu wskazuje, iż najlepiej w pomiarze końcowym zaprezentowała się grupa eksperymentalna GE2 (76,96%). Uczniowie z grupy kontrolnej GK1 w postteście okazali się mieć najsłabsze wyniki. Średnio poradzili sobie ze wszystkimi zadaniami posttestu uzyskując wynik 51,85%.

Biorąc pod uwagę wyniki uzyskane przez uczniów badanych grup w postteście można stwierdzić, iż zadania geometryczne okazały się być znacznie trudniejsze aniżeli zadania arytmetyczne. Prawidłowość ta jest widoczna w przypadku obu grup eksperymentalnych oraz obu grup kontrolnych. Najlepiej z zadaniami z części arytmetycznej poradzili sobie uczniowie grupy eksperymentalnej GE1 (83,54%), najsłabsi z tej części posttestu okazali się być uczniowie grupy kontrolnej GK2 (62,58%). Zadania geometryczne w największym procencie wykonane zostały przez uczniów grupy eksperymentalnej GE2 (63,41%). Najsłabiej z zadaniami tego typu poradzili sobie uczniowie z grupy GK1, gdyż uzyskali średnio 25% możliwych do uzyskania punktów.

7.4. Wpływ zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej

W celu sprawdzenia jaki jest wpływ zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej przeprowadzono analizę wyników otrzymanych w toku badań. Analiza wyników została przeprowadzona przy użyciu przyjętego na potrzeby niniejszej pracy planu Solomona. Szczegółowy opis kolejnych kroków koniecznych do przeprowadzenia analiz opisano na stronach 159-161 niniejszej pracy.

Poniżej przedstawiono wyniki badań własnych dotyczących wpływu zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej, zgodnie z przyjętym na potrzeby badań planem Solomona.

Etap I. Krok I. Porównanie wyników pretestu w grupach GE1 i GK1

Sprawdzenie równoważności grup eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 zamieszczono w podrozdziale 7.2. niniejszej rozprawy. Zgodnie z zaprezentowanymi w nim wynikami z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 stwierdzono, że różnica średnich wyników pretestu w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie. W związku z powyższym grupy GE1 i GK1 należą do tej samej populacji. Zgodnie z wynikami pretestu wyjściowa umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych była taka sama u uczniów należących do grupy eksperymentalnej GE1 oraz u uczniów z grupy kontrolnej GK1.

Etap I. Krok II. Porównanie wyników posttestu w grupach GE1 i GK1

Realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała porównania wyników posttestu uzyskanych przez uczniów w grupie GE1 i GK1. Średnie wyniki pretestu w obu grupach zamieszczono w tabeli 85.

Tabela 85. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

Wyniki posttestu		
grupa	średni wynik	mediana
GE1	76,85%	77,50%
GK1	51,85%	55,00%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE1 50% uczniów uzyskało z wszystkich zadań posttestu co najmniej 77,5 %, natomiast w grupie kontrolnej GK1 wynik ten wyniósł 55,0%.

W celu porównania średnich wyników posttestu uzyskanych przez uczniów w grupach eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach GE1 i GK1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach GE1 i GK1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 86 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 86. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki posttestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	68,5
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,0

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników w obu grupach jest istotna statystycznie. W związku z powyższym grupy GE1 i GK1 nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 83 można stwierdzić, że średnie wyniki uzyskane w postteście w grupie eksperymentalnej GE1 są wyższe niż w grupie kontrolnej GK1. Wynika stąd, iż umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych w końcowym pomiarze była wyższa u uczniów uczestniczących w zajęciach matematycznych wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya (grupa GE1) niż u uczniów kształconych innymi metodami (grupa GK1).

Etap I. Krok III. Porównanie wyników posttestu w grupach GE2 i GK2

Realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała w dalszej kolejności porównania wyników posttestu uzyskanych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2. Średnie wyniki pretestu w obu grupach zamieszczono w tabeli 87.

Tabela 87. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2

Wyniki posttestu		
grupa	średni wynik	mediana
GE2	76,96%	82,50%
GK2	54,02%	47,50%

Źródło: Badanie własne.

Na podstawie danych zawartych w powyższej tabeli można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE2 50% uczniów uzyskało z wszystkich zadań posttestu co najmniej 82,5%. W grupie kontrolnej GK2 wynik ten wynosił 47,5%.

W celu porównania średnich wyników posttestu uzyskanych przez uczniów w grupach GE2 i GK2 wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach GE2 i GK2 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach GE2 i GK2 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 88 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 88. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2 – średnie wyniki posttestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	107,0
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,0

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników w obu grupach jest istotna statystycznie. Grupy GE2 i GK2 nie należą zatem do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 85 można stwierdzić, że średnie wyniki uzyskane w postteście w grupie eksperymentalnej GE2 są wyższe niż w grupie kontrolnej GK2. Zgodnie z powyższym uczniowie uczestniczący w zajęciach wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya (GE2) w końcowym pomiarze wykazali się większą umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych niż uczniowie kształceni innymi metodami (GK2).

Etap I. Krok IV. Wyznaczenie wartości wskaźników D_1 i D_2 postępów uczniów w grupach GE1 i GK1

Realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała w następnej kolejności porównania wyników postępów uzyskanych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1.

Do porównania postępów w zakresie umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych w grupach GE1 i GK1 posłużą odpowiednio wskaźniki $D_1 = GE1_{post} – GE1_{pre}$ (różnica wyniku posttestu i pretestu) w grupie eksperymentalnej GE1 oraz $D_2 = GK1_{post} – GK1_{pre}$ (różnica wyniku posttestu i pretestu) w grupie kontrolnej GK1.

Uzyskane wartości wskaźników D_1 i D_2 w grupach GE1 i GK1 zamieszczono w tabeli 89.

Tabela 89. Wartości wskaźników D_1 i D_2 w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

Wyniki postępów w grupach GE1 i GK1		
grupa	średni wynik	mediana
GE1	D_1 = 17,17%	15,00%
GK1	D_2 = 0,87%	2,50%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE1 50% uczniów poprawiło wyniki posttestu w stosunku do pretestu o co najmniej 15,0 %, natomiast w grupie kontrolnej GK1 wynik ten wynosi jedynie 2,5%.

Etap I. Krok V. Porównanie postępów w grupach GE1 i GK1

W celu porównania średnich wyników postępów uzyskanych przez uczniów w grupach eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2 wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów w grupach GE1 i GK1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),
H_1 – różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów w grupach GE1 i GK1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 90 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 90. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki postępów D_1 i D_2

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	23,0
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,0

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich postępów w obu grupach jest istotna statystycznie, czyli grupy GE1 i GK1 nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 89 można zatem stwierdzić, że średnie wyniki postępów uzyskane grupie GE1 są wyższe niż w grupie GK1. Wynika stąd, iż postęp umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych był większy w przypadku uczniów grupy eksperymentalnej, którzy uczestniczyli w zajęciach wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya (GE1), niż u uczniów kształconych innymi metodami (GK1).

Etap II. Krok I. Porównanie wyników posttestu w grupach GE1 oraz GE2

Przyjęty plan Solomona w dalszej kolejności wymagał dokonania kontroli efektu pretestu. W celu kontroli efektu pretestu w odniesieniu do umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych należy wykazać, iż wynik posttestu w grupie eksperymentalnej GE1 jest równy wynikowi posttestu w grupie eksperymentalnej GE2. Średnie wyniki posttestu w grupach GE1 I GE2 zamieszczono w tabeli 91.

Tabela 91. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2

Wyniki posttestu		
grupa	średni wynik	mediana
GE1	76,85%	77,50%
GE2	76,96%	82,50%

Źródło: Badanie własne.

Z informacji zamieszczonych w powyższej tabeli wynika, iż w grupie eksperymentalnej GE1 50% uczniów uzyskało z wszystkich zadań posttestu co najmniej 77,5%, natomiast w grupie eksperymentalnej GE2 wynik ten wyniósł 82,5%.

W celu porównania średnich wyników posttestu uzyskanych przez uczniów w grupach GE1 i GE2 wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach GE1 i GE2 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach GE1 i GE2 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 92 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 92. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2 – średnie wyniki posttestu

Statystyka	**Wartość statystyki**
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	227,5
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,415

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość p > α (α = 0,05) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników w obu grupach nie jest istotna statystycznie. Zatem grupy GE1 i GE2 należą do tej samej populacji. Pozytywna weryfikacja równoważności grup GE1 oraz GE2 wskazuje, że wykonanie pretestu w grupie eksperymentalnej GE1 nie miało wpływu na wyniki posttestu w tej grupie. W związku z powyższym można stwierdzić, że zastosowanie metody G. Polya w obu grupach eksperymentalnych (GE1 i GE2) dało statystycznie takie same wyniki.

Etap II. Krok II. Porównanie wyników posttestu w grupie GK1 oraz w grupie GK2

Realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała porównania wyników posttestu uzyskanych przez uczniów w grupach kontrolnych GK1 i GK2. Średnie wyniki posttestu w obu grupach zamieszczono w tabeli 93.

Tabela 93. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście w grupach kontrolnych GK1 i GK2

Wyniki posttestu		
grupa	średni wynik	mediana
GK1	52,84%	55,00%
GK2	54,24%	47,50%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie GK1 50% uczniów uzyskało z wszystkich zadań posttestu co najmniej 55,0 %, natomiast w grupie GK2 wynik ten jest równy 47,5%.

Zgodnie z przyjętym planem Solomona należy wykazać, iż pomiędzy średnimi wynikami posttestu w grupach kontrolnych GK1 i GK2 nie ma istotnych statystycznie różnic.

W celu porównania średnich wyników posttestu uzyskanych przez uczniów w grupach kontrolnych GK1 i GK2 wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach kontrolnych GK1 i GK2 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach kontrolnych GK1 i GK2 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 94 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 94. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie kontrolnej GK1 i GK2 – średnie wyniki posttestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	263,500
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,982

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników posttestu w obu grupach nie jest istotna statystycznie, czyli grupy GK1 i GK2 należą do tej samej populacji. Wynika stąd, iż średnie wyniki uzyskane z wszystkich zadań posttestu uzyskane przez uczniów w obu grupach kontrolnych (GK1 i GK2) nie różniły się od siebie w sposób istotny statystycznie.

Etap III. Krok I. Porównanie wyników posttestu w grupie GK2 oraz wyników pretestu w grupie GE1

Realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała w dalszej kolejności porównania wyników posttestu uzyskanych przez uczniów w grupie kontrolnej GK2 oraz wyników pretestu w grupie eksperymentalnej GE1. Średnie wyniki pretestu i posttestu w odpowiednich grupach zamieszczono w tabeli 95.

Tabela 95. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w preteście w grupie eksperymentalnej GE1 oraz średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście w grupie kontrolnej GK2

Wyniki w grupach GE1 i GK2			
typ testu	grupa	średni wynik	mediana
pretest	GE1	59,67%	57,50%
posttest	GK2	54,02%	47,50%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie GE1 50% uczniów uzyskało z wszystkich zadań pretestu co najmniej 57,5 %, natomiast w grupie kontrolnej GK2 za zadania posttestu wynik ten jest równy 47,5%. Zgodnie przyjętym planem Solomona należy wykazać, iż pomiędzy średnimi wynikami posttestu w grupie GK2 i pretestu w grupie GE1 nie ma istotnych statystycznie różnic.

W tym celu wykonano analizę statystyczną tych wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupie GK2 i preteście w grupie GE1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupie GK2 i preteście w grupie GE1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 96 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 96. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK2 – średnie wyniki pretestu i posttestu

Statystyka	**Wartość statystyki**
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	262,500
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,88

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników w obu grupach nie jest istotna statystycznie, czyli grupy

GK1 i GK2 należą do tej samej populacji. W związku z powyższym można stwierdzić, iż umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów należących do grupy kontrolnej GK2 w końcowym pomiarze nie różniła się w sposób istotny statystycznie od umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, jaką wykazywali uczniowie grupy eksperymentalnej GE1 w początkowym pomiarze.

Etap III. Krok II. Porównanie wyników posttestu w grupie GK2 oraz wyników pretestu w grupie GK1

Realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała następnie porównania wyników posttestu uzyskanych przez uczniów w grupie kontrolnej GK2 oraz wyników pretestu w grupie kontrolnej GK1. Średnie wyniki pretestu i posttestu w grupach zamieszczono w tabeli 97.

Tabela 97. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w preteście w grupie kontrolnej GK1 oraz średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście w grupie kontrolnej GK2

Wyniki w grupach GK1 i GK2			
typ testu	grupa	średni wynik	mediana
pretest	GK1	50,98%	52,50%
posttest	GK2	54,02%	47,50%

Można zauważyć, że w grupie kontrolnej GK1 50% uczniów uzyskało z wszystkich zadań pretestu co najmniej 52,5 %, natomiast w grupie kontrolnej GK2 za zadania posttestu wynik ten jest równy 47,5%. Zgodnie z przyjętym planem Solomona należy wykazać, iż pomiędzy średnimi wynikami posttestu w grupie GK2 i pretestu w grupie GK1 nie ma istotnych statystycznie różnic.

W tym celu wykonano analizę statystyczną za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupie GK2 i preteście w grupie GK1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupie GK2 i preteście w grupie GK1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 98 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 98. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie kontrolnej GK1 (średnie wyniki pretestu) i kontrolnej GK2 (średnie wyniki posttestu)

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	258,5
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,89

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników w obu grupach nie jest istotna statystycznie, czyli grupy GK1 i GK2 należą do tej samej populacji. W związku z powyższym można uznać, iż końcowa umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów grupy kontrolnej GK2 nie różniła się w sposób istotny statystycznie od umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, jaką wykazywali uczniowie grupy kontrolnej GK1 w początkowym pomiarze.

Przedstawione powyżej analizy wyników badań własnych zrealizowane zostały zgodnie z założeniami planu Solomona i obejmowały trzy etapy. Podsumowując, na ich podstawie:

– w etapie I potwierdzono prawdziwość hipotezy badawczej – wykazano, iż zastosowanie metody G. Polya wpłynęło pozytywnie na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej w sposób istotny statystycznie. Uczniowie uczestniczący w zajęciach wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya wykazywali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych niż uczniowie kształceni innymi metodami.

– w etapie II potwierdzono brak efektu zastosowania pretestu – wykazano, iż przeprowadzenie pretestu nie wpłynęło na wyniki uzyskane przez badanych uczniów w postteście. Przeprowadzenie pomiaru początkowego nie miało wpływu na końcowy poziom umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej.
– w etapie III wykazano, że w grupie kontrolnej, w odróżnieniu od grupy eksperymentalnej, nie wystąpiły celowe zmiany w zakresie umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów. Umiejętność ta okazała się być wyższą jedynie w przypadku uczniów uczestniczących w zajęciach matematycznych wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya.

7.5. Wpływ zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej

W celu sprawdzenia jaki jest wpływ zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej przeprowadzono analizę wyników otrzymanych w toku badań.

Poniżej przedstawiono wyniki badań własnych dotyczących wpływu zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich, zgodnie z przyjętym na potrzeby badań planem Solomona. Szczegółowy opis kolejnych kroków koniecznych do przeprowadzenia analiz opisano na stronach 159-161 niniejszej pracy.

Etap I. Krok I. Porównanie wyników pretestu w grupach GE1 i GK1

Realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała na początku porównania wyników pretestu uzyskanych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1. Średnie wyniki pretestu w obu grupach zamieszczono w tabeli 99.

Tabela 99. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w preteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

Wyniki – zadania arytmetyczne pretestu		
grupa	średni wynik	mediana
GE1	61,59%	63,33%
GK1	61,59%	66,67%

Źródło: Badanie własne.

Jak wynika z powyższej tabeli, w grupie eksperymentalnej GE1 50% uczniów uzyskało z zadań arytmetycznych pretestu co najmniej 63,33 %, podczas gdy w grupie kontrolnej wynik ten wynosił 66,67%.

W celu porównania średnich wyników uzyskanych z części arytmetycznej pretestu przez uczniów w grupach GE1 i GK1 wykonano analizę statystyczną za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych pretestu w grupach GE1 i GK1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych pretestu w grupach GE1 i GK1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 100 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 100. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki zadań arytmetycznych pretestu

Statystyka	**Wartość statystyki**
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	251,00
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,766

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych pretestu przez uczniów w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie. W związku z powyższym grupy eksperymentalna GE1 i kontrolna GK1 należą do tej samej populacji. Wynika stąd, iż początkowa umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych wykazywana przez uczniów grupy eksperymentalnej (GE1) nie różniła się w sposób istotny statystycznie od początkowej umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych wykazywanej przez uczniów należących do grupy kontrolnej (GK1).

Etap I. Krok II. Porównanie wyników posttestu w grupach GE1 i GK1

W dalszej kolejności realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała porównania wyników części arytmetycznej posttestu uzyskanych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1. Średnie wyniki posttestu w obu grupach zamieszczono w tabeli 101.

Tabela 101. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

Wyniki – zadania arytmetyczne posttestu		
grupa	średni wynik	mediana
GE1	83,54%	85,71%
GK1	63,35%	67,86%

Źródło: Badanie własne.

W grupie eksperymentalnej GE1 50% uczniów uzyskało z części arytmetycznej posttestu co najmniej 85,71%, natomiast w grupie kontrolnej wynik ten wyniósł 67,86%.

W celu porównania średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu przez uczniów w grupach GE1 i GK1 wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu w grupach GE1 i GK1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu w grupach GE1 i GK1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 102 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 102. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki zadań arytmetycznych posttestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	106,500
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,000

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z części arytmetycznej posttestu w obu grupach jest istotna statystycznie, czyli grupy GE1 i GK1 nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 101 można zatem stwierdzić, że średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście w grupie eksperymentalnej GE1 są wyższe niż w grupie kontrolnej GK1. Wynika z tego, iż końcowa umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych była większa u uczniów uczestniczących w zajęciach matematycznych wykorzystujących metodę G. Polya, niż u uczniów kształconych innymi metodami.

Etap I. Krok III. Porównanie wyników posttestu w grupach GE2 i GK2

Realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała następnie porównania wyników uzyskanych z części arytmetycznej posttestu przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2. Średnie wyniki zadań arytmetycznych pretestu w obu grupach zamieszczono w tabeli 103.

Tabela 103. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2

Wyniki – zadania arytmetyczne posttestu		
grupa	średni wynik	mediana
GE2	82,76%	89,29%
GK2	62,58%	50,00%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE2 50% uczniów uzyskało z części arytmetycznej posttestu co najmniej 89,29 %, natomiast w grupie kontrolnej wynik ten wynosi 50,0%.

W celu porównania średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu przez uczniów w grupach eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2 wykonano analizę statystyczną za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu w grupach GE2 i GK2 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu w grupach GE2 i GK2 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 104 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 104. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2 – średnie wyniki zadań arytmetycznych posttestu

Statystyka	**Wartość statystyki**
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	146,0
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,009

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu w obu badanych grupach jest istotna statystycznie. Grupy eksperymentalna GE2 i kontrolna GK2 nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 101 można stwierdzić, że średnie wyniki uzyskane z części arytmetycznej posttestu uzyskane przez uczniów w grupie GE2 są wyższe niż w grupie GK2. W związku z powyższym można powiedzieć, iż końcowa umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych okazała się być wyższa u uczniów uczestniczących w zajęciach matematycznych wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya, niż u uczniów kształconych innymi metodami.

Etap I. Krok IV. Wyznaczenie wartości wskaźników D_1 i D_2 postępów uczniów w grupach GE1 i GK1

Realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała w następnej kolejności porównania wyników postępów uzyskanych w przypadku zadań arytmetycznych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1.

Do porównania postępów w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych w grupach GE1 i GK1 posłużą wskaźniki $D_1 = GE1_{post} – GE1_{pre}$ (różnica wyniku części arytmetycznej posttestu i pretestu) w grupie eksperymentalnej GE1 oraz $D_2 = GK1_{post} – GK1_{pre}$ (różnica wyniku części arytmetycznej posttestu i pretestu) w grupie kontrolnej GK1.

Wartości wskaźników D_1 i D_2 odpowiednio w grupach GE1 i GK1 zamieszczono w tabeli 105.

Tabela 105. Wartości wskaźników D_1 i D_2 dla zadań arytmetycznych w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

Wyniki postępów w grupach GE1 i GK1 – zadania arytmetyczne		
grupa	średni wynik	mediana
GE1	D1 = 21,95%	20,00%
GK1	D2 = 1,76%	2,62%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE1 50% uczniów poprawiło wyniki z części arytmetycznej posttestu w stosunku do pretestu o co najmniej 20,0 %, natomiast w grupie kontrolnej GK1 wynik ten wyniósł jedynie 2,62%.

Etap I. Krok V. Porównanie postępów w grupach GE1 i GK1

W celu porównania średnich wyników postępów z części arytmetycznej posttestu w grupach eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2 wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów w grupach GE1 i GK1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów w grupach GE1 i GK1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 106 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 106. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki postępów D_1 i D_2 w zadaniach arytmetycznych

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	45,5
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,0

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0{,}05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich postępów w odniesieniu do zadań arytmetycznych w obu badanych grupach jest istotna statystycznie, czyli grupy eksperymentalna GE1 i kontrolna GK1 nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 105 można zatem stwierdzić, że średnie wyniki postępów w odniesieniu do zadań arytmetycznych uzyskane w grupie eksperymentalnej GE1 są wyższe niż w grupie kontrolnej GK1. Wynika stąd, iż postęp umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych był większy w przypadku uczniów grupy eksperymentalnej, którzy uczestniczyli w zajęciach wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya (GE1), niż w przypadku uczniów kształconych innymi metodami (GK1).

Etap II. Krok I. Porównanie wyników posttestu w grupach GE1 oraz GE2

W celu kontroli efektu pretestu w odniesieniu do umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych należy wykazać, iż wynik posttestu w grupie eksperymentalnej GE1 jest równy wynikowi posttestu w grupie eksperymentalnej GE2. Średnie wyniki części arytmetycznej posttestu w grupach GE1 I GE2 zamieszczono w tabeli 107.

Tabela 107. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2

Wyniki zadań arytmetycznych w postteście		
grupa	średni wynik	mediana
GE1	83,54%	85,71%
GE2	82,76%	89,29%

Źródło: Badanie własne.

Jak wynika z informacji zamieszczonych w tabeli w grupie eksperymentalnej GE1 50% uczniów uzyskało z zadań arytmetycznych posttestu co najmniej 85,71 %, natomiast w grupie kontrolnej wynik ten wynosił 89,29%.

W celu porównania średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych w postteście w grupach GE1 i GE2 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych w postteście w grupach GE1 i GE2 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 108 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 108. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i GE2 – średnie wyniki zadań arytmetycznych posttestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	235,5
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,521

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych w postteście w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie, zatem grupy GE1 i GE2 należą do tej samej populacji. Pozytywna weryfikacja równoważności grup eksperymentalnych GE1 i GE2 wskazuje na to, iż wykonanie pretestu w grupie GE1 nie miało wpływu na wyniki posttestu w tej grupie. W związku z powyższym można powiedzieć, iż pomiar początkowy nie miał istotnego pod względem statystycznym znaczenia dla umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych u uczniów grupy GE1. Zastosowanie metody G. Polya w odniesieniu do umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów w obu grupach eksperymentalnych (GE1 i GE2) dało statystycznie takie same wyniki.

Etap II. Krok II. Porównanie wyników posttestu w grupie GK1 oraz w grupie GK2

Następnie realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała porównania wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu przez uczniów w grupach kontrolnych GK1 i GK2. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście w obu grupach zamieszczono w tabeli 109.

Tabela 109. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście w grupie kontrolnej GK1 i GK2

Wyniki – zadania arytmetyczne posttestu		
grupa	średni wynik	mediana
GK1	64,29%	69,64%
GK2	62,89%	50,00%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie GK1 50% uczniów uzyskało z zadań arytmetycznych posttestu co najmniej 69,64%, natomiast w grupie kontrolnej GK2 wynik ten był równy 50,0%.

Zgodnie z przyjętym planem Solomona należy wykazać, iż pomiędzy średnimi wynikami z zadań arytmetycznych posttestu w grupach kontrolnych GK1 i GK2 nie ma istotnych statystycznie różnic.

W celu porównania średnich wyników uzyskanych z części arytmetycznej posttestu w grupach kontrolnych GK1 i GK2 wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu w grupach GK1 i GK2 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu w grupach GK1 i GK2 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 110 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 110. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie kontrolnej GK1 i GK2 – średnie wyniki zadań arytmetycznych posttestu

Statystyka	**Wartość statystyki**
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	255,500
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,843

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników z zadań arytmetycznych posttestu w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie, czyli grupy kontrolne GK1 i GK2 należą do tej samej populacji. Wynika stąd, iż średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych posttestu uzyskane przez uczniów w obu grupach kontrolnych (GK1 i GK2) nie różniły się od siebie w sposób istotny statystycznie.

Etap III. Krok I. Porównanie wyników posttestu w grupie GK2 oraz wyników pretestu w grupie GE1

Realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała w następnej kolejności porównania wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu przez uczniów w grupie kontrolnej GK2 oraz wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych pretestu w grupie eksperymentalnej GE1. Średnie wyniki pretestu i posttestu w odpowiednich grupach zamieszczono w tabeli 111.

Tabela 111. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w preteście w grupie eksperymentalnej GE1 oraz średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście w grupie kontrolnej GK2

Wyniki arytmetycznych zadań w grupach GE1 i GK2			
typ testu	grupa	średni wynik	mediana
pretest	GE1	61,59%	63,33%
posttest	GK2	62,58%	50,00%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie GE1 50% uczniów uzyskało z zadań arytmetycznych pretestu co najmniej 63,33 %, natomiast w grupie kontrolnej GK2 za zadania arytmetyczne posttestu wynik ten jest równy 50,0%.

Zgodnie przyjętym planem Solomona należy wykazać, iż pomiędzy średnimi wynikami zadań arytmetycznych posttestu w grupie GK2 i średnimi wynikami pretestu z zadań arytmetycznych w grupie GE1 nie ma istotnych statystycznie różnic. W tym celu wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu w grupie GK2 i średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych pretestu w grupie GE1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych posttestu w grupie GK2 i średnich wyników uzyskanych z zadań arytmetycznych pretestu w grupie GE1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji),

W tabeli 112 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 112. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 (średnie wyniki z zadań arytmetycznych pretestu) i kontrolnej GK2 (średnie wyniki z zadań arytmetycznych posttestu)

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	254,00
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,817

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników z zadań arytmetycznych w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie, czyli grupy eksperymentalna GE1 i kontrolna GK2 należą do tej samej populacji. W związku z powyższym można stwierdzić, iż umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów należących do grupy kontrolnej (GK2) w końcowym pomiarze nie różniła się w sposób istotny statystycznie od umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych, jaką wykazywali uczniowie grupy eksperymentalnej (GE1) w początkowym pomiarze.

Etap III. Krok II. Porównanie wyników posttestu w grupie GK2 oraz wyników pretestu w grupie GK1

Następnie realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała porównania wyników części arytmetycznej posttestu uzyskanych przez uczniów w grupie kontrolnej GK2 oraz wyników części arytmetycznej pretestu w grupie kontrolnej GK1. Średnie wyniki pretestu i posttestu w odpowiednich grupach zamieszczono w tabeli 113.

Tabela 113. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w preteście w grupie kontrolnej GK1 oraz średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście w grupie kontrolnej GK2

Wyniki arytmetycznych zadań w grupach GK1 i GK2			
typ testu	grupa	średni wynik	mediana
pretest	GK1	61,59%	66,67%
posttest	GK2	62,58%	50,00%

Można zauważyć, że w grupie kontrolnej GK1 50% uczniów uzyskało z zadań arytmetycznych pretestu co najmniej 66,67%, natomiast w grupie kontrolnej GK2 za zadania arytmetyczne posttestu wynik ten jest równy 50,0%.

Zgodnie z przyjętym planem Solomona należy wykazać, iż pomiędzy średnimi wynikami z części arytmetycznej posttestu w grupie GK2 i pretestu w grupie GK1 nie ma istotnych statystycznie różnic. W tym celu wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników z zadań arytmetycznych posttestu w grupie GK2 i pretestu w grupie GK1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników z zadań arytmetycznych posttestu w grupie GK2 i pretestu w grupie GK1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 114 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 114. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie kontrolnej GK1 (średnie wyniki z zadań arytmetycznych pretestu) i kontrolnej GK2 (średnie wyniki z zadań arytmetycznych posttestu)

Statystyka	**Wartość statystyki**
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	256,0
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,852

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników z zadań arytmetycznych w obu grupach nie jest istotna statystycznie, zatem grupy kontrolne GK1 i GK2 należą do tej samej populacji. W związku z powyższym można uznać, iż końcowa umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów grupy kontrolnej GK2 nie różniła się w sposób istotny statystycznie od umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, jaką wykazywali uczniowie grupy kontrolnej GK1 w początkowym pomiarze.

Przedstawione powyżej analizy wyników badań własnych zrealizowane zostały zgodnie z założeniami planu Solomona i obejmowały trzy etapy. Podsumowując, na ich podstawie:

– w etapie I potwierdzono prawdziwość hipotezy badawczej – wykazano, iż zastosowanie heurystycznej metody G. Polya wpływa pozytywnie na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej w sposób istotny statystycznie. Uczniowie uczestniczący w zajęciach wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya wykazywali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych niż uczniowie kształceni innymi metodami.
– w etapie II potwierdzono brak efektu zastosowania pretestu – wykazano, iż przeprowadzenie pretestu nie wpłynęło na wyniki uzyskane przez badanych uczniów w postteście. Przeprowadzenie pomiaru początkowego nie miało wpływu na końcowy poziom umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej.
– w etapie III wykazano, że w grupie kontrolnej, w odróżnieniu od grupy eksperymentalnej, nie wystąpiły celowe zmiany w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów. Umiejętność ta okazała się być wyższą jedynie w przypadku uczniów uczestniczących w zajęciach matematycznych wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya.

7.6. Wpływ zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej

W celu sprawdzenia jaki jest wpływ zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej przeprowadzono analizę wyników otrzymanych w toku badań.

Poniżej przedstawiono wyniki badań własnych dotyczących wpływu zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas trzecich, zgodnie z przyjętym na potrzeby badań planem Solomona. Szczegółowy opis kolejnych kroków koniecznych do przeprowadzenia analiz opisano na stronach 159-161 niniejszej pracy.

Etap I. Krok I. Porównanie wyników pretestu w grupach GE1 i GK1

Realizacja badań zgodnie z przyjętym planem Solomona wymagała porównania wyników pretestu uzyskanych przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1. Średnie wyniki pretestu w obu grupach zamieszczono w tabeli 115.

Tabela 115. Średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych w preteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

Wyniki pretestu		
grupa	średni wynik	mediana
GE1	53,91%	60,00%
GK1	19,13%	20,00%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE1 50% uczniów uzyskało z zadań geometrycznych pretestu co najmniej 60,0%, natomiast w grupie kontrolnej wynik ten wynosił tylko 20%.

W celu porównania średnich wyników pretestu w grupach eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych w preteście w grupach GE1 i GK1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych w preteście w grupach GE1 i GK1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 116 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 116. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki zadań geometrycznych pretestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	61,00
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,00

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż hipotezę H_0 należy odrzucić i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych w preteście w obu grupach jest istotna statystycznie, czyli grupy eksperymentalna GE1 i kontrolna GK1 nie należą do tej samej populacji. Otrzymany wynik oznacza, iż początkowa umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych u badanych uczniów w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GE2 różniła się w sposób istotny statystycznie.

W związku z powyższym weryfikacja wpływu zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych przez badanych uczniów okazała się nie być możliwą do wykonania przy pomocy planu Solomona, zakładającego równoważność badanych grup w teście początkowym. Z tego też powodu w dalszej kolejności wykonane zostały tylko te etapy planu Solomona, które mogą okazać się pomocne w ustaleniu, czy zastosowanie heurystycznej metody G. Polya może mieć korzystny wpływ na wyniki uczniów klas trzecich szkoły podstawowej w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych.

Etap I. Krok III. Porównanie wyników posttestu w grupach GE2 i GK2

Dokonano porównania wyników uzyskanych z zadań geometrycznych posttestu przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2. Średnie wyniki z zadań geometrycznych pretestu w obu grupach zamieszczono w tabeli 117.

Tabela 117. Średnie wyniki z zadań geometrycznych uzyskane w postteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2

Wyniki – zadania geometryczne posttestu		
grupa	średni wynik	mediana
GE2	63,41%	66,67%
GK2	34,06%	33,33%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE2 50% uczniów uzyskało z zadań geometrycznych posttestu co najmniej 66,67 %, natomiast w grupie kontrolnej wynik ten wyniósł 33,33%.

W celu porównania średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych posttestu przez uczniów w grupach eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2 wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników z zadań geometrycznych posttestu w grupach GE2 i GK2 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników z zadań geometrycznych posttestu w grupach GE2 i GK2 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 118 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 118. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2 – średnie wyniki zadań geometrycznych posttestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	92,0
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,00

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych posttestu w obu grupach jest istotna statystycznie, czyli grupy eksperymentalna GE2 i kontrolna GK2 nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 117 można zatem stwierdzić, że średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych w postteście w grupie eksperymentalnej GE2 są wyższe niż w grupie kontrolnej GK2. W związku z powyższym można stwierdzić, iż końcowa umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych okazała się być wyższa u uczniów uczestniczących w zajęciach matematycznych wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya, niż u uczniów kształconych innymi metodami. Należy przy tym zaznaczyć, iż zależność taką można wykazać jedynie w przypadku uczniów grupy eksperymentalnej GE2 oraz kontrolnej GK2, którzy nie uczestniczyli w pomiarze początkowym.

Etap I. Krok IV. Wyznaczenie wartości wskaźników D_1 i D_2 postępów uczniów w grupach GE1 i GK1

Do porównania postępów w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych w grupach eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 posłużą odpowiednio wskaźniki $D_1 = GE1_{post} - GE1_{pre}$ (różnica wyniku części geometrycznej posttestu i pretestu) w grupie GE1 oraz $D_2 = GK1_{post} - GK1_{pre}$ (różnica wyniku części geometrycznej posttestu i pretestu) w grupie GK1.

Wartości wskaźników D_1 i D_2 w grupach GE1 i GK1 zamieszczono w tabeli 119.

Tabela 119. Wartości wskaźników D_1 i D_2 dla zadań geometrycznych w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

Wyniki postępów w grupach GE1 i GK1 – zadania geometryczne		
grupa	średni wynik	mediana
GE1	7,32%	5,00%
GK1	5,87%	8,33%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie eksperymentalnej GE1 50% uczniów poprawiło wyniki w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych w postteście stosunku do pretestu o co najmniej 5%, natomiast w grupie kontrolnej GK1 wynik ten wyniósł 8,33%.

Etap I. Krok V. Porównanie postępów w grupach GE1 i GK1

W celu porównania średnich wyników z zadań geometrycznych posttestu w grupach eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK2 wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów w grupach GE1 i GK1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica pomiędzy wskaźnikami D_1 i D_2 średnich postępów uzyskanych przez uczniów w grupach GE1 i GK1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 120 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 120. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki postępów D_1 i D_2 w zadaniach geometrycznych

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	259,5
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,912

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż nie podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich postępów w odniesieniu do zadań geometrycznych w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie, czyli grupy GE1 i GK1 należą do tej samej populacji. Można zatem powiedzieć, iż zastosowanie metody G. Polya nie przyniosło istotnych pod względem statystycznym postępów w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych u uczniów należących do grupy eksperymentalnej GE1. Postęp umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych uczniów tej grupy, nie różnili się od postępu, jaki został odnotowany wśród uczniów grupy kontrolnej GK1, którzy byli kształceni innymi metodami.

Etap II. Krok I. Porównanie wyników posttestu w grupach GE1 oraz GE2

Średnie wyniki posttestu uzyskane z zadań geometrycznych w grupach eksperymentalnych GE1 I GE2 zamieszczono w tabeli 121.

Tabela 121. Średnie wyniki uzyskane z geometrycznych zadań w postteście w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2

Wyniki zadań geometrycznych posttestu		
grupa	średni wynik	mediana
GE1	61,23%	66,67%
GE2	63,41%	66,67%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w obu grupach eksperymentalnych (GE1 i GE2) 50% uczniów uzyskało z zadań geometrycznych posttestu co najmniej 66,67%. W celu porównania średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych posttestu w grupach GE1 i GE2 wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników z zadań geometrycznych posttestu w grupach GE1 i GE2 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników z zadań geometrycznych posttestu w grupach GE1 i GE2 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 122 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 122. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE2 i GE2 – średnie wyniki zadań geometrycznych posttestu

Statystyka	**Wartość statystyki**
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	241,0
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,603

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych posttestu w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie, zatem grupy eksperymentalne GE1 i GE2 należą do tej samej populacji. Pozytywna weryfikacja równoważności grup GE1 oraz GE2 wskazuje, że wykonanie pretestu w grupie GE1 nie miało wpływu na wyniki posttestu w tej grupie. W związku z powyższym można powiedzieć, iż pomiar początkowy nie miał istotnego pod względem statystycznym znaczenia dla umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych u uczniów grupy GE1. Zastosowanie metody G. Polya w odniesieniu do umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów w obu grupach eksperymentalnych (GE1 i GE2) dało statystycznie takie same wyniki.

Etap II. Krok II. Porównanie wyników zadań geometrycznych posttestu w grupie GK1 oraz w grupie GK2

Średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych posttestu w obu grupach kontrolnych (GK1 i GK2) zamieszczono w tabeli 123.

Tabela 123. Średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych w postteście w grupie kontrolnej GK1 i GK2

Wyniki zadań geometrycznych posttestu		
grupa	średni wynik	mediana
GK1	26,14%	20,83%
GK2	34,06%	33,33%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie kontrolnej GK1 50% uczniów uzyskało z zadań geometrycznych posttestu co najmniej 20,83%, natomiast w grupie kontrolnej GK2 wynik ten był równy 33,33%.

Zbadano, czy pomiędzy średnimi wynikami z zadań geometrycznych posttestu w grupach kontrolnych GK1 i GK2 nie ma istotnych statystycznie różnic.

W celu porównania średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych posttestu w grupach GK1 i GK2 wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych w postteście w grupach GK1 i GK2 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych w postteście w grupach GK1 i GK2 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 124 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 124. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie kontrolnej GK1 i GK2 – średnie wyniki geometrycznych zadań posttestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	196,0
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,129

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, iż różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych posttestu w grupach kontrolnych nie jest istotna statystycznie, czyli grupy GK1 i GK2 należą do tej samej populacji. Wynika stąd, iż średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych posttestu uzyskane prze uczniów w obu grupach kontrolnych (GK1 i GK2) nie różniły się od siebie w sposób istotny statystycznie.

Etap III. Krok I. Porównanie wyników posttestu w grupie GK2 oraz wyników pretestu w grupie GE1

Średnie wyniki uzyskane z części geometrycznej pretestu w grupie eksperymentalnej GE1 oraz średnie wyniki uzyskane z części geometrycznej posttestu w grupie kontrolnej GK2 zamieszczono w tabeli 125.

Tabela 125. Średnie wyniki uzyskane z geometrycznych zadań w preteście w grupie eksperymentalnej GE1 oraz średnie wyniki uzyskane z geometrycznych zadań w postteście w grupie kontrolnej GK2

Wyniki w grupach GE1 i GK2			
typ testu	grupa	średni wynik	mediana
pretest	GE1	53,91%	60,00%
posttest	GK2	62,58%	50,00%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że w grupie GE1 50% uczniów uzyskało z zadań geometrycznych pretestu co najmniej 60,0%, podczas gdy w grupie kontrolnej GK2 za zadania geometryczne posttestu wynik ten był równy 50,0%.

Następnie zbadano, czy pomiędzy średnimi wynikami zadań geometrycznych posttestu w grupie GK2 i pretestu z zadań geometrycznych w grupie GE1 nie ma istotnych statystycznie różnic. W tym celu wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych posttestu w grupie GK2 i średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych w preteście w grupie GE1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych posttestu w grupie GK2 i średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych w preteście w grupie GE1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 126 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 126. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK2 – średnie wyniki z geometrycznych zadań pretestu i posttestu

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	236,00
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,536

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych z zadań geometrycznych w obu badanych grupach nie jest istotna statystycznie, czyli grupy GE1 i GK2 należą do tej samej populacji. W związku z powyższym można stwierdzić, iż umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów należących do grupy kontrolnej (GK2) w końcowym pomiarze nie różniła się w sposób istotny statystycznie od umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych, jaką wykazywali uczniowie grupy eksperymentalnej (GE1) w pomiarze początkowym.

Etap III. Krok II. Porównanie wyników posttestu w grupie GK2 oraz wyników pretestu w grupie GK1

Średnie wyniki części geometrycznej pretestu w grupie kontrolnej GK1 i średnie wyniki części geometrycznej posttestu w grupie kontrolnej GK2 zamieszczono w tabeli 127.

Tabela 127. Średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych w preteście w grupie kontrolnej GK1 oraz średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych w postteście w grupie kontrolnej GK2

Wyniki geometrycznych zadań w grupach GK1 i GK2			
typ testu	grupa	średni wynik	mediana
pretest	GK1	19,13%	20,00%
posttest	GK2	34,06%	33,33%

Można zauważyć, że w grupie GK1 50% uczniów uzyskało z zadań geometrycznych pretestu co najmniej 20%, natomiast w grupie kontrolnej GK2 za zadania geometryczne posttestu wynik ten był równy 33,33%.

W dalszej kolejności zbadano, czy pomiędzy tymi wynikami istnieją istotne pod względem statystycznym różnice. W tym celu wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu U Manna-Whitneya. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników z zadań geometrycznych posttestu w grupie GK2 i pretestu w grupie GK1 nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników z zadań geometrycznych posttestu w grupie GK2 i pretestu w grupie GK1 jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 128 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych.

Tabela 128. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie kontrolnej GK1 (średnie wyniki z zadań geometrycznych pretestu) i kontrolnej GK2 (średnie wyniki z zadań geometrycznych posttestu)

Statystyka	Wartość statystyki
Wartość statystyki U Manna-Whitneya	160,0
p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,021

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, że hipotezę H_0 należy odrzucić i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników z zadań geometrycznych w obu grupach jest istotna statystycznie, czyli grupy GK1 i GK2 nie należą do tej samej populacji. Na podstawie tabeli 127 można stwierdzić, że wyniki uzyskane z zadań geometrycznych posttestu w grupie GK2 są wyższe niż wyniki pretestu w grupie GK1.

Jak wykazały powyższe analizy, poziom badanych grup w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych był zróżnicowany. Uniemożliwiło to zastosowanie pełnej procedury metody Solomona. Podsumowując, na podstawie powyższych analiz można przypuszczać, że w przypadku zadań geometrycznych zastosowanie metody G. Polya może nie przynosić oczekiwanych efektów. Wyniki uzyskane przez uczniów grupy eksperymentalnej GE1 wskazują na to, iż zastosowanie metody G. Polya nie przyniosło wyraźnych postępów w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych, w porównaniu z wynikami uczniów grupy kontrolnej GK1, w której metoda ta nie była stosowana.

Na podstawie powyższych analiz można wyciągnąć wniosek, iż zastosowanie heurystycznej metody G. Polya podczas zajęć matematycznych u uczniów klas trzecich szkoły podstawowej przynosi oczekiwane rezultaty w zakresie rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, w tym zadań arytmetycznych. Zastosowanie metody G. Polya okazało się być skuteczne w zakresie rozwijania umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, w tym zadań o charakterze arytmetycznym. Skuteczność zastosowania metody G. Polya w przypadku umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych nie została potwierdzona.

7.7. Zależność między umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych a płcią badanych uczniów

W celu ustalenia, czy istnieje zależność pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych a płcią badanych uczniów przeprowadzono analizy statystyczne. W badaniu brało udział 92 uczniów, w tym 43 chłopców i 49 dziewczynek.

W tabeli 129 zamieszczono wyniki posttestu wszystkich uczniów w podziale na płeć.

Tabela 129. Wyniki uzyskane w postteście w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz grupach kontrolnych GK1 i GK2 z podziałem na płeć badanych uczniów (*N* = 92)

Statystyka	chłopcy	dziewczynki	chłopcy	dziewczynki	chłopcy	dziewczynki
	Wszystkie zadania		Zadania arytmetyczne		Zadania geometryczne	
N	43	49	43	49	43	49
Średnia	67,62%	62,55%	76,15%	70,31%	47,67%	44,40%
Mediana	75,00%	65,00%	82,14%	75,00%	50,00%	42,00%
Odchylenie standardowe	19,93%	21,92%	19,30%	22,98%	28,65%	25,33%

Źródło: Badanie własne.

Można zauważyć, że 50% chłopców uzyskało z wszystkich zadań posttestu co najmniej 75%, natomiast w grupie dziewczynek wynik ten wynosi 65%. Analizując wykonanie zadań arytmetycznych posstestu widać, że 50% chłopców uzyskało co najmniej 82,14%, natomiast w grupie dziewczynek wynik ten wynosi 75%. Wykonanie zadań geometrycznych wypadło najgorzej zarówno w grupie chłopców, jak i dziewczynek, bowiem 50% chłopców osiągnęło wynik jedynie co najwyżej 50%, a w grupie dziewczynek wynik ten był równy 42%.

W celu porównania średnich wyników posttestu w grupach chłopców i dziewczynek wykonano analizę statystyczną wyników za pomocą testu *t* dla prób niezależnych. Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach dziewczynek i chłopców nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach dziewczynek i chłopców jest istotna statystycznie (grupy nie należą do tej samej populacji).

Zastosowanie testu *t* wymagało ustalenia równości wariancji. W tym celu przeprowadzono analizę testem Levene'a.

Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica wariancji wyników posttestu w grupach dziewczynek i chłopców nie jest istotna statystycznie (wariancje w obu grupach są statystycznie równe)

H_1 – różnica wariancji wyników posttestu w grupach dziewczynek i chłopców jest istotna statystycznie (wariancje w obu grupach są statystycznie różne).

W tabeli 130 zawarto wyniki wyznaczonych statystyk testowych dla testu Levene'a.

Tabela 130. Wyniki testu Levene'a równości wariancji wyników posttestu w grupach chłopców i dziewczynek (*N* = 92).

Test Levene'a jednorodności wariancji		**Wszystkie zadania**	**Zadania arytmetyczne**	**Zadania geometryczne**
Wartości statystyk	wartość statystyki F	0,75	3,30	1,08
	p - istotność	0,39	0,07	0,30

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość p > α (α = 0,05) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, iż:

– różnica wariancji wyników posttestu (wszystkie zadania posttestu) w grupach chłopców i dziewczynek nie jest istotna statystycznie. W związku z powyższym można przyjąć, że wariancje wyników zadań w rozważanych grupach chłopców i dziewczynek są statystycznie równe,

– różnica wariancji wyników posttestu (zadania arytmetyczne posttestu) w grupach chłopców i dziewczynek nie jest istotna statystycznie. W związku z powyższym można przyjąć, że wariancje wyników zadań w rozważanych grupach chłopców i dziewczynek są statystycznie równe,

– różnica wariancji wyników posttestu (zadania geometryczne posttestu) w grupach chłopców i dziewczynek nie jest istotna statystycznie. W związku z powyższym można przyjąć, że wariancje wyników zadań w rozważanych grupach chłopców i dziewczynek są statystycznie równe.

W tabeli 131 zawarto wyniki statystyk testu *t* dla prób niezależnych przy założeniu jednorodności wariancji średnich wyników posttestu w grupach chłopców i dziewczynek.

Tabela 131. Wyniki testu *t* dla prób niezależnych równości średnich wyników zadań posttestu w grupach chłopców i dziewczynek ($N = 92$)

Test t równości średnich		Wszystkie zadania	Zadania arytmetyczne	Zadania geometryczne
Wartości statystyk	*t*	1,15	1,31	0,58
	df - liczba stopni swobody	90,00	90,00	90,00
	p - istotność (dwustronna)	0,25	0,19	0,56
	Różnica średnich	5%	6%	3%

Źródło: Badanie własne.

Uzyskana wartość $p > \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, iż:

– różnica średnich wyników posttestu (wszystkie zadania posttestu) w grupach chłopców i dziewczynek nie jest istotna statystycznie,

– różnica średnich wyników posttestu (zadania arytmetyczne posttestu) w grupach chłopców i dziewczynek nie jest istotna statystycznie,

– różnica średnich wyników posttestu (zadania geometryczne posttestu) w grupach chłopców i dziewczynek nie jest istotna statystycznie.

Wykonane testy pozwalają zatem stwierdzić, że średnie wyniki chłopców i dziewczynek uzyskane w postteście z wszystkich zadań, w tym z zadań arytmetycznych i z zadań geometrycznych nie różnią się od siebie. Dodatkowo stałość wariancji pokazuje, że poziom wykonania zadań w obu grupach jest podobny to znaczy, że zmienność średnich wyników uzyskanych w postteście przez chłopców i przez dziewczynki jest taka sama. Zależność ta dotyczy wykonania wszystkich zadań posttestu, w tym także zadań arytmetycznych i geometrycznych posttestu.

W celu ustalenia, czy istnieje zależność pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych a płcią badanych uczniów osobno w grupach eksperymentalnych i kontrolnych przeprowadzono analizy statystyczne. W badaniu brało udział 92 uczniów, w tym 43 chłopców i 49 dziewczynek.

W tabeli 132 zamieszczono wyniki posttestu wszystkich uczniów w podziale na płeć oraz przynależność do grupy eksperymentalnej (GE1, GE2) i kontrolnej (GK1, GK2).

Tabela 132. Wyniki uzyskane w postteście w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz kontrolnych GK1 i GK2 z podziałem na płeć badanych uczniów

Grupa	**Płeć**	**Statystyka**	**Wszystkie zadania**	**Zadania arytmetyczne**	**Zadania geometryczne**
Eksperymentalna GE1 i GE2	chłopcy	N	21	21	21
		Średnia	79,64%	85,18%	66,67%
		Mediana	80,00%	86,00%	67,00%
	dziewczynki	N	25	25	25
		Średnia	74,60%	81,39%	58,69%
		Mediana	77,50%	85,71%	58,33%
Kontrolna GK1 i GK2	chłopcy	N	22	22	22
		Średnia	56,14%	67,53%	29,55%
		Mediana	55,00%	71,43%	33,33%
	dziewczynki	N	24	24	24
		Średnia	50,00%	58,78%	29,51%
		Mediana	46,25%	50,00%	20,83%

Źródło: Badanie własne.

Analizując wyniki posttestu w grupach eksperymentalnych można zauważyć, że 50% chłopców uzyskało ze wszystkich zadań posttestu co najmniej 80%, natomiast w grupie dziewczynek wynik ten wynosił 77,5%. Biorąc pod uwagę wykonanie zadań arytmetycznych posttestu widać, że 50% chłopców uzyskało co najmniej 86%, natomiast w grupie dziewczynek wynik ten wynosił 85,71%. Wykonanie zadań geometrycznych wypadło najgorzej tak w grupie chłopców, jak i dziewczynek, bowiem 50% chłopców osiągnęło wynik jedynie co najwyżej 67%, a w grupie dziewczynek wynik ten był równy 58,33%.

Analizując wyniki posttestu w grupach kontrolnych można zauważyć, że 50% chłopców uzyskało ze wszystkich zadań posttestu co najmniej 55%, natomiast w grupie dziewczynek wynik ten był równy 46,25%. Biorąc pod uwagę wykonanie zadań arytmetycznych posttestu widać, że 50% chłopców uzyskało co najmniej 71,43% natomiast w grupie dziewczynek wynik ten wynosił 50%. Wykonanie zadań geometrycznych wypadło najgorzej zarówno w grupie chłopców, jak i dziewczynek, bowiem 50% chłopców osiągnęło wynik jedynie co najwyżej 33,33%, a w grupie dziewczynek wynik ten był równy 20,83%.

Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 132 można stwierdzić, że wyniki posttestu osiągnięte zarówno przez chłopców, jak i przez dziewczynki w grupach eksperymentalnych są wyższe niż wyniki posttestu osiągnięte przez uczniów w grupach kontrolnych. W celu statystycznej weryfikacji powyższych wyników przeprowadzono test U Manna-Whitneya.

Postawiono następujące hipotezy statystyczne:

H_0 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach eksperymentalnych i kontrolnych dla dziewczynek i chłopców nie jest istotna statystycznie (grupy należą do tej samej populacji),

H_1 – różnica średnich wyników otrzymanych przez uczniów w postteście w grupach eksperymentalnych i kontrolnych dla dziewczynek i chłopców jest istotna statystycznie, (grupy nie należą do tej samej populacji).

W tabeli 133 zawarto wyznaczone statystyki testowe.

Tabela 133. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupach eksperymentalnych i kontrolnych z podziałem na płeć badanych uczniów

Płeć	Statystyka	Wszystkie zadania	Zadania arytmetyczne	Zadania geometryczne
chłopcy	Statystyka U Manna-Whitneya	75,00	115,00	44,50
	P – Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,00	0,00	0,00
dziewczynki	Statystyka U Manna-Whitneya	106,50	138,50	98,00
	p -Istotność asymptotyczna (dwustronna)	0,00	0,00	0,00

Źródło: Badanie własne.

Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 133 można stwierdzić, iż uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych w postteście przez chłopców w obu grupach (eksperymentalnych i kontrolnych) jest istotna statystycznie, czyli grupy eksperymentalne i kontrolne nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 132 można stwierdzić, że średnie wyniki posttestu uzyskane przez chłopców w grupach eksperymentalnych (GE1 i GE2) są wyższe niż średnie wyniki posttestu uzyskane przez chłopców w grupach kontrolnych (GK1 i GK2). Zależność ta dotyczy zarówno wszystkich zadań posttestu, jak i zadań arytmetycznych i geometrycznych.

Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 133 można stwierdzić, iż uzyskana wartość $p < \alpha$ ($\alpha = 0,05$) wskazuje, iż należy odrzucić hipotezę H_0 i jako prawdziwą przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można stwierdzić, że różnica średnich wyników uzyskanych w postteście przez dziewczynki w obu grupach (eksperymentalnych i kontrolnych) jest istotna statystycznie, czyli grupy eksperymentalne i kontrolne nie należą do tej samej populacji. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 132 można stwierdzić, że średnie wyniki posttestu uzyskane przez dziewczynki w grupach eksperymentalnych (GE1 i GE2) są wyższe niż w średnie wyniki posttestu uzyskane przez dziewczynki w grupach kontrolnych (GK1 i GK2).

Zależność ta dotyczy zarówno wszystkich zadań posttestu, jak i zadań arytmetycznych i geometrycznych.

Podsumowując, przeprowadzone analizy statystyczne pozwalają stwierdzić, iż nie ma istotnych statystycznie różnic w średnich wynikach uzyskanych w postteście przez dziewczynki i przez chłopców. Można zatem powiedzieć, iż nie ma zależności pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej a ich płcią. Ponadto nie ma zależności pomiędzy umiejętnością rozwiązywania zadań arytmetycznych oraz zadań geometrycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej a ich płcią.

7.8. Weryfikacja hipotez

Przedstawione w poprzednich podrozdziałach wyniki przeprowadzonych analiz statystycznych pozwalają na weryfikację postawionych w rozprawie hipotez szczegółowych oraz hipotezy głównej. W niniejszym podrozdziale pracy zawarto ich weryfikację.

W pierwszej kolejności weryfikacji poddano trzy hipotezy szczegółowe postawione w ramach hipotezy głównej.

Przyjęto pierwszą hipotezę szczegółową w brzmieniu: *Umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej, biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem metody G. Polya jest wyższa od umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów kształconych innymi metodami*. O przyjęciu powyższej hipotezy zadecydowały wyniki analiz statystycznych opisanych w podrozdziale 7.5. Zaprezentowane analizy pokazują, iż istnieje istotna statystycznie różnica pomiędzy średnimi wynikami uzyskanymi w postteście z części arytmetycznej przez uczniów grup eksperymentalnych GE1 i GE2 a średnimi wynikami posttestu z części arytmetycznej uzyskanymi przez uczniów grup kontrolnych GK1 i GK2. Uczniowie uczestniczący w zajęciach matematycznych z wykorzystaniem heurystycznej metody G. Polya prezentowali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych, niż uczniowie, którzy byli kształceni innymi metodami. W związku z powyższym postawiona w pracy pierwsza hipoteza szczegółowa może zostać uznana za prawdziwą.

Odrzucono drugą hipotezę szczegółową w brzmieniu: *Umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej, biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem metody G. Polya jest wyższa od umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów kształconych innymi metodami*. O odrzuceniu niniejszej hipotezy zadecydowały wyniki analiz statystycznych opisanych w podrozdziale 7.6. Zaprezentowane analizy wskazują, iż nie istnieje istotna statystycznie różnica pomiędzy średnimi wynikami uzyskanymi w postteście z części geometrycznej przez uczniów grup eksperymentalnych GE1 i GE2 a średnimi wynikami posttestu z części geometrycznej uzyskanymi przez uczniów grup kontrolnych GK1 i GK2. Uczniowie uczestniczący w zajęciach matematycznych z wykorzystaniem heurystycznej metody G. Polya prezentowali w końcowym pomiarze podobną umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych, co uczniowie, którzy byli kształceni innymi metodami. W związku z powyższym postawiona w pracy druga hipoteza szczegółowa zostaje uznana za nieprawdziwą.

Przyjęto trzecią hipotezę szczegółową w brzmieniu: *Nie ma zależności pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych u badanych uczniów a ich płcią*. O przyjęciu hipotezy zadecydowały wyniki analiz statystycznych opisanych w podrozdziale 7.7. Zaprezentowane analizy ukazują, iż nie istnieje istotna statystycznie różnica pomiędzy średnimi wynikami uzyskanymi w postteście przez badane dziewczynki i przez badanych chłopców. W związku z powyższym nie wykryto zależności pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, w tym zadań arytmetycznych i geometrycznych przez badanych uczniów a ich płcią. Na podstawie powyższego wniosku postawiona w pracy trzecia hipoteza szczegółowa zostaje uznana za prawdziwą.

Następnie dokonano weryfikacji hipotezy głównej postawionej w niniejszej pracy. Przyjęto hipotezę główną w brzmieniu: *Umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej, biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem metody G. Polya jest wyższa od umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów kształconych innymi metodami*. O przyjęciu niniejszej hipotezy zadecydowały wyniki analiz statystycznych opisanych w podrozdziale 7.4. Zaprezentowane analizy ukazują, iż istnieje statystyczna różnica pomiędzy średnimi wynikami uzyskanymi w postteście przez uczniów grup eksperymentalnych GE1 i GE2 a średnimi wynikami posttestu uzyskanymi przez uczniów grup kontrolnych GK1 i GK2. Uczniowie uczestniczący w zajęciach matematycznych z zastosowaniem heurystycznej metody G. Polya prezentowali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, niż uczniowie, którzy byli kształceni innymi metodami. W związku z powyższym postawiona w rozprawie hipoteza główna zostaje uznana za prawdziwą.

W dalszej części dysertacji zaprezentowano analizę wyników badań zrealizowanych techniką obserwacji.

7.9. Analiza wyników badań zrealizowanych techniką obserwacji w badanych grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 i kontrolnych GK1 i GK2 oraz rozmów z nauczycielami prowadzącymi zajęcia matematyczne w tych grupach

W niniejszej części rozprawy zaprezentowana zostanie analiza danych zebranych podczas obserwacji pracy uczniów klas trzecich szkoły podstawowej podczas zajęć matematycznych oraz rozmów z nauczycielkami badanych grup. Obserwacje prowadzone były we wszystkich czterech grupach uczestniczących w badaniach i dotyczyły sposobu pracy uczniów podczas zajęć matematycznych. Rozmowy zostały przeprowadzone po zakończeniu działań eksperymentalnych z nauczycielkami grup eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz grup kontrolnych GK1 i GK2.

W trakcie trwania obserwacji zauważono szereg różnic pomiędzy sposobami i formami pracy uczniów podczas zajęć matematycznych prowadzonych przez nauczycielki badanych grup oraz podczas zajęć matematycznych wykorzystujących heurystyczna metodę G. Polya prowadzonych przez autorkę niniejszej dysertacji. Poniżej zamieszczono analizę pracy uczniów podczas zajęć obojga typu.

Nauczycielki podczas swoich zajęć pracowały w oparciu o pakiety edukacyjne z wydawnictwa Nowa Era – *Nowe już w szkole*. Podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej nauczycielki korzystały zarówno z książki, jak i z zeszytów ćwiczeń. Uczniowie każdej z badanych grup korzystali także z zeszytu w kratkę. Dodatkowo zajęcia były urozmaicane przez nauczycielki dodatkowymi zadaniami, kartami pracy oraz wydrukowanymi, samodzielnie przygotowanymi ćwiczeniami, służącymi najczęściej jako „rozgrzewka” przed właściwą częścią zajęć.

Pierwsza różnica pomiędzy zajęciami prowadzonymi w grupach eksperymentalnych a zajęciami prowadzonymi w grupach kontrolnych dotyczyła sposobu pracy uczniów nad zadaniami, które rozwiązywali oni podczas zajęć matematycznych. Zajęcia w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 prowadzone były z wykorzystaniem heurystycznej metody G. Polya. W trakcie ich trwania uczniowie rozwiązywali niemal wyłącznie zadania o charakterze problemowym. Przykładowy przebieg pracy nad rozwiązaniem zadania z wykorzystaniem heurystycznej metody G. Polya został przedstawiony w podrozdziale 5.5.2. Ponadto, na początku niemalże każdych zajęć w grupach eksperymentalnych, uczniowie w ramach „rozgrzewki" wykonywali zadania bezproblemowe oraz mieli możliwość uczestniczenia w różnorakich grach i zabawach matematycznych.

W trakcie obserwowanych zajęć matematycznych w grupach kontrolnych nauczycielki pracowały z wykorzystaniem innych niż heurystyczna metoda G. Polya metod kształcenia. Metoda G. Polya nie była wykorzystywana podczas zajęć w grupach kontrolnych. Uczniowie grup kontrolnych wykonywali zadania o charakterze problemowym, w tym także zadania znajdujące się w podręcznikach i zeszytach ćwiczeń. Poniżej zamieszczono przykładowe zadania, których rozwiązywanie zaobserwowano w trakcie trwania zajęć matematycznych w grupach kontrolnych. Wszystkie przytoczone zadania znajdowały się w podręczniku, z którym pracowali obserwowani uczniowie.[524]

Zadanie 1: Z biblioteki publicznej wypożyczono w ciągu dwóch dni 530 książek. Pierwszego dnia wypożyczono o 130 książek więcej niż drugiego dnia. Ile książek wypożyczono pierwszego, a ile drugiego dnia?

Zadanie 2: Gabryś układał mozaikę z kwadratowych klocków. Połowa klocków była w kolorze czerwonym, połowa pozostałych to klocki niebieskie. Reszta klocków to dwa klocki białe i dwa żółte. Z ilu klocków Gabryś ułożył tę mozaikę?

Zadanie 3: Albert interesuje się samolotami. Jego wymarzony album o samolotach kosztuje 276 zł. Albert może już go kupić, ponieważ uzbierał pewną sumę, a rodzice dołożyli mu o 76 zł więcej niż miał w skarbonce. Ile złotych miał Albert w skarbonce? Ile dołożyli mu rodzice?

Zajęcia prowadzone w grupach eksperymentalnych i w grupach kontrolnych różniły się ponadto pod względem formy pracy uczniów. Podczas zajęć w grupach

[524] K. Bielenica, M. Bura, M. Kwil, B. Lankiewicz: *Nowe już w szkole. Matematyka*, cz. 4. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era Sp. z o.o., 2013.

kontrolnych najczęściej to nauczycielki decydowały o formie pracy, jaka obowiązywała na całych zajęciach lub też podczas rozwiązywania poszczególnych zadań. Obserwacje wykazały, że na zajęciach w grupach kontrolnych dominowała indywidualna forma pracy uczniów, w zamyśle której uczniowie mieli pracować samodzielnie nad rozwiązaniem zadań. W rzeczywistości, w zdecydowanej większości przypadków, praca niektórych uczniów ograniczała się jednak do oczekiwania na podanie gotowego rozwiązania przez innego ucznia. Taka forma pracy powodowała występowanie u uczniów zachowań takich, jak bierność, brak zainteresowania rozwianiem zadania, czy odpisywanie gotowej odpowiedzi z tablicy. Sporadycznie w trakcie zajęć w grupach kontrolnych nauczycielki korzystały z grupowej formy pracy.

Praca w parach oraz w małych grupach były najczęstszymi formami organizacyjnymi zajęć prowadzonych w grupach eksperymentalnych. Uczniowie tych grup mieli możliwość samodzielnego dobierania się w pary lub samodzielnego tworzenia małych grup. Czasami przynależność do grupy była określana poprzez losowanie lub odliczanie. Starano się, by uczniowie nie przyzwyczajali się do stałego składu grup, w których pracowali. Zauważono, iż aktywność uczniów pracujących w grupach o składzie, do którego byli już przyzwyczajeni, bardzo często była ograniczona. Wiedzieli oni bowiem, że ich obowiązki mogą zostać wykonane przez innych, bardziej chętnych do pracy kolegów. Zamysłem autorki niniejszej pracy było tworzenie grup zróżnicowanych pod względem umiejętności matematycznych poszczególnych ich członków. Dzięki temu zabiegowi każdy uczeń mógł przyjmować różne role. Tym sposobem dany uczeń w jednej grupie mógł być uczniem najsilniejszym, pełniącym rolę grupowego lidera, podczas gdy pracując w innym składzie osobowym mógł być osobą wymagającą udzielenia pomocy ze strony kolegów. Prowadząc zajęcia w grupach eksperymentalnych dało się zauważyć, że uczniowie bardzo chętnie pracowali w parach lub w małych grupach oraz, że te formy pracy sprawiały im ogromną radość. Ponadto widoczny był wzrost zaangażowania uczniów w sam proces rozwiązywania zadań oraz zwiększenie ich zainteresowania w zakresie osiągnięcia prawidłowego wyniku. Sama przynależność do grupy i wynikające z niej poczucie wspólnoty z kolegami i koleżankami przyczyniały się do tego, iż uczniowie chętniej podejmowali aktywność związaną z pracą nad rozwiązaniem zadania. Istotnym elementem grupowej pracy nad rozwiązaniem matematycznego zadania jest to, iż uczniowie mogą w swobodny sposób wymieniać się swoimi pomysłami, co skutkuje z kolei generowaniem większej ilości pomysłów prowadzących do uzyskania rozwiązania.

W trakcie zajęć w grupach eksperymentalnych zauważono, że w przypadku, gdy któryś z członków grupy nie rozumiał treści zadania, to pozostali uczniowie wchodzili w rolę nauczyciela i starali się wyjaśniać niezrozumiałe kwestie. W zdecydowanej większości przypadków samopomoc koleżeńska okazywała się być wystarczającą, a interwencja prowadzącej nie była konieczna. Tego typu sytuacje pozwalały uczniom nabierać pewności siebie i zaufania co do własnych umiejętności matematycznych. Kolejnym argumentem przemawiającym za organizowaniem zajęć matematycznych w formie pracy grupowej jest to, iż uczniowie uczą się dzięki nim współpracy, a także argumentowania i uzasadniania swojego stanowiska. To cenne umiejętności, które są przydatne nie tylko na zajęciach matematycznych ale przede wszystkim w codziennym życiu. Dodatkową korzyścią płynącą ze współpracy z innymi osobami jest możliwość ćwiczenia konstruktywnego rozwiązywania powstających w grupie konfliktów.

Interesującą kwestią było prześledzenie kolejnych kroków wykonywanych przez uczniów podczas pracy nad rozwiązaniem zadania. Pierwszym istotnym elementem było poznanie najczęstszej formy zapoznawania się uczniów z treścią zadań, które rozwiązywali.

W przypadku zajęć obserwowanych w grupach kontrolnych treść zadania była najczęściej odczytywana na głos przez jednego ucznia, podczas gdy pozostali uczniowie mieli śledzić wzrokiem czytany tekst. Podczas rozmów nauczycielki badanych grup przyznały, iż bardzo często korzystają z takiej formy zapoznawania się uczniów z treścią zadania. Ich zdaniem jest to efektywna i lubiana przez uczniów forma pracy. Podczas zajęć obserwowanych w grupach kontrolnych uczniowie sami zgłaszali się do odczytywania na głos treści zadania lub też byli wyznaczani do tej czynności przez nauczyciela. Najczęściej to nauczyciel wskazywał, który uczeń przeczyta treść zadania na forum klasy. W praktyce największe szanse na głośne odczytanie treści zadania mieli ci uczniowie, którzy czytali w sposób płynny i zrozumiały. W poszczególnych klasach kilkoro uczniów regularnie odczytywało na głos treść zadania, osoby te powtarzały się podczas kolejnych zajęć. Uczniowie z obniżoną techniką czytania oraz uczniowie, którzy nie zgłaszali swojej chęci odczytania treści zadania na forum klasy byli podczas tej czynności najczęściej pomijani. W jednej z grup kontrolnych najczęstszą formą zapoznawania się uczniów z treścią zadania było jego głośnie odczytanie przez nauczyciela. Zadaniem uczniów było wtedy śledzenie wzrokiem odczytywanych treści. Z obserwacji pracy uczniów podczas takiej formy zapoznawania się z treścią zadania matematycznego można było wywnioskować, iż zdecydowana ich większość nie śledziła wzrokiem odczytywanego przez inną osobę tekstu. Działo się tak bez względu na to, czy zadanie odczytywał inny uczeń, czy też nauczycielka. Uczniowie w tym czasie często zajmowali się rozmowami lub też innymi czynnościami, niezwiązanymi z rozwiązaniem zadania ani z tokiem zajęć w ogóle. Często uczniowie ci, zapytani o szczegóły odczytanego na forum klasy zadania, nie potrafili udzielić żadnej odpowiedzi.

W rozmowach z wychowawcami poszczególnych klas uczestniczących w eksperymencie często padało stwierdzenie, iż w realiach szkolnych nie ma wystarczająco dużo czasu na to, by uczniowie mogli samodzielnie odczytywać treść wszystkich zadań matematycznych. Ten sposób pracy wydłuża bowiem czas potrzebny na rozwiązanie poszczególnych zadań i tym samym zmniejsza ilość rozwiązanych w czasie trwania zajęć zadań. Dodatkowo nauczycielki zwracały uwagę na to, iż często zdarza się, że uczniowie po samodzielnym odczytaniu treści zadania nie rozumieją go. W opiniach badanych nauczycielek, największe trudności w zakresie rozumienia treści matematycznych zadań wykazują ci uczniowie, których technika czytania jest obniżona. W szczególności chodzi tu o uczniów z grupy ryzyka specyficznych trudności w uczeniu się pod postacią dysleksji rozwojowej.

Podczas trwania zajęć w gruchach eksperymentalnych, uczniowie samodzielnie zapoznawali się z treścią każdego matematycznego zadania. Każdorazowo przeznaczano odpowiednią ilość czasu na samodzielne, ciche przeczytanie treści zadania przez każdego ucznia. W przypadku uczniów wykazujących trudności w czytaniu prowadząca udzielała pomocy w zakresie odczytania treści zadania. Podczas, gdy uczniowie pracowali w małych grupach, pomocy w odczytaniu treści zadania słabszym kolegom udzielali pozostali uczniowie z grupy.

Kolejny element dotyczył sposobów rozwiązywania przez uczniów zadań matematycznych. Obserwacje poczynione w grupach kontrolnych wykazały, iż po odczytaniu treści zadania następowało wybranie ucznia, który chciał podzielić się z resztą klasy swoim pomysłem na jego rozwiązanie. Najczęściej to uczniowie samodzielnie zgłaszali się do rozwiązania zadania na tablicy. Zdarzało się, choć rzadko, że to nauczyciele wyznaczali konkretnego ucznia do wykonania tej czynności. Wybrany uczeń opowiadał na forum klasy swój pomysł, po czym po jego akceptacji ze strony nauczyciela, zapisywał obliczenia na tablicy. W przypadku, gdy propozycja nie była poprawna, zostawała ona skorygowana przez nauczyciela lub też następowało wybranie innego ucznia do rozwiania zadania na tablicy. Najczęściej nauczycielki prosiły, by każdy uczeń sam rozwiązywał zadanie i sprawdzał poprawność swoich obliczeń zgodnie z propozycją zapisaną na tablicy. Jednakże większość uczniów w klasie tego nie czyniła, ograniczając swą aktywność do obserwowania rozwiązywania zadania na tablicy. Prezentowany model pracy ograniczał aktywność uczniów, nie sprzyjał także rozwijaniu samodzielności ich myślenia.

Nauczycielki podczas rozmów zaznaczały, iż często proszą uczniów o samodzielne rozwiązanie zadania, a następnie, po upływie czasu wyznaczonego na jego rozwiązanie, proszą jedną osobę o zapisanie swojej propozycji na tablicy. Ponadto zauważyły one także, iż często zdarza się, że część uczniów w klasie nie podejmuje się próby samodzielnego rozwiązania zadania, a jedynie czeka na gotową odpowiedź. Wszystkie rozmówczynie uznają tego typu zachowania za nieakceptowane i szkodliwe dla samych uczniów. Deklarują one także, iż starają się zapobiegać zachowaniom tego typu, regularnie zachęcając wszystkich uczniów do aktywnej pracy na zajęciach.

Po prawidłowym rozwiązaniu zadania na tablicy, uczniowie w grupach kontrolnych zapisywali obliczenia w zeszytach. Uczniowie, którzy samodzielnie rozwiązywali zadanie weryfikowali swoje obliczenia i wyniki z wynikami zaprezentowanymi na tablicy. Końcowym etapem pracy nad rozwiązaniem zadania matematycznego w grupach kontrolnych było sformułowanie i zapisanie w zeszytach odpowiedzi. Najczęściej odpowiedź formułował na głos uczeń, który rozwiązywał zadanie na tablicy.

Uczniowie grup kontrolnych bardzo rzadko sprawdzali poprawność otrzymanych wyników. W nielicznych przypadkach, kiedy sprawdzenie rozwiązania w ogóle miało miejsce, ograniczało się jedynie do słownego podsumowania przez nauczyciela poprawności wykonania zadania. W rozmowach wychowawczynie klas przyznawały, iż w codziennej pracy na zajęciach wielokrotnie brakuje czasu na bardziej szczegółowe omawianie rozwiązywanych zadań. Nauczycielki są zdania, iż powodem owego braku czasu może być zbyt duża ilość wykonywanych zadań. Nauczycielki zaznaczały, iż oczekiwaniem rodziców jest wykonanie wszystkich, a przynajmniej większej części zadań zawartych w zeszytach ćwiczeń i podręcznikach. Dlatego też często, próbując sprostać tym wymaganiom rozwiązują one ze swoimi uczniami więcej zadań niż wynika z potrzeby zrozumienia metody i wykorzystania jej do rozwiązywania kolejnych zadań. Zdaniem rozmówczyń warto byłoby rozwiązywać mniej zadań podczas zajęć, jednak robić to w sposób bardziej szczegółowy i z większym zrozumieniem przez uczniów.

Takie podejście nauczycielek należy uznać za nieprawidłowe. To one bowiem decydują o przebiegu procesu dydaktycznego. Jeżeli istnieje taka potrzeba, to powinny asertywnie wytłumaczyć rodzicom powody podejmowania swoich decyzji i działań.

Podczas zajęć matematycznych w grupach eksperymentalnych, po samodzielnym przeczytaniu przez uczniów treści zadania, następował czas na jego omówienie. W tym momencie uczniowie mogli zadawać pytania odnośnie treści zadania. Wyjaśniano wątpliwości, które nasuwały się uczniom po jego przeczytaniu. Bardzo często zdarzało się, szczególnie na początku trwania eksperymentu, że po samodzielnym odczytaniu treści zadania, poszczególni uczniowie nie rozumieli jego treści. W takich przypadkach następowało ponowne odczytanie treści zadania – tym razem na głos przez prowadzącą zajęcia. Uczniowie w tym czasie mieli zastanowić się, czy nadal treść jest dla nich niezrozumiała. Prowadząca zadawała także pytania pomocnicze, których celem było naprowadzenie uczniów na odpowiedni tok rozumowania. Przykładowymi pytaniami były:

- *O czym jest to zadanie?*
- *Gdzie dzieje się zadanie?*
- *Jakie osoby występują w zadaniu?*
- *Co wiemy z treści zdania?*
- *Co mamy policzyć?*
- *Jaka jest niewiadoma?*
- *Czy mamy już wszystkie potrzebne informacje?* itp.

Po ponownym odczytaniu treści zadania, większość uczniów rozumiała jego treść. Jak wynika z poczynionych obserwacji, uczniowie klas trzecich wykazują bardzo duże trudności w zakresie czytania ze zrozumieniem tekstów matematycznych. Ponadto wykazują oni trudności w zakresie dostrzeganie wzajemnych relacji między wielkościami danymi i szukanymi w zadaniach. Logicznym zdaje się być to, że aby uczniowie mogli nauczyć się rozumienia oraz analizy treści zadań powinni mieć możliwość ich samodzielnego odczytywania i interpretowania. Pomocne są przy tym dodatkowe pytania kierowane w ich stronę przez prowadzącego. Należy jednak pamiętać, by nie wyręczać uczniów i nie podawać im gotowych wniosków.

Podczas zajęć w grupach eksperymentalnych dało się zauważyć, iż uczniowie najczęściej wykazywali się małą wiarą we własne możliwości i umiejętności matematyczne. Byli niepewni swojej wiedzy. Wielu uczniów z góry zakładało, że nie zrozumie zadania w momencie, gdy odczyta jego treść samodzielnie. Duża grupa uczniów po przeczytaniu zadania prosiła prowadzącą o podejście i pomoc w jego zrozumieniu. Chcieli upewnić się, czy na pewno dobrze zrozumieli jego treść. Prowadząca w takich sytuacjach prosiła, by uczeń opowiedział jej treść przeczytanego zadania oraz spróbował określić jaka jego część jest zrozumiała, a która wymaga dalszego objaśnienia. Uczniowie opowiadali prowadzącej treść zadania, a także podawali swoje propozycje jego rozwiązania. Najczęściej okazywało się, że uczniowie ci od samego początku dokonywali poprawnej analizy treści zadania i wyciągali słuszne wnioski. Potrafili także wygenerować poprawne pomysły jego rozwiązania. Jedynym problemem był zatem brak wiary w słuszność swojego rozumowania. Wielokrotnie do upewnienia się uczniów co do poprawności ich własnego rozumowania wystarczyło opowiedzenie na głos treści zadania oraz zwerbalizowanie w obecności prowadzącej wygenerowanych przez siebie pomysłów jego rozwiania.

Założeniem pracy w grupach eksperymentalnych było zwiększenie samodzielności uczniów podczas rozwiązywania matematycznych zadań poprzez wykorzystanie metody G. Polya. W związku z powyższym każdy z etapów pracy nad zadaniem był wykonywany przez uczniów samodzielnie. W momencie, gdy dominowała praca grupowa lub w parach, uczniowie wspólnie wykonywali kolejne etapy pracy nad zadaniem matematycznym.

Po upewnieniu się, iż uczniowie grup eksperymentalnych rozumieją treść zadania, każdy z nich miał zapisać w swoim zeszycie własną propozycję, swój własny pomysł na jego rozwiązanie. W przypadku gdy praca przybierała formę grupową, zadaniem grupy było wygenerowanie pomysłu lub kilku pomysłów rozwiązania. Podawanie własnych propozycji rozwiązywania zadań okazało się być trudnym dla uczniów etapem pracy, gdyż bardzo często czekali oni na gotowe pomysły zaproponowane przez kolegów. Zdarzało się także, szczególnie na początku trwania eksperymentu, że niektórzy uczniowie nie byli w stanie wygenerować ani jednego prawidłowego pomysłu. Z tego też względu na zajęciach eksperymentalnych najczęściej wykorzystywano zadania problemowe, odrywające uczniów od usztywniającego myślenie schematu oraz zadania bardziej zaawansowane, zawierające dane, których nie da się uporządkować w żadnym poznanym wcześniej schemacie. [525] Gdy wszyscy uczniowie zakończyli pracę nad rozwiązywaniem zadania następowała prezentacja otrzymanych rezultatów.

[525]D. Klus-Stańska, A. Kalinowska: *Rozwijanie myślenia matematycznego…,* s. 31-32.

Zauważono, iż uczniowie chętnie dzielili się na forum klasy swoimi pomysłami. Początkowo, gdy zaprezentowana propozycja okazywała się być błędna uczniowie reagowali złością lub wycofaniem. W miarę upływu czasu dało się jednak zauważyć, iż uczniowie ci coraz lepiej radzili sobie z doznawanymi porażkami. W przypadku, gdy przedstawiona propozycja rozwiązania okazywała się być prawidłową, u uczniów zauważalna była radość i duma z osiągniętego sukcesu.

Podczas zajęć w grupach eksperymentalnych uczniowie sprawdzali poprawność swoich rozwiązań. W tym celu wykonywali dodatkowe obliczenia, opowiadali dlaczego ich zdaniem zadanie jest rozwiązane poprawnie, lub dlaczego ich zdaniem nie rozwiązali go w sposób prawidłowy. Na początku widoczny był dość duży opór uczniów i niechęć do wykonywania sprawdzenia wyników. Niektórzy uczniowie twierdzili, że skoro posiadają już rozwiązanie zadania, to nie ma potrzeby, by sprawdzać jego poprawność. Wielokrotnie zaobserwowano, iż część uczniów po prostu nie była zainteresowana tym, czy ich rozwiązanie jest prawidłowe. Posiadanie rozwiązania było dla nich wystarczająco satysfakcjonujące. Pod koniec trwania eksperymentu większa cześć uczniów z grup eksperymentalnych nabierała nawyku sprawdzania otrzymanych przez siebie rezultatów i nie wymagała przypominania o tej konieczności.

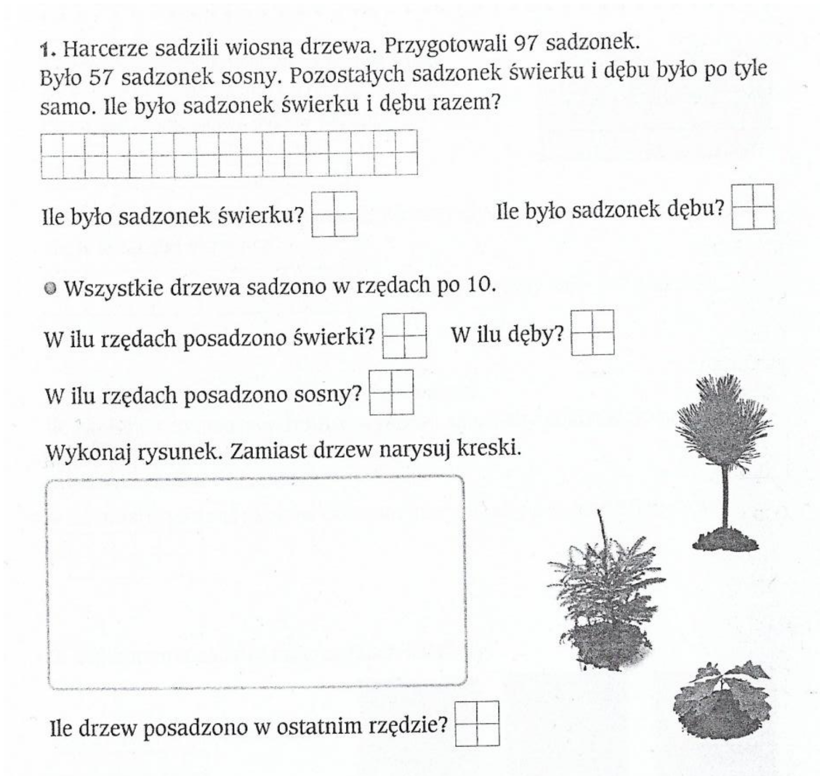
Końcowym etapem pracy nad zadaniem matematycznym podczas zajęć w grupach eksperymentalnych była refleksja nad zadaniem – rzut oka wstecz. Najczęściej etap ten polegał na omówieniu wykonanego zadania. Często omawianie to przybierało formę dyskusji nad zadaniem. Zauważono, iż uczniowie bardzo chętnie wypowiadali się na temat rozwiązanego zadania. Często mieli dodatkowe pytania, żywo reagowali na wypowiedzi kolegów i koleżanek. Zdarzało się także, iż uczniowie samodzielnie wychodzili z inicjatywą skonstruowania własnego zadania, które będzie zadaniem podobnym do tego, które wykonali przed chwilą. W takich sytuacjach uczniowie mieli możliwość wykonania zaplanowanych przez siebie czynności.

W trakcie trwania zajęć w grupach eksperymentalnych wielokrotnie dało się odczuć usztywnienie myślenia uczniów oraz brak umiejętności wychodzenia przez nich poza poznane wcześniej schematy postępowania. Powyższe stwierdzenie zostanie podparte dwoma przykładami. Podczas zajęć w jednej z grup eksperymentalnych uczniowie mieli wpisać w okienka znaki działań tak, by działania były poprawne, np.: $12 \square 30 = 42$ lub $8 \square 8 = 64$. Pomimo, iż uczniowie zrozumieli treść zadania i potrafili wyjaśnić, co mają zrobić, część z nich nie chciała podjąć się próby wpisania prawidłowych znaków działań. Uczniowie ci wyjaśnili, iż do tej pory rozwiązywali zadania, w których w puste okienka należało wpisać liczbę, a nie znak działania. Dlatego też uznali, iż zaproponowane im zadanie jest błędne. Uczniowie byli zatem tak bardzo przyzwyczajeni do pewnego schematu, że pomimo prawidłowego zrozumienia polecenia nie byli w stanie rozwiązać zadania. Wykraczało ono bowiem poza znany im do tej pory sposób postępowania. Innym razem w zadaniu pojawiły się osie liczbowe w niestandardowym ułożeniu. Większość uczniów uznała je za błędnie narysowane i niepoprawne, ponieważ ich zdaniem oś liczbowa zawsze powinna być ułożona poziomo na kartce, bo do tej pory taką właśnie oś liczbową spotykali w rozmaitych zadaniach. Uczniowie uznali, że oś liczbowa, która jest usytuowana w jakimkolwiek innym, nieznanym im położeniu, jest osią błędnie narysowaną. Tutaj kolejny raz uczniowie nie potrafili wyjść poza poznany wcześniej schemat. Dopiero po analizie każdej kolejnej osi liczbowej i po sprawdzeniu, czy dany rysunek spełnia wymogi, jakie powinna spełniać oś liczbowa, uczniowie podejmowali się wykonania zadania.

Pracując z uczniami, którzy na co dzień rozwiązywali wiele zadań w zeszytach ćwiczeń i kartach pracy dało się zauważyć, że duża część z nich ma trudności w zakresie samodzielnego rozplanowania zapisu własnych obliczeń lub notatek w obrębie kartki w zeszycie. Uczniowie grup eksperymentalnych bardzo często prosili o to, by zapisać na tablicy obliczenia i odpowiedzi do poszczególnych, rozwiązanych już zadań, ponieważ sami nie wiedzieli w jaki sposób dokonać tego zapisu. Co zaskakujące, zdarzało się, że uczniowie pytali, czy każde obliczenie ma zostać zapisane w kratkach poniżej, jedne pod drugim, czy też można zapisać je obok siebie. Zdarzało się także, że uczniowie skreślali swoje prawidłowo zapisane obliczenia, ponieważ na tablicy zostały one zapisane w inny sposób. Szczególnie na początku trwania eksperymentu niektórzy uczniowie wstrzymywali się z zapisem swoich obliczeń, do momentu skonsultowania z prowadzącą, nie ich poprawności merytorycznej, a jedynie formy graficznej zapisu. Wiele czasu trwało przekonanie uczniów, co do tego, że forma zapisu (np.: to, czy obliczenia będą zapisane obok siebie, czy też w kolejności jedne pod drugimi) nie ma większego znaczenia, natomiast ważne jest to, by zapis był czytelny i zrozumiały oraz – co bardzo ważne – pomocny dla samych uczniów. Często zdarzały się także pytania dotyczące tego, czy można użyć kolorowego długopisu lub kredki w celu zaznaczenia lub podkreślenia informacji uznanych przez ucznia za istotne. Pytania bardzo często dotyczyły także tego, czy można użyć ołówka do zapisania tych części obliczeń, których poprawności uczniowie nie byli pewni. Opisane zachowania uczniów świadczą o ich braku samodzielności w zakresie podejmowania elementarnych decyzji dotyczących rozwiązywania zadań, takich jak wybór narzędzia piśmienniczego, czy sposobu zapisu obliczeń w zeszycie.

Obserwując pracę uczniów wielokrotnie można było odnieść wrażenie, że ich brak pewności w tej kwestii może wiązać się z tym, iż na co dzień są oni przyzwyczajeni do dokładnego przepisywania treści wedle gotowego wzoru. Ponadto zadania znajdujące się w podręcznikach i zeszytach ćwiczeń w zdecydowanej większości mają wyznaczone miejsce na uzupełnienie informacji z tekstu oraz na zapisanie obliczeń. Poniższa ilustracja jest przykładem tego typu zadań.

Ilustracja 5. Przykładowe zadanie matematyczne – zeszyt ćwiczeń ucznia



1. Harcerze sadzili wiosną drzewa. Przygotowali 97 sadzonek. Było 57 sadzonek sosny. Pozostałych sadzonek świerku i dębu było po tyle samo. Ile było sadzonek świerku i dębu razem?

Ile było sadzonek świerku? Ile było sadzonek dębu?

Wszystkie drzewa sadzono w rzędach po 10.

W ilu rzędach posadzono świerki? W ilu dęby?

W ilu rzędach posadzono sosny?

Wykonaj rysunek. Zamiast drzew narysuj kreski.

Ile drzew posadzono w ostatnim rzędzie?

Źródło: K. Bielenica, M. Bura, M. Kwil, B. Lankiewicz: *Nowe już w szkole. Matematyka*, cz. 3. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era Sp. z o.o., 2013, s. 56.

W przypadku zadań, w których autorzy podręcznika zadbali o wyznaczenie miejsca do zapisania poszczególnych danych, uczniowie nie muszą samodzielnie zastanawiać się nad układem graficznym swojego zapisu. Wszystko zostało bowiem zaplanowane tak, by ograniczyć aktywność uczniów do minimum. Nie muszą oni podejmować decyzji co do wyboru miejsca na zapisanie własnych obliczeń lub też ich formy. Sprowadzenie rozwiązywania zadań matematycznych do wypełniania luk jest niewątpliwie szkodliwe. Ograniczenie działań uczniów nie dotyczy w takich przypadkach jedynie kwestii graficznego zapisu. Uczniowie podczas rozwiązywania tak przygotowanych zadań nie muszą samodzielnie analizować ich treści, gdyż analiza taka jest niejako narzucona przez autora zadania. Następujące po sobie luki sugerują uczniom kolejność wykonywania kroków, koniecznych do uzyskania rozwiązania. Tym samym narzucony zostaje uczniom sposób rozumowania. Zdarza się także, że rozwiązanie zadania ograniczone jest wyłącznie do uzupełnienia luk w już gotowych działaniach lub zdaniach. Nie może zatem dziwić to, iż uczniowie w momencie kiedy mają samodzielnie zadecydować o formie graficznej zapisu swoich obliczeń, czy odpowiedzi gubią się i nie potrafią podąć decyzji bez uprzedniej konsultacji z osobą dorosłą.

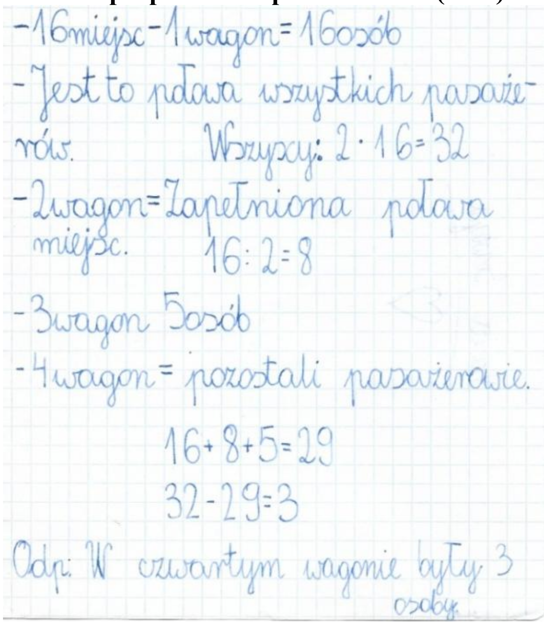
Początkowo uczniowie grup eksperymentalnych bardzo niechętnie zapisywali treść odpowiedzi do rozwiązywanych przez siebie zadań. Wynika to z przyzwyczajenia uczniów do zadań, które mają zapisaną całą odpowiedź, z pustym miejscem do wpisania jedynie uzyskanego wyniku. Warto w tym miejscu podkreślić raz jeszcze, iż postępowanie tego typu ogranicza i usztywnia myślenie uczniów, przyzwyczajając ich do korzystania z góry podanych schematów. W przypadku, gdy uczniowie zostają pozbawieni tego schematu bywają bezradni. Podczas rozmów nauczycielki potwierdziły tę tezę. Osobiście były one zdania, iż rozwiązywanie zadań na zasadzie wypełniania luk przynosi uczniom więcej szkód niż korzyści.

Pomimo wątpliwości uczniów, co do graficznych sposobów zapisu ich własnych pomysłów na rozwiązywanie poszczególnych zadań, podczas zajęć w grupach eksperymentalnych unikano narzucania z góry jakichkolwiek schematów zapisu. Zachęcano uczniów do podejmowania samodzielnych prób w tym zakresie. Wraz z upływem czasu, uczestniczący w zajęciach uczniowie upewniali się w tym, iż forma zapisu nie jest kluczową kwestią podczas rozwiązywania matematycznych zadań. Wielokrotnie dało się zaobserwować różne pomysły uczniów na zapisanie obliczeń do tego samego zadania. Dla zobrazowania tej sytuacji poniżej przedstawiono kilka uczniowskich sposobów na zapisanie obliczeń, służących do rozwiązania tego samego zadania.

Treść zadania: Pociąg ma cztery wagony. W jednym wagonie mieści się maksymalnie 16 osób. W pierwszym wagonie jedzie połowa wszystkich pasażerów i są zapełnione wszystkie siedzące miejsca. W drugim wagonie jest zapełnionych połowa miejsc. W trzecim wagonie jedzie 5 osób. W czwartym wagonie są pozostali pasażerowie. Ilu wszystkich pasażerów jedzie w tym pociągu? Ilu pasażerów jest w każdym z czterech wagonów?

Ilustracja 6 przedstawia zapis wykonany przez Miłosza.

Ilustracja 6. Rozwiązanie zadania zaproponowane przez Miłosza (GE1)



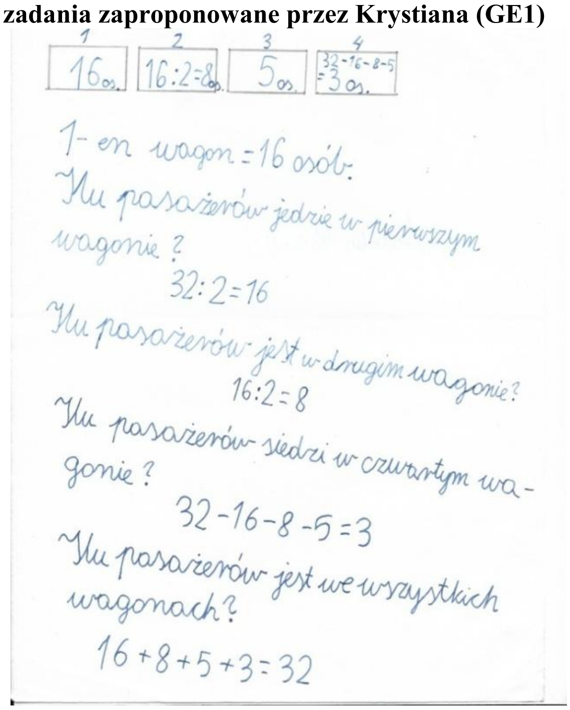
-16miejsc-1wagon=16osób
-Jest to połowa wszystkich pasaże-
rów. Wszyscy: 2·16=32
-2wagon=Zapełniona połowa
miejsc. 16:2=8
-3wagon 5osób
-4wagon= pozostali pasażerowie.
16+8+5=29
32-29=3
Odp: W czwartym wagonie były 3
osoby.

Źródło: Badanie własne.

Miłosz postanowił na początku wypisać dane z zadania. Następnie, analizując jego treść uzupełniał kolejne wiadomości i zapisywał stosowne obliczenia.

Kolejnym przykładem są zapiski Krystiana (ilustracja 7).

Ilustracja 7. Rozwiązanie zadania zaproponowane przez Krystiana (GE1)



1	2	3	4
16os.	16:2=8os.	5os.	32-16-8-5=3os.

1-en wagon=16 osób.
Ilu pasażerów jedzie w pierwszym
wagonie?
32:2=16
Ilu pasażerów jest w drugim wagonie?
16:2=8
Ilu pasażerów siedzi w czwartym wa-
gonie?
32-16-8-5=3
Ilu pasażerów jest we wszystkich
wagonach?
16+8+5+3=32

Źródło: Badanie własne.

Krystian podczas rozwiązywania zadania wykonał zatem rysunek pomocniczy oraz wykonał stosowane obliczenia. Podczas wykonywania kolejnych kroków zapisywał szczegółowe pytania i konieczne obliczenia.

Ilustracja 8 to pomysł na rozwiązanie tego samego zadania zrealizowany przez Wiktorię.

Ilustracja 8. Rozwiązanie zadania zaproponowane przez Wiktorię (GE1)

Źródło: Badanie własne.

Wiktoria postanowiła przedstawić rozwiązanie tego zadania w formie graficznej. Wykonała rysunek pomocniczy, na który nanosiła dane wynikające z treści zadania. W dalszej kolejności wykonywała obliczenia – prawdopodobnie w pamięci, ponieważ nie zapisywała ich w zeszycie. Obliczone tym sposobem niewiadome zapisywała w odpowiednie miejsca rysunku. Dziewczynka poprzestała na wykonaniu połowy zadania, gdyż nie udzieliła odpowiedzi na pytanie ilu wszystkich pasażerów jechało w pociągu.

Jak można zauważyć na przedstawionych przykładach, uczniowie potrafili wygenerować własne sposoby zapisu rozwiązania zadania matematycznego. Nie potrzebowali do tego wyznaczonego miejsca, czy gotowego tekstu zawierającego luki. Samodzielne wykonywanie wszystkich elementów związanych z rozwiązaniem zadania, w tym jego graficznego zapisu jest niewątpliwie kształcące i warte stosowania.

Podczas zajęć w grupach eksperymentalnych i kontrolnych odnotowano dużą różnicę pomiędzy liczbą rozwiązanych podczas nich zadań. Na zajęciach prowadzonych w grupach kontrolnych uczniowie rozwiązywali podczas 45 minut pracy średnio 5 lub 6 zadań. Były to zróżnicowane zadania, o charakterze problemowym i bezproblemowym, tekstowe oraz beztekstowe o różnym stopniu trudności.

W czasie trwania zajęć w grupach eksperymentalnych uczniowie byli w stanie rozwiązać maksymalnie trzy zadania. Zdarzało się, iż podczas tych zajęć uczniowie oprócz „rozgrzewki” byli w stanie rozwiązać tylko jedno zadanie. Rozwiązywanie zadań problemowych zgodnie z wytycznymi metody G. Polya jest czasochłonne, w związku z czym zabiera uczniom zdecydowanie więcej czasu. Szczególnie na początku trwania eksperymentu sami uczniowie zwracali uwagę na to, iż bardzo wolno rozwiązują zadania. Byli przyzwyczajeni do większej liczby rozwiązywanych zadań podczas zajęć, dlatego też obawiali się, że prowadząca będzie niezadowolona z tego stanu rzeczy. Uczniowie nigdy nie byli informowani o tym, ile zadań jest zaplanowanych na poszczególne zajęcia. Pomimo to mieli poczucie, że rozwiązanie jednego bądź dwóch zadań w ciągu całych zajęć będzie uznane za niewystarczające. Początkowo spodziewali się, że skoro wykonali mało zadań, to kolejne, prawdopodobnie zaplanowane przez prowadzącą do wykonania na zajęciach zadania, będą musieli rozwiązać w domu w ramach nadrobienia powstałych zaległości. Obawa przed koniecznością rozwiązywania zadań w domu powodowała na początku pośpiech w pracy uczniów. Potrzebowali oni długiego czasu, by zrozumieć, że nie będą ponosić żadnych konsekwencji tego, jeśli na zajęciach rozwiążą małą liczbę zadań. Co ciekawe, pomimo początkowej niechęci do otrzymywania dodatkowych zadań do wykonania samodzielnie w domu, pod koniec trwania eksperymentu zdarzało się, że niektórzy uczniowie sami prosili o kolejne zadania, które będą mogli rozwiązać w wolnej chwili w domu.

Zajęcia prowadzone w grupach kontrolnych i eksperymentalnych różniły się także pod względem poziomu hałasu, jaki towarzyszył pracy uczniów. Podczas zajęć prowadzonych w grupach kontrolnych w klasach panował porządek, wychowawczynie potrafiły utrzymać dyscyplinę. Należy wspomnieć także o tym, iż podczas tych zajęć panowała przyjazna i spokojna atmosfera. Uczniowie mieli zapewnioną możliwość swobodnego wypowiadania się. W rozmowach nauczycielki prowadzące zajęcia matematyczne w grupach kontrolnych w pełni potwierdziły, że w swej pracy dydaktycznej i wychowawczej podejmują działania mające na celu osiągniecie stanu opisanego na podstawie zamieszczonej wyżej obserwacji.

Zajęcia w grupach eksperymentalnych, prowadzone z wykorzystaniem metody G. Polya od samego początku wiązały się z głośną pracą uczniów. Zarówno grupowa forma pracy, jak i możliwość konsultowania z innymi uczniami swoich pomysłów sprawiały, że podczas ich trwania było głośniej niż zazwyczaj. Początkowo sami uczniowie zwracali uwagę na to, iż pod tym względem zajęcia różnią się od ich codziennych zajęć. Po krótkim czasie uczniowie przyzwyczaili się do takiego stanu rzeczy. Ze względu na hałas i pozorny chaos, który towarzyszy pracy uczniów zgodnie z założeniami metody G. Polya, osoba prowadząca powinna zachować szczególną uwagę. Powinna nadzorować pracę uczniów w taki sposób, by nie ingerować zbyt mocno w poczynania uczniów ale jednocześnie utrzymać odpowiedni poziom dyscypliny w klasie.

Przeprowadzone obserwacje pracy uczniów podczas zajęć matematycznych, wykazały, iż bardzo obawiają się oni popełniania błędów podczas rozwiązywania zadań. Błędy zdarzały się uczniom dość często zarówno w grupach kontrolnych, jak i eksperymentalnych. Zdecydowanie więcej błędów uczniowie popełniali podczas pracy z wykorzystaniem metody G. Polya. Sytuacja taka jest typowa w przypadku zadań problemowych, rozwiązywanie których wymaga znalezienia sposobu rozwiązania, a nie jak w przypadku zadań typowych jedynie stosowania znanego algorytmu.

Uczniów grup eksperymentalnych na początku trwania eksperymentu zapewniono o możliwości popełniania przez nich błędów oraz o braku negatywnych konsekwencji w przypadku ich wystąpienia. Pomimo to, wielokrotnie woleli oni nie zgłaszać swoich pomysłów i sugestii dotyczących rozwiania poszczególnych zadań, ponieważ obawiali się, że nie będą one prawidłowe. Bardzo często okazywało się, iż początkowe pomysły uczniów były dobre, jednak obawa przed popełnieniem błędu blokowała w nich chęć podzielenia się nimi na forum klasy. Uczniów zapewniono także o braku oceniania ich pracy, a co za tym idzie o braku ocen – zarówno pozytywnych, jak i negatywnych. Pomimo tych zapewnień, szczególnie na początku trwania eksperymentu, uczniowie obawiali się, iż za podanie nieprawidłowego wyniku lub błędnego rozwiązania zadania, otrzymają negatywną ocenę. Uczniowie długi czas przyzwyczajali się do braku oceniania. Jedyna gratyfikacja, na jaką mogli liczyć podczas zajęć polegała na ustnej pochwale oraz uśmiechu ze strony prowadzącej.

Jak się okazało ważnym czynnikiem zmniejszającym obawy uczniów przed popełnianiem błędów była postawa osoby prowadzącej. W trakcie trwania zajęć w grupach eksperymentalnych prowadząca czasami popełniała błędy. Błędy te były celowe i miały za zadanie sprawdzenie, czy uczniowie będą w stanie je wychwycić i skorygować. Początkowo uczniowie dziwili się, gdy prowadząca, popełniając błąd w trakcie trwania zajęć, przyznawała się do tego faktu. Uczniowie najczęściej w tej sytuacji śmiali się i oceniali, że „*pani sama nie wie*" albo też, że „*pani sama nie potrafi*". Kluczowa okazywała się być tutaj reakcja prowadzącej na tego typu zachowania uczniów. W każdym takim przypadku następowała dyskusja na ten temat. Prowadząca starała się wyjaśnić uczniom, że nie ma nic złego w popełnianiu błędów oraz, że popełnianie błędów jest naturalnym elementem poszukiwania sposobu rozwiązania zadania czy problemu. Pokazanie uczniom na własnym przykładzie, iż popełnianie błędów jest rzeczą naturalną, niejako wpisaną w proces rozwiązywania zadań, pozwalało zmniejszyć ich obawy w tym zakresie. Z biegiem czasu dało się zauważyć, iż postawa uczniów wobec własnych błędów zmieniła się. Uczniowie w mniejszym stopniu przejmowali się nimi, dając sobie niejako prawo do ich popełniania. Niewątpliwie istotne znaczenie miało tutaj także to, iż popełniony błąd nie przynosił żadnych negatywnych konsekwencji.

Rozmowy z nauczycielkami wykazały, iż mają one świadomość tego, że ich uczniowie często boją się samodzielnego rozwiązywania zadań na forum klasy. Były one zdania, że problem ten dotyczy dużej grupy uczniów. Nauczycielki uważały, iż uczniowie często boją się matematyki, jednak były one zdania, iż strach uczniów przed przedmiotem narasta szczególnie w klasach drugiego etapu edukacyjnego. W swojej codziennej pracy deklarowały, iż starają sie zmniejszać poziom stresu u uczniów i przede wszystkim nie pogłębiać go. Jako czynniki obniżające strach uczniów na zajęciach matematycznych wymieniały przede wszystkim brak negatywnego oceniania w przypadku uzyskania przez ucznia nieprawidłowego rozwiązania zadania, nie wywoływanie do odpowiedzi na forum klasy uczniów, którzy nie są pewni swojego wyniku oraz uczniów, którzy nie rozwiązali zadania, stwarzanie w klasie miłej i przyjaznej atmosfery oraz stosowanie pochwał.

Analizy danych zebranych w trakcie obserwacji pracy uczniów podczas zajęć matematycznych wykazują, iż metoda G. Polya jest metodą wartościową, której stosowanie przynosi wiele korzyści. Korzyści te można rozpatrywać zarówno w kontekście samych uczniów, ale także w kontekście osoby prowadzącej zajęcia. Stosowanie tej metody wymaga od nauczyciela dobrego przygotowania się do zajęć, a także zrozumienia uczniowskich strategii rozwiązywania zadań. Praca z wykorzystaniem metody G. Polya stanowi niewątpliwie wyzwanie także dla samych uczniów. Jak dało się zauważyć podczas zajęć w grupach eksperymentalnych, uczniowie z zaangażowaniem i z radością rozwiązywali matematyczne zadania problemowe z zastosowaniem metody G. Polya.

W dalszej części dysertacji zebrano wnioski, jakie sformułowano na podstawie wyników otrzymanych w toku badań.

Wnioski końcowe na podstawie analizy wyników badań własnych zrealizowanych metodą sondażu diagnostycznego

Celem przeprowadzonych badań sondażowych było poznanie opinii nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej na temat matematycznych zadań problemowych oraz sposobów ich rozwiązywania, a także poznanie ich opinii o heurystycznej metodzie G. Polya. Główną metodą badawczą była metoda sondażu diagnostycznego, przeprowadzona przy użyciu samodzielnie skonstruowanego kwestionariusza ankiety.

W badaniach sondażowych wzięło udział 213 nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej pracujących w szkołach podstawowych znajdujących się na terenie województwa śląskiego. 77% badanych nauczycieli (165 osób) pracowało w szkołach mieszczących się na terenach miejskich, pozostałych 23% badanych (48 osób) pracowało w szkołach znajdujących się na terenach wiejskich. Ankiety udało się pozyskać od nauczycieli z 33 miast oraz z 14 wsi z województwa śląskiego. Respondenci posiadali zróżnicowany staż pracy w szkole. Najliczniejszą grupą byli nauczyciele pracujący w szkole minimum 15 lat (81%), w dalszej kolejności byli to nauczyciele ze stażem pracy od jednego roku do 10 lat (w sumie 12%) oraz od 10 do 15 lat (4%). Pozostałe 4% respondentów nie udzieliło informacji na temat stażu swojej pracy w szkole. Zdecydowana większość badanych nauczycieli posiadała wykształcenie wyższe magisterskie (95%), 2% respondentów deklarowała wykształcenie licencjackie, pozostałe 3% nie udzieliło odpowiedzi na temat swojego wykształcenia.

W niniejszej części rozprawy zebrano wnioski, sformułowane w odniesieniu do poszczególnych pytań szczegółowych wyodrębnionych w ramach pierwszego problemu głównego w badaniach sondażowych nauczycieli. Pierwszym głównym problemem badawczym było pytanie:

Jakie opinie na temat matematycznych zadań problemowych i metod ich rozwiązywania posiadają badani nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej?

Odpowiedź na pytanie była możliwa poprzez ilościową analizę odpowiedzi ankietowanych nauczycieli oraz ustalenie korelacji pomiędzy tymi odpowiedziami a lokalizacją miejsca ich pracy (miasto/wieś), stażem pracy w szkole oraz poziomem wykształcenia. Wnioskowania statystyczne, przeprowadzone zostały z wykorzystaniem trzech testów statystycznych – testu korelacji rho-Spearmana, testu Kruskala-Wallisa oraz testu niezależności chi-kwadrat.

Poniżej przedstawiono odpowiedzi na poszczególne pytania szczegółowe.

Jakie określenia opisują matematyczne zadania problemowe zdaniem badanych nauczycieli?

Badani nauczyciele uznają matematyczne zadania problemowe za zadania wartościowe. Większość z nich potrafiła poprawnie wskazać określenia opisujące ten typ zadań. Występowały także odpowiedzi świadczące o tym, iż nie wszyscy badani nauczyciele w prawidłowy sposób rozróżniali zadania problemowe od pozostałych typów zadań. Wszyscy badani nauczyciele uważali, iż stosowanie zadań problemowych rozwija u uczniów myślenie matematyczne. Ponad 80% z nich zaznaczyła, iż rozwiązywanie zadań problemowych wymaga od uczniów wzmożonego wysiłku umysłowego. Dokładnie połowa badanych wyraziła opinię, że zadania problemowe powinny być powszechnie stosowane na etapie nauczania początkowego. Podkreślali oni także, iż za ich pomocą uczniowie uczą się krytycznej postawy wobec rzeczywistości. Niewielka część badanych uznała, iż zadania problemowe są zadaniami odtwórczymi lub zbyt trudnymi dla uczniów klas I-III. Po zastosowaniu analizy statystycznej testem niezależności chi-kwadrat, okazało się, iż osoby pracujące w mieście częściej uznawały zadania problemowe za zadania twórcze, niż osoby pracujące na terenach wiejskich. 20% wszystkich respondentów uważa, iż każde zadanie matematyczne jest zadaniem problemowym. Analizy korelacji rho-Spearmana wykazały, że im badane osoby miały większy staż pracy w szkole, tym częściej uważały każde zadanie matematyczne za zadanie problemowe.

Otrzymane wyniki badań z jednej strony ukazały świadomość badanych nauczycieli w zakresie określeń opisujących matematyczne zadania problemowe. Uznanie przez nich zadań tego typu za wartościowe oraz aktywizujące uczniów do twórczej i krytycznej postawy na zajęciach matematycznych może być czynnikiem motywującym ich do tego, by w pracy z uczniami w młodszym wieku szkolnym stosowali je w optymalny sposób i w odpowiedniej ilości. Z drugiej zaś strony, wskazania niektórych badanych świadczą o tym, iż nie do końca rozumieją oni istotę zadań problemowych.

Jak często badani nauczyciele stosują matematyczne zadania problemowe podczas zajęć matematycznych?

Badani nauczyciele w zdecydowanej większości zaznaczyli, iż w swojej pracy z uczniami stosują zadania matematyczne o charakterze problemowym, a ponad 80% z nich zadeklarowała regularne stosowanie tych zadań. Jedynie dwóch nauczycieli przyznało, że nie proponuje swym uczniom rozwiązywania zadań problemowych. Ponad połowa respondentów przyznaje, iż ich uczniowie przynajmniej raz w tygodniu mają okazję do pracy nad zadaniem problemowym (52%). Stosowanie zadań problemowych w wymiarze kilku razy w miesiącu zadeklarowało 35% badanych nauczycieli. Analiza statystyczna otrzymanych wyników badań nie wykazała istotnych korelacji pomiędzy lokalizacją miejsca pracy, stażem pracy oraz wykształceniem respondentów, a stosowania przez nich matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych.

Którym uczniom badani nauczyciele proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych?

Spośród wszystkich badanych nauczycieli 94% zadeklarowało, iż zadania problemowe rozwiązują podczas ich zajęć wszyscy uczniowie w klasie, bez względu na to, jaki mają poziom wiedzy i umiejętności matematycznych. Jedynie 5% respondentów przyznało, iż proponuje zadania problemowe wyłącznie uczniom uzdolnionym matematycznie. Statystyczna analiza uzyskanych wyników badań nie wykazała istotnych korelacji pomiędzy lokalizacją miejsca pracy, stażem pracy oraz wykształceniem respondentów, a stosowaniem przez nich zdań problemowych w odniesieniu do wybranych grup uczniów. Mając na względzie założenia współczesnej dydaktyki jako pozytywną należy uznać sytuację, w której większość uczniów regularnie rozwiązuje matematyczne zadania problemowe. Uwzględniając to, iż 20% indagowanych mylnie uważa, że wszystkie zadania matematyczne są zadaniami problemowymi, bez popełnienia znacznego błędu można domniemywać, że ich uczniowie nie rozwiązują zadań problemowych lub czynią to rzadko i nieregularnie.

Jakie są, zdaniem badanych nauczycieli, pozytywne skutki rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych?

Badani nauczyciele wskazywali wiele pozytywnych skutków, jakie powodować może rozwiązywanie przez uczniów zadań o charakterze problemowym podczas zajęć matematycznych. Wśród najczęstszych wskazań pojawiały się odpowiedzi, iż rozwijają one myślenie uczniów (98%), przyczyniają się do wzrostu zaangażowania uczniów podczas zajęć (77%) oraz mobilizują ich do podejmowania twórczych rozwiązań podczas zajęć matematycznych (73%). Badani nauczyciele są przekonani, iż regularne stosowanie zadań problemowych może przyczynić się do poprawienia wyników uczniów w zakresie uczenia się matematyki. Niemal 30% respondentów za zaletę stosowania zadań tego typu uznało to, iż mogą one wprowadzać na zajęciach radosną atmosferę. Istotne statystycznie korelacje zostały wykazane w odniesieniu do właśnie tego wskazania. Analizy korelacji rho-Spearmana wykazały, iż im większy staż pracy w szkole posiadali badani nauczyciele, tym rzadziej wskazywali na panowanie radosnej atmosfery w klasie w trakcie rozwiązywania zadań problemowych. Zależność wystąpiła także w analizach dokonanych testem chi-kwadrat. Zgodnie z nimi nauczyciele z wykształceniem wyższym magisterskim rzadziej niż nauczyciele z wykształceniem licencjackim wskazywali występowanie takiej atmosfery. Jak się zatem okazało, nie wszyscy nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej doceniają, podkreślane przez pedagogów i psychologów twórczości, znaczenie radosnej atmosfery sprzyjającej twórczemu i nieskrępowanemu podejściu do rozwiązywanego problemu.

Jakie są, zdaniem badanych nauczycieli, negatywne skutki rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych?

Ponad połowa respondentów (51%) uważa, iż rozwiązywanie przez uczniów matematycznych zadań problemowych nie przynosi żadnych negatywnych skutków. Ma to swoje odzwierciedlenie w zaprezentowanej już, wysokiej liczbie nauczycieli deklarujących ich stosowanie w trakcie realizowanych zajęć. Wadą rozwiązywania zadań tego typu, w opiniach 32% indagowanych, jest to, że aktywizują one do pracy tylko wybraną grupę uczniów. Ponad 10% badanych uznało, iż zadania tego typu wpływają na dezorganizację pracy na zajęciach oraz zniechęcają uczniów do pracy. Pojedynczy nauczyciele uznali, iż zadania problemowe mogą wywoływać u uczniów lęk. Uwaga 4% nauczycieli dotyczyła negatywnego samopoczucia uczniów występującego wówczas, gdy mimo podejmowanego wysiłku intelektualnego nie są oni w stanie osiągnąć prawidłowego wyniku. Zdaniem badanych istnieje także obawa, że słabsi uczniowie mogą zrezygnować z samodzielnego rozwiązywania zadań problemowych i czekać na podanie gotowego rozwiązania przez inną osobę. Statystyczna analiza uzyskanych wyników badań nie wykazała istotnych korelacji pomiędzy lokalizacją miejsca pracy, stażem pracy oraz wykształceniem respondentów, a wskazywaniem przez nich negatywnych skutków stosowania zadań problemowych podczas pracy na zajęciach matematycznych.

Jakie metody rozwiązywania matematycznych zadań problemowych znają badani nauczyciele?

Nauczyciele biorący udział w badaniach zaznaczali znajomość wielu metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych. Najbardziej znaną przez nich metodą była burza mózgów, gdyż jej znajomość zadeklarowało 97% respondentów. W dalszej kolejności wskazywane były klasyczna metoda problemowa (68%) i inscenizacja (52%). Mniej niż połowa badanych nauczycieli zaznaczyła, że znane są im: drama (49%), metoda kruszenia (42%), metaplan (35%), metoda sześciu kapeluszy myślowych (34%) oraz metoda G. Polya (31%). Najmniejsza liczba wskazań dotyczyła metod takich jak dialog sokratejski (8%), metoda Kartezjusza (4%) oraz gry dydaktyczne (3%). Analiza testem niezależności chi-kwadrat wykazała, iż osoby pracujące na terenach wiejskich częściej niż osoby pracujące w miastach znały metodę metaplanu. Ponadto analizy korelacji rho-Spearmana wykazały, że im badani nauczyciele posiadali większy staż pracy w szkole, tym rzadziej deklarowali znajomość metody sześciu kapeluszy myślowych. Niecała jedna trzecia badanych nauczycieli (31%) zadeklarowała znajomość tytułowej dla tej rozprawy, heurystycznej metody G. Polya.

Ta dość duża, aczkolwiek deklaratywna, znajomość przez nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej metod umożliwiających uczniom rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych może pozytywnie skutkować zróżnicowaniem proponowanych im metod, przyczyniając się z jednej strony do bardziej urozmaiconych działań, przeciwdziałających nudzie, a z drugiej ukazujących im różne sposoby działania w sytuacjach, gdy chcą lub muszą rozwiązywać problemy.

Jakie metody rozwiązywania matematycznych zadań problemowych stosują badani nauczyciele?

Znajomość różnorakich metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych znajduje swoje odzwierciedlenie w praktyce pedagogicznej badanych nauczycieli. Wyniki badań dotyczących stosowanych przez respondentów metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych w znacznym stopniu są zbieżne z wynikami dotyczącymi znajomości tych metod. Największa liczba badanych zadeklarowała stosowanie metody burzy mózgów (91%). Połowa respondentów zaznaczyła, iż pracuje z wykorzystaniem klasycznej metody problemowej (50%). W dalszej kolejności respondenci deklarowali korzystanie z metod takich jak drama (45%), inscenizacja oraz metoda kruszenia (po 38%), metoda G. Polya (26%), metaplan

(20%), a także metoda sześciu kapeluszy myślowych (17%). Najmniejsza liczba respondentów korzysta w swojej pracy z takich metod jak dialog sokratejski (6%) oraz metoda Kartezjusza (4%). Gry dydaktyczne stosuje 5% respondentów, przy czym mniej, bo jedynie 3% zadeklarowało znajomość tej metody. Analiza testem niezależności chi-kwadrat wykazała, iż nauczyciele pracujący na terenach wiejskich częściej deklarowali stosowanie takich metod jak metoda Kartezjusza, metaplan, metoda G. Polya oraz metoda sześciu kapeluszy myślowych, niż nauczyciele pracujący na terenach miejskich. Ponadto przeprowadzone analizy korelacji rho-Spearmana wykazały, że im badani nauczyciele posiadali większy staż pracy w szkole, tym częściej stosowali metodę inscenizacji.

W tej części rozprawy sformułowano wnioski związane z pytaniami szczegółowymi, dotyczącymi drugiego głównego problemu badawczego przyjętego w badaniach sondażowych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej. Problem ten przybrał brzmienie:

Jakie opinie na temat wykorzystania heurystycznej metody G. Polya posiadają badani nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej?

Podobnie jak w przypadku pierwszego głównego problemu badawczego, tak i wnioski związane z pytaniami szczegółowymi należącymi do drugiego problemu sformułowane zostały na postawie analiz ilościowych odpowiedzi udzielonych przez ankietowanych nauczycieli oraz sprawdzenia występowania lub braku występowania korelacji pomiędzy udzielanymi przez badanych nauczycieli odpowiedziami, a lokalizacją miejsca ich pracy (miasto/wieś), stażem pracy w szkole oraz poziomem wykształcenia. Wnioskowania statystyczne, przeprowadzone zostały z wykorzystaniem trzech testów statystycznych – testu korelacji rho-Spearmana, testu Kruskala-Wallisa oraz testu niezależności chi-kwadrat.

Poniżej zamieszczono wnioski związane z poszczególnymi pytaniami szczegółowymi.

Czy badani nauczyciele znają metodę G. Polya?

W przedstawionych już wnioskach w pytaniu o znajomość metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych nauczyciele wskazywali metodę G. Polya umieszczoną wśród wielu innych metod. W pytaniu tym 31% ankietowanych zaznaczyło znajomość tej metody. W drugiej części narzędzia badawczego zapytano wprost o znajomość metody G. Polya, a w tym przypadku jej znajomość zadeklarowało 37% indagowanych. Wykazane różnice mogły były wynikiem refleksji badanych spowodowanej zapoznaniem się z drugą częścią narzędzia badawczego, która dotyczyła wyłącznie metody G. Polya. Mogła ona przybliżyć niektórym badanym założenia metody, co w konsekwencji pozwoliło na przypomnienie sobie jej znajomości. Analiza statystyczna otrzymanych wyników badań nie wykazała istotnych korelacji pomiędzy lokalizacją miejsca pracy, stażem pracy oraz wykształceniem badanych nauczycieli, a znajomością metody G. Polya.

W badaniach metodą eksperymentu pedagogicznego wykazano skuteczność metody G. Polya w kształtowaniu umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich, co jest ważnym argumentem przemawiającym za stosowaniem jej w edukacji elementarnej. Stosunkowo niski odsetek nauczyciel zaznajomionych z tą metodą sprawił, że autorka dysertacji deklaruje podjęcie działań mających na celu propagowanie jej wśród nauczycieli pierwszego etapu edukacyjnego oraz wśród studentów przygotowywanych do zawodu nauczyciela edukacji wczesnoszkolnej i wychowania przedszkolnego.

Ze względu na to, iż nie wszyscy badani nauczyciele deklarowali znajomość metody G. Polya, wnioski dotyczące kolejnych pytań szczegółowych oparte zostały o analizy wypowiedzi 79 respondentów, którzy znajomość taką deklarowali.

Czy badani nauczyciele stosują metodę G. Polya podczas zajęć matematycznych z uczniami?

Spośród nauczycieli deklarujących stosowanie metody G. Polya podczas zajęć matematycznych, 40% zaznaczyło, iż stosuje ją co najmniej raz w tygodniu, a 32% iż wykorzystuje ją w pracy kilka razy w miesiącu. Pozostali respondenci deklarowali, że ich uczniowie pracują z wykorzystaniem metody G. Polya od kilku razy w semestrze do kilku razy w ciągu całego roku szkolnego. Jeden respondent znający metodę G. Polya przyznał, iż nigdy nie stosuje jej w swojej pracy. Analiza korelacji rho-Spearmana wykazała, że im badani nauczyciele posiadali mniejszy staż pracy w szkole tym częściej stosowali metodę G. Polya w swojej pracy. Ponadto analiza testem niezależności chi-kwadrat wykazała, iż nauczyciele z wykształceniem wyższym magisterskim częściej stosowali metodę G. Polya niż osoby z wykształceniem licencjackim.

Większość badanych nauczycieli deklarujących znajomość metody G. Polya (70%) zaznaczyła, że stosuje ją w pracy z uczniami we wszystkich trzech klasach pierwszego etapu edukacyjnego. Nieco ponad 20% badanych stosuje tę metodę wyłącznie w klasach II i III. Analiza statystyczna otrzymanych wyników badań nie wykazała istotnych korelacji pomiędzy lokalizacją miejsca pracy, stażem pracy oraz wykształceniem badanych nauczycieli, a stosowaniem przez nich metody G. Polya w poszczególnych klasach.

Jakie umiejętności można zdaniem badanych nauczycieli rozwijać z wykorzystaniem metody G. Polya?

W opiniach 78% ankietowanych nauczycieli umiejętnością, którą można rozwijać u uczniów poprzez stosowanie metody G. Polya jest umiejętność twórczego myślenia. Zbliżony odsetek respondentów uznał, iż stosowanie tej metody wpływa na rozwój umiejętności samodzielnego myślenia (76%). Wielu badanych (63%) uważa, że dzięki metodzie G. Polya uczniowie uczą się sztuki dokonywania wyboru sposobu rozwiązania matematycznego zadania. Duża część badanych, stanowiąca ponad połowę respondentów uznała, iż dzięki pracy metodą G. Polya uczniowie trenują wytrwałość w dążeniu do wyznaczonego celu oraz ćwiczą umiejętność pracy w grupach. Około jedna trzecia respondentów uważa, że metoda ta rozwija u uczniów umiejętność krytycznego myślenia, a 23% badanych wskazało także, że jej stosowanie wpływa pozytywnie na umiejętność przyjęcia przez uczniów porażki podczas zajęć matematycznych. Po przeprowadzeniu analizy testem niezależności chi-kwadrat okazało się, że nauczyciele pracujący na terenach wiejskich częściej niż nauczyciele pracujący w miastach wskazywali, że ich zdaniem z pomocą metody G. Polya uczniowie rozwijają umiejętność samodzielnego myślenia.

Tak szeroki wachlarz umiejętności rozwijanych u uczniów podczas stosowania metody G. Polya jest zgodny z opiniami na jej temat występującymi w literaturze przedmiotu. Rozwijanie powyższych umiejętności potwierdziło się także w trakcie obserwacji pracy uczniów grup eksperymentalnych. Stanowi to kolejną grupę argumentów w deklarowanych działaniach promocyjnych na rzecz szerszego stosowania tejże metody.

Jakie są, zdaniem badanych nauczycieli, pozytywne skutki stosowania podczas zajęć matematycznych metody G. Polya?

Badani nauczyciele w większości udzielali kilku odpowiedzi dotyczących pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas matematycznych zajęć. Najwięcej wskazań w tym pytaniu uzyskało rozwijanie myślenia uczniów (94%). Kolejnymi wskazaniami były: wzrost samodzielności uczniów następujący poprzez rozwiązywanie matematycznych zadań (82%), kształtowanie twórczego podejścia do rozwiązywania matematycznych zadań (78%) oraz rozwijanie umiejętności samodzielnego radzenia sobie z problemem (70%). Widoczny spadek w liczbach udzielonych odpowiedzi odnotowano w przypadku wzrostu wiary we własne siły i możliwości (52%) oraz wpływu na motywację uczniów do pracy i wzrostu zaangażowania uczniów w proces rozwiązywania matematycznych zadań (po 47%). Analiza statystyczna otrzymanych wyników badań nie wykazała istotnych korelacji pomiędzy lokalizacją miejsca pracy, stażem pracy oraz wykształceniem badanych nauczycieli, a wskazywaniem przez nich pozytywnych dla uczniów skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć matematycznych.

Badani nauczyciele wskazali także pozytywne skutki stosowania metody G. Polya dla pracy ich samych. Największa liczba respondentów jest zdania, iż stosowanie metody stwarza szansę na dostrzeżenie uczniów wykazujących uzdolnienia matematyczne (91%). Pod względem liczebności w dalszej kolejności znalazły się odpowiedzi: możliwość poznania preferowanych przez uczniów sposobów rozwiązywania matematycznych zadań (76%), wskazanie uczniów wykazujących trudności w uczeniu się matematyki (72%) oraz stwarzanie okazji do obserwowania samodzielnej pracy uczniów (71%). Nieco ponad połowa respondentów jest zdania, iż metoda ta może być pomocna podczas dokonywania oceny zaangażowania uczniów w rozwiązywanie zadań (54%), poznawania preferowanych przez nich form pracy na zajęciach matematycznych (51%) oraz poznawania struktury grupy/klasy (30%). Analiza statystyczna otrzymanych wyników badań nie wykazała istotnych korelacji pomiędzy lokalizacją miejsca pracy, stażem pracy oraz wykształceniem badanych nauczycieli, a wskazywaniem przez nich pozytywnych dla nauczycieli skutków stosowania podczas zajęć matematycznych metody G. Polya.

Zaprezentowane, pozytywne opinie nauczycieli odnośnie stosowania metody G. Polya mają w większości swe odzwierciedlenie w korzyściach stosowania tej metody opisywanych w literaturze pedagogicznej. Będą one stanowić argumenty (łącznie z już wymienionymi) w planowanych działaniach mających na celu promowanie metody G. Polya wśród nauczycieli klas początkowych oraz wśród studentów.

Jakie są, zdaniem badanych nauczycieli, negatywne skutki stosowania podczas zajęć matematycznych metody G. Polya?

Badani nauczyciele potrafili wskazać znacznie mniej negatywnych (w porównaniu z liczbą pozytywnych) skutków stosowania metody G. Polya. W opiniach większości indagowanych (91%) stosowanie metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej nie przynosi żadnych negatywnych dla uczniów skutków. Marginalnymi wypowiedziami, udzielanymi przez mniej niż 5% badanych, były stwierdzenia, iż stosowanie metody G. Polya może powodować spadek zaangażowania uczniów podczas pracy nad zadaniem matematycznym, spadek motywacji uczniów, ograniczać ich samodzielność oraz zniechęcać do rozwiązywania matematycznych zadań. Analiza statystyczna otrzymanych wyników badań nie wykazała istotnych korelacji pomiędzy lokalizacją miejsca pracy, stażem pracy oraz wykształceniem badanych nauczycieli, a wskazywaniem negatywnych dla uczniów skutków stosowania podczas zajęć matematycznych metody G. Polya.

Respondenci znacznie chętniej wypowiadali się odnośnie negatywnych skutków stosowania metody G. Polya w kontekście ich pracy. Tutaj najczęściej występującym wskazaniem była głośna praca uczniów (59%). Nieco mniej indagowanych (53%) uznało, iż negatywnym skutkiem pracy metodą G. Polya jest brak możliwości założenia efektu końcowego pracy uczniów. Nieprzewidywalność przebiegu zajęć matematycznych prowadzonych wedle założeń metody została uznana za wadę przez 34% ankietowanych. Niemal jedna trzecia respondentów uważa, iż minusem stosowania metody G. Polya jest brak gwarancji osiągnięcia poprawnego wyniku podczas rozwiązywania zadań. Kolejnym wskazaniem był chaos organizacyjny, jaki może powstać podczas pracy metodą G. Polya (15%). W dalszej kolejności pojawiały się odpowiedzi dotyczące braku całkowitej kontroli nad czasem oraz sposobem pracy uczniów podczas zajęć matematycznych (w sumie 12%).

Analiza testem niezależności chi-kwadrat wykazała, iż nauczyciele pracujący na terenach wiejskich częściej wskazywali odpowiedź „*inne*" podczas określania negatywnych skutków stosowania metody G. Polya z punktu widzenia nauczyciela niż nauczyciele pracujący w mieście. Niestety respondenci nie rozwinęli swoich wypowiedzi i nie wskazali, jakie ich zdaniem, negatywne skutki kryją się pod kategorią

„*inne*”. Ponadto analizy korelacji rho-Spearmana wykazały, że im większy staż pracy w szkole posiadali badani nauczyciele, tym rzadziej jako wadę stosowania metody G. Polya wykazywali chaos organizacyjny panujący na zajęciach.

Wszystkie wymienione wady, czy też niedoskonałości stosowania metody G. Polya można odnieść również do pozostałych metod heurystycznych. Rozwiązywanie zadań problemowych przez uczniów, w przypadku każdej ze stosowanych metod rozwiązywania problemu może wymagać komunikowania się między nimi, co raz odbierane bywa jako szum, innym zaś razem jako hałas, nie mający racji bytu w trakcie lekcji realizowanych metodami podającymi. Niezależnie od wybranej metody problemowej nie jest możliwe, by nauczyciel przewidział, czy efektem pracy uczniów będzie rozwiązanie poprawne, czy też niewłaściwe, ile czasu uczniowie będą potrzebowali na rozwiązywanie zadania, jaki będzie poziom ich zaangażowania, czy jak będzie przebiegała współpraca między nimi. Nauczyciele aktywni zawodowo lub też adepci do zawodu muszą być świadomi tego, że każde podejmowane działanie może mieć negatywne implikacje. Ma je także metoda G. Polya. Jednakże uzmysłowienie sobie jej skuteczności w rozwiązywaniu matematycznych zadań problemowych i pozytywnego wpływu na rozwój uczniów sprawia, że implikacje te nabierają małego znaczenia i nie powinny stanowić przeszkody w optymalnym jej wykorzystywaniu na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej uczniów klas początkowych.

Analiza wyników badań zrealizowanych metodą sondażu diagnostycznego umożliwiła także sformułowane wniosków, które użyteczne być mogą na potrzeby praktyki edukacyjnej. Wnioski te zamieszczono w dalszej części pracy.

Wnioski końcowe na podstawie analizy wyników badań własnych zrealizowanych metodą eksperymentu pedagogicznego

Celem przeprowadzonych badań było sprawdzenie skuteczności zastosowania metody G. Polya podczas zajęć matematycznych w kształtowaniu umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej.

Główną metodą badawczą był tu naturalny eksperyment pedagogiczny z wykorzystaniem pretestu w dwóch grupach oraz posttestu w czterech grupach, przeprowadzony zgodnie z planem Solomona, który składał się z następujących etapów:

- Etap 1 – przeprowadzenie diagnozy wstępnej (pretestu) w grupie eksperymentalnej GE1 i grupie kontrolnej GK1
- Etap 2 – wprowadzenie czynnika eksperymentalnego do grup eksperymentalnych GE1 i GE2
- Etap 3 – przeprowadzenie diagnozy końcowej (posttestu) w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz grupach kontrolnych GK1 i GK2.

Diagnoza wstępna i końcowa przeprowadzona została w oparciu o samodzielnie przygotowane testy dydaktyczne – pretest oraz posttest. Oba te testy zawierały matematyczne zadania problemowe z podziałem na zadania arytmetyczne oraz zadania geometryczne. W trakcie badań eksperymentalnych prowadzono ponadto badania metodą obserwacji bezpośredniej, jawnej zajęć edukacji matematycznej w grupach eksperymentalnych, oraz w grupach kontrolnych. Przeprowadzono także rozmowy z nauczycielami-wychowawcami badanych klas.

Badania eksperymentalne objęły uczniów czterech klas trzecich szkoły podstawowej i zostały przeprowadzone w Miejskim Zespole Szkół Nr 2 im. Huberta Wagnera w Będzinie. W eksperymencie brało udział w sumie 92 uczniów, wśród których więcej było dziewczynek (53%) niż chłopców (47%). Wszystkie cztery klasy zostały losowo przyporządkowane do kolejnych grup eksperymentalnych i kontrolnych, których liczebność była równa – w każdej grupie po 23 uczniów.

W niniejszej części rozprawy sformułowano wnioski związane z głównym problemem badawczym oraz wynikającymi z niego pytaniami szczegółowymi przyjętymi w badaniach eksperymentalnych uczniów klas trzecich.

Odpowiedź na postawione pytania była możliwa dzięki analizie danych zebranych w toku badań eksperymentalnych oraz dzięki ich statystycznej weryfikacji. Weryfikacja ta została przeprowadzona przy pomocy wnioskowania statystycznego z zastosowaniem testu U Manna-Whitneya, testu *t* dla prób niezależnych oraz testu Levene'a jednorodności wariancji.

Główny problem badawczy w badaniach metodą eksperymentu pedagogicznego przybrał brzmienie:

Z jakim skutkiem zastosowanie heurystycznej metody G. Polya wpłynie na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej?

W celu ustalenia wpływu zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej przeprowadzono analizy statystyczne przy użyciu testu U Manna-Whitneya. Kolejność wykonanych analiz określał przyjęty na potrzeby niniejszych badań plan Solomona, którego kolejne kroki opisano na stronach 159-161 rozprawy. Na podstawie wykonanych analiz statystycznych zawartych w podrozdziale 7.4.:

- potwierdzono prawdziwość hipotezy badawczej – wykazano, iż zastosowanie metody G. Polya wpłynęło pozytywnie na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej w sposób istotny statystycznie. Wykazano, iż uczniowie uczestniczący w zajęciach wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya wykazywali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych niż uczniowie kształceni innymi metodami.
- potwierdzono brak efektu zastosowania pretestu – wykazano, iż przeprowadzenie pretestu nie wpłynęło na wyniki uzyskane przez badanych uczniów w postteście. Przeprowadzenie pomiaru początkowego nie miało wpływu na końcowy poziom umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej.
- wykazano, że w grupie kontrolnej, w odróżnieniu od grupy eksperymentalnej, nie wystąpiły celowe zmiany w zakresie umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów. Umiejętność ta okazała się być wyższą jedynie w przypadku uczniów uczestniczących w zajęciach matematycznych wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya.

Statystyczna weryfikacja danych umożliwiła przyjęcie hipotezy głównej w brzmieniu: *Umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej, biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem metody G. Polya jest wyższa od umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów kształconych innymi metodami*. Otrzymane wyniki wykazały, iż istnieje statystyczna różnica pomiędzy średnimi wynikami uzyskanymi w postteście przez uczniów grup eksperymentalnych GE1 i GE2, a średnimi wynikami posttestu uzyskanymi przez uczniów grup kontrolnych GK1 i GK2. Tym samym uczniowie grup eksperymentalnych uczestniczący w zajęciach z zastosowaniem heurystycznej metody G. Polya osiągnęli w końcowym pomiarze wyższy poziom umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, niż uczniowie, którzy w tym samym czasie uczestniczyli w zajęciach realizowanych innymi metodami kształcenia.

Przedstawione powyżej wyniki analiz statystycznych pozwalają dokonać oceny skuteczności zastosowania heurystycznej metody G. Polya. Zastosowanie metody przyczyniło się do wzrostu umiejętności badanych uczniów w zakresie rozwiązywania matematycznych zadań problemowych. Metoda okazała się być skuteczna, a jej wpływ na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich ocenić należy jako pozytywny.

Poniżej przedstawiono odpowiedzi na poszczególne pytania szczegółowe wyodrębnione w ramach głównego problemu badawczego.

W jaki sposób zastosowanie metody G. Polya wpłynie na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych u badanych uczniów?

W celu ustalenia wpływu zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej przeprowadzono analizy statystyczne przy użyciu testu U Manna-Whitneya. Kolejność wykonanych analiz określał przyjęty na potrzeby niniejszych badań plan Solomona, którego kolejne kroki opisano na stronach 159-161 rozprawy. Na podstawie wykonanych analiz statystycznych zawartych w podrozdziale 7.5.:

- potwierdzono prawdziwość hipotezy badawczej – wykazano, iż zastosowanie metody G. Polya wpływa pozytywnie na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej w sposób istotny statystycznie. Uczniowie uczestniczący w zajęciach wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya wykazywali w końcowym pomiarze większą umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych niż uczniowie kształceni innymi metodami.

– potwierdzono brak efektu zastosowania pretestu – wykazano, iż przeprowadzenie pretestu nie wpłynęło na wyniki uzyskane przez badanych uczniów w postteście. Przeprowadzenie pomiaru początkowego nie miało wpływu na końcowy poziom umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej.
– wykazano, że w grupie kontrolnej, w odróżnieniu od grupy eksperymentalnej, nie wystąpiły celowe zmiany w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów. Umiejętność ta okazała się być wyższą jedynie w przypadku uczniów uczestniczących w zajęciach matematycznych wykorzystujących heurystyczną metodę G. Polya.

Statystyczna weryfikacja danych umożliwiła przyjęcie pierwszej hipotezy szczegółowej w brzmieniu: *Umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej, biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem metody G. Polya jest wyższa od umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów kształconych innymi metodami*. Otrzymane wyniki ukazały, iż istnieje statystyczna różnica pomiędzy średnimi wynikami uzyskanymi w postteście z części arytmetycznej przez uczniów grup eksperymentalnych GE1 i GE2, a średnimi wynikami posttestu z części arytmetycznej uzyskanymi przez uczniów grup kontrolnych GK1 i GK2. Tym samym uczniowie grup eksperymentalnych uczestniczący w zajęciach z wykorzystaniem heurystycznej metody G. Polya osiągnęli w końcowym pomiarze wyższy poziom umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych, niż uczniowie, którzy w tym samym czasie uczestniczyli w zajęciach realizowanych innymi metodami kształcenia.

Powyższe wyniki oznaczają, iż zastosowanie metody G. Polya przyczyniło się do wzrostu umiejętności badanych uczniów w zakresie rozwiązywania zadań arytmetycznych. Metoda okazała się być skuteczna, a jej wpływ na umiejętność rozwiązywania zadań arytmetycznych przez uczniów klas trzecich ocenia się jako pozytywny.

W jaki sposób zastosowanie metody G. Polya wpłynie na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych u badanych uczniów?

W celu ustalenia wpływu zastosowania heurystycznej metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej przeprowadzono analizy statystyczne za pomocą testu U Manna-Whitneya. Z uwagi na brak potwierdzenia jednorodności grup pod względem umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych w teście początkowym, realizacja analiz statystycznych nie była możliwa przy wykonaniu pełnej procedury planu Solomona. Wykonano zatem te jej elementy, dzięki którym możliwe było sprawdzenie, czy zastosowanie heurystycznej metody G. Polya może mieć korzystny wpływ na wyniki uczniów klas trzecich szkoły podstawowej w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych.

Jak wykazały analizy statystyczne przedstawione w podrozdziale 7.6. niniejszej pracy, poziom badanych grup w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych był zróżnicowany. Wyniki uzyskane przez uczniów grupy eksperymentalnej GE1 wskazują na to, iż zastosowanie metody G. Polya nie przyniosło wyraźnych postępów w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych, w porównaniu z wynikami uczniów grupy kontrolnej GK1, kształconych innymi metodami. Tym samym skuteczność zastosowania metody G. Polya w przypadku umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej nie została potwierdzona.

Na podstawie przeprowadzonych analiz statystycznych odrzucono hipotezę w brzmieniu *Umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej, biorących udział w zajęciach z wykorzystaniem metody G. Polya jest wyższa od umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych przez uczniów kształconych innymi metodami*.

Powyższe wyniki oznaczają, iż zastosowanie metody G. Polya nie przyczyniło oczekiwanych skutków w opisywanym zakresie. Tym samym nie przyczyniło się do wzrostu umiejętności badanych uczniów w zakresie rozwiązywania zadań geometrycznych.

Czy istnieje zależność pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych u badanych uczniów a ich płcią?

W celu ustalenia, czy istnieje zależność pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, a płcią badanych uczniów przeprowadzono analizy statystyczne z wykorzystaniem testu U Manna-Whitneya, testu *t* dla prób niezależnych oraz testu Levene'a jednorodności wariancji.

Na podstawie analiz statystycznych zawartych w podrozdziale 7.7 niniejszej pracy wykazano iż różnica średnich wyników posttestu uzyskanych w badanych grupach chłopców i dziewczynek w zakresie umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, w tym umiejętności rozwiązywania zadań arytmetycznych i geometrycznych nie jest istotna statystycznie. Ponadto wykazano, iż średnie wyniki posttestu w zakresie umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, w tym zadań arytmetycznych i geometrycznych osiągnięte zarówno przez chłopców, jak i przez dziewczynki w grupach eksperymentalnych są wyższe niż średnie wyniki posttestu w tych zakresach osiągnięte przez uczniów w grupach kontrolnych.

Statystyczna weryfikacja danych umożliwiła przyjęcie trzeciej hipotezy szczegółowej w brzmieniu: *Nie ma zależności pomiędzy umiejętnością rozwiązywania matematycznych zadań problemowych u badanych uczniów a ich płcią*. Zatem płeć nie różnicuje umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, w tym zadań arytmetycznych i geometrycznych u dziewczynek i u chłopców.

Biorąc pod uwagę przedstawione powyżej dane wynikające z analizy wyników badań sondażowych i eksperymentalnych, można sformułować wnioski użyteczne na potrzeby praktyki edukacyjnej. Zostały one zamieszczone poniżej.

Uogólnienia i wnioski dla praktyki pedagogicznej

W rozprawie podjęto tematykę edukacji matematycznej realizowanej na pierwszym etapie edukacyjnym. Rozważania dotyczyły rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Część empiryczna pracy dotyczyła opinii nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej na temat matematycznych zadań problemowych oraz metod ich rozwiązywania oraz ich opinii na temat heurystycznej metody G. Polya. Metodą, której poświęcono najwięcej uwagi była właśnie metoda G. Polya. Zastosowano ją jako czynnik eksperymentalny w badaniach przeprowadzonych metodą eksperymentu pedagogicznego. Ich celem było ukazanie wpływu zastosowania metody G. Polya na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez uczniów klas trzecich. W pracy zaprezentowano analizy wyników badań własnych przeprowadzonych metodą sondażu diagnostycznego oraz eksperymentu pedagogicznego. Ich lektura pozwala na przyjrzenie się metodzie stworzonej przez węgierskiego matematyka zarówno pod kątem oceny jej skuteczności w pracy z uczniami, jak również pod kątem jej znajomości przez badanych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej.

Przedstawione w poprzedniej części rozprawy wnioski z przeprowadzonych badań sondażowych i eksperymentalnych pozwalają na sformułowanie wniosków użytecznych dla praktyki pedagogicznej.

Jak wykazały zaprezentowane w rozdziale 6 badania sondażowe przeprowadzone wśród nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej, część respondentów nie potrafiła dokonać rozróżnienia zadań problemowych od innych zadań rozwiązywanych przez uczniów podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej, uznając każde zadanie matematyczne za zadanie o charakterze problemowym. To mylne przeświadczenie może powodować, iż nauczyciele ci nie stosują w pracy ze swoimi uczniami zadań problemowych, gdyż uznają za nie każde zadanie rozwiązywane przez uczniów. Ponadto część nauczycieli nie potrafiła scharakteryzować cech odróżniających zadania problemowe od zadań bezproblemowych. Zdecydowana większość badanych zadeklarowała regularne wykorzystywanie zadań problemowych w codziennej pracy ze wszystkimi uczniami, niezależnie od ich zdolności matematycznych. Respondenci potrafili wskazać zarówno pozytywne, jak i negatywne cechy zadań problemowych. Świadomość korzyści, jakie przynosi rozwiązywanie przez uczniów zadań o charakterze problemowym może przyczynić się do zwiększenia częstości wykorzystywania ich w pracy przez nauczycieli.

Badani nauczyciele deklarowali nie tylko znajomość różnych metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych, ale także ich stosowanie na zajęciach matematycznych z uczniami w młodszym wieku szkolnym.

Analizując wypowiedzi nauczycieli można stwierdzić, iż ich wiedza na temat matematycznych zadań problemowych oraz metod ich rozwiązywania jest zróżnicowana. Opinie niektórych z nich są powierzchowne, a w kilku przypadkach nawet wykluczające się. W związku z powyższym zasadne jest proponowanie nauczycielom udziału w różnych formach dokształcania związanych z rozwiązywaniem zadań problemowych. Przydatne mogą być w szczególności zajęcia realizowane w formie warsztatów, w czasie których nauczyciele będą poznawać metody problemowe nie tylko ze strony teoretycznej, ale także praktycznej, kiedy to sami za ich pomocą będą rozwiązywać problemy zaproponowane przez prowadzących warsztaty.

W działaniach na rzecz optymalnego wykorzystywania metod problemowych w rozwiązywaniu zadań matematycznych przez uczniów edukacji wczesnoszkolnej niezbędne jest oczywiście rzetelne kształcenie przyszłych nauczycieli. W tym przypadku odpowiedzialność spoczywa na nauczycielach akademickich prowadzących przedmioty takie jak podstawy edukacji matematycznej czy metodyka edukacji matematycznej. Zajęcia ze studentami powinny przyjmować głównie wymiar praktyczny. Prowadzący je powinni dążyć przede wszystkim do wyposażenia przyszłych nauczycieli w umiejętności praktyczne,–realizowane w oparciu o metody aktywizujące, sprzyjające krytycznemu myśleniu studentów. Istotnym elementem przygotowywania studentów do zawodu jest realizacja przez nich praktyk zawodowych. Warto rozważyć podczas ich trwania realizację studenckich projektów edukacyjnych dotyczących edukacji matematycznej, podczas których będą mieli okazję wykorzystania w pracy z uczniami poznanych na uczelni metod pracy.

W przygotowywaniu do wykonywania zawodu przyszłych nauczycieli oraz w dokształcaniu aktywnych już zawodowo nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej nie można pominąć dwóch istotnych składników. Jednym z nich jest znajomość podstaw teoretycznych matematyki jako dyscypliny nauki. Jak zauważa A. Sajdak matematyka nauczana na etapie wczesnoszkolnym charakteryzuje się tymi samymi strukturami oraz posługuje się tymi samymi pojęciami, co matematyka „wyższa" z tą różnicą, że na wczesnym etapie występują one w węższym zakresie.[526] W związku z powyższym

[526]A. Sajdak: *Wprowadzanie dziecka w świat…*, s. 34.

istotnym jest, by nauczyciele pracujący na pierwszym etapie edukacyjnym posiadali wiedzę z zakresu przedmiotu wykraczającą poza nauczane przez nich treści. Wyposażanie studentów w rzetelną wiedzę z zakresu matematyki jest elementem niezbędnym w procesie przygotowywania ich do wykonywania zawodu nauczyciela. Jak pokazują badania Y. W. Purnomo jest to szczególnie istotne w przypadku nauczycieli szkół podstawowych. [527] Ponadto nauczyciele powinni być zaznajomieni z podstawą programową z zakresu matematyki realizowaną na kolejnych etapach edukacyjnych. Drugim składnikiem jest konieczność posiadania przez nauczycieli dogłębnej wiedzy na temat rozwoju umysłowego dzieci, zarówno w wieku przedszkolnym, jak i wczesnoszkolnym. Prawidłowości rządzące rozwojem umysłowym odgrywają bowiem niezwykle istotną rolę w procesie uczenia się matematyki. Nauczyciele muszą mieć tego świadomość. To dzięki niej będą w stanie organizować swoje oddziaływania dydaktyczno-wychowawcze w sposób prawidłowy, uwzględniający możliwości i ograniczenia myślenia uczniów w każdym wieku. O szkodliwych skutkach lekceważenia przez dorosłych wiedzy z zakresu rozwoju umysłowego dzieci przestrzegają współcześni naukowcy.[528]

Należy pamiętać, iż edukacja nauczyciela nie kończy się wraz z otrzymaniem przez niego dyplomu wyższej uczelni. Z założenia ukończenie studiów powinno być początkiem nowej drogi – drogi samodoskonalenia i podwyższania kompetencji zawodowych. Jest to element niezbędny, gdyż dzisiejszy świat zmienia się w sposób dynamiczny. Zadaniem dobrego nauczyciela jest podążanie za zmianami, stałe aktualizowanie swojej wiedzy i konfrontowanie jej ze zdobyczami współczesnej nauki. Ważną rolę odgrywa tu także świadomość samokształcenia, wiążącego się z ideą kształcenia przez całe życie, które powinno być integralna częścią systemu edukacyjnego.[529] W związku z powyższym zasadnym jest, by nauczyciele – niezależnie od posiadanego stażu pracy w szkole – stale podnosili swoje kompetencje merytoryczne. Jest to możliwie dzięki uczestniczeniu w różnorakich formach doskonalenia zawodowego. Kursy, szkolenia, warsztaty czy studia w trybie podyplomowym są tutaj optymalnym rozwiązaniem. Oczywiście należy zwrócić uwagę na to, iż poziom merytoryczny wspominanych form doskonalenia zawodowego powinien być odpowiedni.

[527] Y. W. Purnomo: *The complex Relationship between Teachers' Mathematics-related Beliefs and Their Practices in Mathematics Class. „The New Educational Review"* 2017, Vol. 47, No. 1.
[528] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *Ćwierć wieku modernizacji…,* s. 5-46.
[529] R. Parzęcki: *Samokształcenie potrzebą uczącego się człowieka*. W: *Optymalizacja sytuacji szkolnej uczniów*. Red. J. Jakóbowski. Bydgoszcz: Wydawnictwo Uczelniane Akademii Bydgoskiej, 2000, s. 144.

Przyglądając się ofertom różnych ośrodków szkolenia i doskonalenia nauczycieli można odnieść wrażenie, iż na rynku nie ma obecnie zbyt wielu ofert służącym podnoszeniu kompetencji nauczycieli w zakresie edukacji matematycznej. Jest to przestrzeń wciąż wymagająca zagospodarowania.

Przeprowadzone badania sondażowe ukazały znajomość heurystycznej metody G. Polya przez co trzeciego z badanych nauczycieli. Zdecydowana większość respondentów albo wcześniej nie poznała metody stworzonej przez węgierskiego uczonego, albo jej po prostu nie pamiętała. Warto przy tym wspomnieć, iż nauczyciele deklarujący znajomość metody G. Polya potrafili wskazać jej liczne walory kształcące w odniesieniu zarówno do uczniów, jak i ich samych.

Stosowanie każdej z metod kształcenia w procesie dydaktycznym, nie tylko metody problemowej wiąże się z jednej strony z wiedzą teoretyczną obejmującą jej założenia, a z drugiej z doświadczeniem w jej stosowaniu w praktyce pedagogicznej. Wiedza tak niewielkiej liczby nauczycieli o metodzie G. Polya, upoważnia do stwierdzenia, że jej możliwości nie są w zadowalającym stopniu wykorzystywane w polskich szkołach na pierwszym etapie edukacyjnym. Tej sytuacji nie poprawi stosunkowo mała liczba polskich opracowań naukowych dotyczących tej metody. Większe zainteresowanie środowiska naukowego metodą G. Polya mogłoby przyczynić się do jej popularyzacji zarówno w środowisku naukowym, jak i nauczycielskim.

Zaprezentowane w rozdziale 7 wyniki badań własnych oraz przeprowadzone na ich podstawie wnioskowania statystyczne pozwalają ocenić heurystyczną metodę G. Polya jako skuteczną w pracy z uczniami klas trzecich szkoły podstawowej. W przedstawionych wynikach ukazano pozytywny wpływ zastosowania metody na umiejętność rozwiązywania matematycznych zadań problemowych. Metoda G. Polya okazała się być szczególnie efektywna na etapie wczesnoszkolnym podczas stosowania jej w zakresie rozwiązywania zadań arytmetycznych. Z uzyskanymi wynikami badań własnych korespondują wyniki badań uzyskane przez E. Stuckiego. Udowodnił on, iż stosowanie metody G. Polya wpływa na rozwój myślenia matematycznego uczniów oraz inspiruje i wdraża ich do różnych sposobów samodzielnego rozwiązywania zadań, a także do prawidłowej techniki uczenia się.[530] Ponadto metoda G. Polya rozwija zainteresowania uczniów matematyką, podnosi poziom kształcenia matematycznego,

[530] E. Stucki: *Heurystyczna metoda Polya…,* s. 588-592.

a także przyczynia się do głębszego i pełniejszego poznania przez uczniów struktury zadań oraz związków i zależności między danymi a problemami matematycznymi w nich zawartymi.[531]

Przytoczone powyżej argumenty powinny zachęcić nauczycieli pierwszego etapu edukacyjnego do zapoznania się z założeniami metody stworzonej przez węgierskiego matematyka oraz do włączenia jej w poczet stosowanych przez siebie na zajęciach matematycznych metod kształcenia.

Jak się okazało, metoda G. Polya, oprócz rzeczonej efektywności w zakresie rozwoju umiejętności matematycznych uczniów, posiada także wiele innych walorów. Zaobserwowano bowiem korzyści związane z jednej strony z aktywnością uczniów podczas zajęć matematycznych, z drugiej zaś strony ze sferą ich motywacji. Rzecz jasna korzyści te mają bezpośredni związek z uzyskiwanymi przez uczniów wynikami w zakresie umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych.

Pierwszą grupę korzyści związanych z rozwiązywaniem przez uczniów zadań problemowych z wykorzystaniem metody G. Polya wiązać należy z ich aktywnością na zajęciach matematycznych. Podczas trwania zajęć w grupach eksperymentalnych zauważono, iż wraz z upływem czasu wzrosła aktywność uczniów w nich uczestniczących. Aktywność ta wyrażała się zarówno samodzielnym podejmowaniem prób rozwiązywania poszczególnych zadań ale także wzrostem aktywności polegającej na chętnym zgłaszaniu się do odpowiedzi i przedstawianiu na forum klasy swoich pomysłów. Podczas zajęć matematycznych prowadzonych zgodnie z założeniami metody G. Polya, większość uczniów podejmowała aktywność poznawczą, której celem było rozwiązanie stawianego przez nimi zadania problemowego. Uczniowie samodzielnie próbowali zrozumieć treść matematycznych zadań, następnie wymyślali sposoby ich rozwiązania oraz sprawdzali poprawność swoich rozumowań. Widoczna była także chęć uczniów do podejmowania kolejnych wyzwań. Liczba uczniów, którzy aktywnie i samodzielnie rozwiązywali poszczególne zadania matematyczne pracujących metodą G. Polya była większa w porównaniu do liczby uczniów uczestniczących w zajęciach prowadzonych tradycyjnymi metodami. Tym samym liczba uczniów biernie uczestniczących w zajęciach, czekających tylko na przepisanie z tablicy gotowej odpowiedzi była mniejsza w grupie pracującej z wykorzystaniem metody G. Polya, niż wśród uczniów pracujących innymi metodami.

[531] E. Mieleszkiewicz: *Rozwiązywanie zadań tekstowych*. *„Życie szkoły”* 2008, nr 4, s. 16-20.

Obserwacje przeprowadzone w grupach kontrolnych wykazały, iż aktywność uczniów nauczanych tradycyjnymi metodami jest znacznie mniejsza niż uczniów, którzy rozwiązywali matematyczne zadania problemowe z wykorzystaniem metody G. Polya. Uczniowie ci bardzo często zamiast podejmować samodzielne próby rozwiązania zadania matematycznego, biernie czekali na podanie gotowej odpowiedzi. Ponadto w grupach kontrolnych dało się zauważyć, iż tylko nieliczna grupa uczniów zgłaszała chęć rozwiązania zadania na forum klasy.

W trakcie trwania zajęć w grupach eksperymentalnych uczniowie samodzielnie rozwiązywali matematyczne zadania problemowe, zgodnie z procedurą zaproponowaną przez G. Polya. Wytyczne metody zalecają etapową pracę nad rozwiązaniem zadań. Etapami tymi są zrozumienie zadania, układanie planu rozwiązania, wykonanie planu, sprawdzenie wyniku oraz refleksja nad zadaniem – rzut oka wstecz. Ich rzetelna realizacja ma kluczowe znaczenie dla rozwijania umiejętności rozumienia oraz rozwiązywania matematycznych zadań. W trakcie zajęć w grupach eksperymentalnych uczniowie mieli stwarzane okazje do samodzielnego odczytywania i interpretowania treści matematycznych zadań problemowych. Okazało się, iż uczniowie mają trudności w zakresie czytania ze zrozumieniem tekstów matematycznych. Trudności te dało się zauważyć szczególnie na początku trwania zajęć w grupach eksperymentalnych. Stosowanie heurystycznej metody G. Polya wspomogło rozwijanie tejże umiejętności. W miarę upływu czasu uczniowie nabierali coraz większej wprawy w samodzielnym odczytywaniu i analizowaniu treści matematycznych zadań. Samodzielność w tym zakresie jest warunkiem koniecznym do poprawnego ich rozwiązania. Podczas zajęć w grupach eksperymentalnych uczniowie samodzielnie planowali swoją pracę nad rozwiązywaniem poszczególnych zadań problemowych. Samodzielnie je rozwiązywali oraz sprawdzali otrzymane wyniki. Mieli okazję także do realizowania ostatniego etapu pracy nad zadaniem, jakim jest refleksja nad zadaniem.

Aby uczniowie mogli z powodzeniem korzystać podczas zajęć matematycznych z metody G. Polya koniecznym jest, by to nauczyciele w pierwszej kolejności poznali szczegółowo procedurę postępowania zgodnie z jej założeniami. Muszą oni nauczyć się jej stosowania w praktyce, by następnie, w swojej działalności edukacyjnej, nauczyć posługiwania się nią uczniów. W związku z powyższym raz jeszcze należy sformułować dwa postulaty. Po pierwsze należy zadbać o to, by studenci w ramach metodycznego przygotowywania do prowadzenia zajęć z zakresu edukacji matematycznej zostali zapoznani z metodą G. Polya w sposób wyczerpujący. Za wyczerpujący uznać można taki model, w którym przyszli nauczyciele będą potrafili nie tylko teoretycznie opisać metodę, ale także zastosować jej założenia w praktyce pedagogicznej. Niezaprzeczalnie należy uświadamiać nauczycieli akademickich o konieczności zapoznawania studentów z metodą G. Polya podczas zajęć z zakresu metodyki edukacji matematycznej. Po drugie należy uświadamiać nauczycielom już pracującym w zawodzie konieczność regularnego dokształcania się, w celu stałego uaktualniania i poszerzania zasobu posiadanej przez nich wiedzy teoretycznej i praktycznej.

Obserwacje zajęć matematycznych w grupach kontrolnych wykazały, iż samodzielność uczniów podczas rozwiązywania matematycznych zadań była bardziej ograniczona niż aktywność uczniów z grup eksperymentalnych. Podczas rozmów nauczycielki grup kontrolnych deklarowały, iż ich uczniowie wykonują podczas zajęć działania, podobne do procedury zaproponowanej przez G. Polya. Ich zdaniem samodzielnie analizują oni treść matematycznych zadań, mają okazję do generowania własnych pomysłów na ich rozwiązanie oraz sprawdzają otrzymane wyniki. Obserwacje wykazały jednak, iż w każdym z wymienionych elementów aktywność uczniów była ograniczona. Zmniejszenie aktywności uczniów w opisywanych zakresach skutkowało najczęściej uzyskiwaniem przez nich niezadawalających efektów pracy.

Zastosowanie heurystycznej metody G. Polya podczas zajęć matematycznych korzystanie wpływa także na formę pracy uczniów. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem metody G. Polya stwarza im bowiem okazje do kształtowania umiejętności trudnej sztuki pracy zespołowej, tak ważnej na następnych etapach kształcenia. Podczas rozwiązywania zadań problemowych uczniowie z grup eksperymentalnych często pracowali zarówno w parach, jak i w małych grupach. Umożliwiało to im wspólne generowanie pomysłów na rozwiązanie poszczególnych problemów. Badania pokazują, iż uczenie się w małych grupach, zarówno w zakresie odtwarzania nabytej wiedzy, jak i opanowania technik pracy umysłowej jest skuteczniejsze, gdyż wiedza osiągnięta w małych grupach okazuje się być trwalsza.[532] Oczywiście uczniowie grup eksperymentalnych mieli możliwość także indywidualnej pracy z wykorzystaniem metody G. Polya. W tych przypadkach metoda okazywała się być równie dobra, co podczas pracy w parach i w małych grupach.

Podczas zajęć matematycznych uczniowie grup kontrolnych najczęściej pracowali indywidualnie. Rzadko stwarzano im okazje do pracy zespołowej. W rozmowach

---

[532] E. Putkiewicz: *Proces komunikowania się na lekcji*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1990, s. 78.

nauczycielki badanych grup deklarowały natomiast, iż ich uczniowie często mają możliwość pracy grupowej.

Podsumowując, korzyściami związanymi ze sferą aktywności uczniów podczas zajęć matematycznych, które zauważono u uczniów grup eksperymentalnych stosujących heurystyczną metodę G. Polya były:

- zwiększenie aktywności uczniów podczas zajęć matematycznych,
- zwiększenie samodzielności w zakresie rozwiązywania matematycznych zadań problemowych,
- zwiększenie samodzielności w zakresie samodzielnego wykonywania poszczególnych etapów rozwiązywania zadań, zgodnych z procedurą metody,
- zwiększenie samodzielności uczniów w zakresie odczytywania i analizowania treści matematycznych zadań,
- rozwijanie umiejętności współpracy w parach oraz w małych grupach.

Druga zauważona grupa korzyści wiąże się ze sferą motywacji uczniów do pracy na zajęciach matematycznych. Podczas zajęć w grupach eksperymentalnych, w których wykorzystywano metodę G. Polya widoczny był wzrost motywacji uczniów do aktywnego uczestniczenia w nich. Ponadto zauważono, iż podczas ich trwania nastąpił wzrost wewnętrznej motywacji uczniów do rozwiązywania matematycznych zadań problemowych. U uczniów widoczna była chęć rozwiązywania zadań dla samej przyjemności płynącej z tego faktu. Praca uczniów nie wiązała się z gratyfikacją w postaci ocen szkolnych. Pomimo to rozwiązywali oni kolejne zadania problemowe chętnie i z zaangażowaniem, nie oczekując uzyskania oceny.

Rozwiązywane przez uczniów grup eksperymentalnych zadania problemowe okazały się być dla nich niełatwym wyzwaniem. Rozwiązywanie zadań jest podstawową działalnością uczniów na lekcjach matematyki, jednak równocześnie – jak zauważa H. Siwek – stanowi najczęstszą trudność na każdym etapie edukacji.[533] W trakcie rozwiązywania zadań problemowych uczniowie grup eksperymentalnych odnosili liczne porażki, często popełniali błędy. Pomimo to chętnie wykonywali poszczególne zadania i z zaangażowaniem dążyli do otrzymania wyniku. Ważne było także to, iż uczniom zależało na osiągnięciu wyniku prawidłowego. Początkowo odnoszone porażki powodowały u uczniów wycofanie, blokowały w nich chęć do dalszej pracy.

[533] H. Siwek: *Rola zabaw i zadań tekstowych w kształceniu matematycznym dzieci*. „*Matematyczna edukacja dzieci*", 2016, nr 1.s. 55.

Jak zauważono, stosowanie zaleceń G. Polya spowodowało, iż u uczniów nastąpił wzrost wiary we własne umiejętności matematyczne. Coraz odważniej prezentowali oni także na forum klasy swoje pomysły. Zaobserwowano – tak istotny podczas uczenia się matematyki – wzrost odporności emocjonalnej na sytuacje trudne. Z czasem uczniowie grup eksperymentalnych zrozumieli, że popełnianie błędów w trakcie rozwiązywania zadań problemowych jest rzeczą naturalną i niekoniecznie świadczy o lukach w posiadanej wiedzy lub też o braku kompetencji. Wśród uczniów uczestniczących w zajęciach realizowanych metodą G. Polya można było zaobserwować spadek napięcia emocjonalnego związanego z rozwiązywaniem matematycznych zadań problemowych. Co ciekawe, nawet uczniowie wykazujący trudności w uczeniu się matematyki wraz z upływem czasu nabierali większej pewności siebie oraz chętniej zgłaszali swoje pomysły na forum klasy. Pod koniec trwania eksperymentu uczniowie w większości potrafili w sposób konstruktywny radzić sobie z napięciami emocjonalnymi powstałymi w wyniku odniesionej porażki. Jest to bardzo istotny argument świadczący o tym, iż metodę G. Polya warto wykorzystywać na zajęciach matematycznych podczas pracy z uczniami w młodszym wieku szkolnym.

Istotna jest także świadomość nauczycieli odnośnie emocji występujących w trakcie rozwiązywania zadań problemowych. Uczniowie powinni czuć potrzebę rozwiązywania matematycznych zadań, powinni także wykazywać pozytywne emocje wobec tego zadania. Badania wskazują, iż lepsze wyniki w rozwiązywaniu zadań problemowych uzyskują ci uczniowie, dla których proces ich rozwiązywania jest osobiście ważny.[534] Stanowi to wyzwanie dla nauczycieli. Ich zadaniem jest w końcu nie tylko nauczać ale także kształtować pozytywne postawy wobec procesu uczenia się.

Podsumowując, korzyściami związanymi ze sferą motywacji uczniów podczas zajęć matematycznych, które zauważono u uczniów grup eksperymentalnych stosujących heurystyczną metodę G. Polya były:

- wzrost motywacji uczniów do aktywnego uczestniczenia w zajęciach matematycznych,
- wzrost wewnętrznej motywacji uczniów do podejmowania samodzielnych prób rozwiązywania matematycznych zadań problemowych,
- wzrost wiary we własne umiejętności matematyczne,

[534] A. D. Bradford, J. Carifio: *Mathematical Sophistication and Differentiated Emotions during Mathematical Problem Solving*. „*Journal of Mathematics and Statistics*” 2007, nr 3 (4). https://thescipub.com/pdf/10.3844/jmssp.2007.163.167

– wzrost odporności emocjonalnej na sytuacje trudne.

Potwierdzona w toku badań skuteczność metody G. Polya oraz zaprezentowane powyżej korzyści związane z jej wykorzystaniem mogą niewątpliwie zachęcić nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej do korzystania z niej podczas zajęć matematycznych. Na podstawie powyższego opisu można sformułować wskazówki praktyczne dla nauczycieli, którzy są zainteresowani rozwijaniem umiejętności swoich uczniów w zakresie rozwiązywania matematycznych zadań problemowych.

Po pierwsze nauczyciele powinni skupić się nie na ilości, a na jakości rozwiązywanych przez uczniów zadań matematycznych. W pracy z uczniami w młodszym wieku szkolnym warto sięgać po zadania o charakterze problemowym, gdyż wykonywanie jedynie zadań standardowych wpływa niekorzystnie na rozwój ich myślenia. Rozwiązywanie problemów powinno towarzyszyć uczniom od samego początku uczenia się w szkole. Uczniowie rozwiązują zadania problemowe po to, by radzić sobie w sytuacjach nowych – w nauce, w życiu codziennym i później w pracy zawodowej, aby przygotować się do posługiwania się matematyką przy badaniu problemów teoretycznych i praktycznych.[535] O wiele bardziej pożytecznym dla uczniów jest zatem rozwiązanie mniejszej ilości zadań wartościowszych, a takimi są właśnie zadania problemowe, niż wielokrotne rozwiązywanie zadań nie mających większych walorów poznawczych.

Po drugie należy także odpowiednio dobierać metody pracy. Korzystnym dla uczniów jest ograniczenie metod podających na rzecz wykorzystywania metod problemowych. Badania pokazują, iż u uczniów, w przypadku których nauczyciele preferują pracę prawie wyłącznie metodami podającymi, występują zahamowania przed komunikowaniem swoich pomysłów.[536] Jedną z bardziej wartościowych metod problemowych, którą nauczyciele z sukcesem mogą wykorzystywać w pracy z uczniami w młodszym wieku szkolnym jest heurystyczna metoda G. Polya, której liczne walory poznawcze zaprezentowane zostały w niniejszej pracy. Zasadnym jest zatem, by nauczyciele zapoznali się z jej założeniami oraz regularnie wykorzystywali ją w pracy ze swoimi uczniami.

Warto pamiętać także o samodzielności uczniów w procesie rozwiązywania zadań. Korzystniejszym jest rozwiązanie przez ucznia jednego zadania samodzielnie, z pełnym jego zrozumieniem oraz z wykorzystaniem własnych strategii postępowania,

---

[535] G. Treliński: *Kształcenie matematyczne w…,* s. 10.
[536] M. Musioł: *Media w procesie…,* s. 176.

niż rozwiązanie kilku zadań bez zrozumienia kolejno wykonywanych czynności. Nauczyciele klas początkowych powinni przykładać większą wagę do sposobu zapoznawania się uczniów z treścią matematycznych zadań. Pełne zrozumienie treści zadania tekstowego stanowi bowiem punkt wyjścia dla poszukiwania dróg rozwiązania. [537] W związku z tym warto poświecić więcej czasu na samodzielne analizowanie przez uczniów treści matematycznych zadań. Ważnym jest, by uczniowie podejmowali samodzielne próby rozwiązywania zadań, nawet jeśli początkowo będą one nieudane. Jest to jedyny sposób na pełne zrozumienie matematyki i praw nią rządzących.

Zasadnym zdaje się być także zmniejszenie liczby zadań wykonywanych przez uczniów podczas zajęć matematycznych w zeszytach ćwiczeń oraz w kartach pracy. Konieczność odejścia od „papierowej edukacji matematycznej” postuluje E. Gruszczyk-Kolczyńska. [538] Nauczanie matematyki ograniczające aktywność uczniów jedynie do uzupełniania luk w wyznaczonych miejscach niewątpliwie ogranicza także – a może nawet przede wszystkim – myślenie uczniów. Ponadto skutkuje brakiem samodzielności w zakresie zapisywania kolejnych kroków związanych z rozwiązaniem matematycznego zadania, czy nawet sporządzania własnych notatek. Należy pamiętać także, iż ważne jest stosowanie mediów i materiałów dydaktycznych, odwoływanie się do samodzielnych doświadczeń i manipulacji wykonywanych przez uczniów na konkretach. Szczególnie istotne znaczenie ma to podczas pracy z uczniami w młodszym wieku szkolnym. Dlatego tak ważnym jest, by uczniowie podczas zajęć matematycznych mieli możliwość korzystania z różnorakich pomocy, takich jak liczmany, liczydła, geoplany, czy inne konkretne przedmioty, które wspomagać będą proces rozumienia matematycznych treści.

Kolejną praktyczną wskazówką dla nauczycieli może być także postulat ograniczenia ich roli podczas zajęć matematycznych, na rzecz zwiększenia aktywności po stronie uczniów. Może on być realizowany w praktyce edukacyjnej poprzez stosowanie w pracy z uczniami metod aktywizujących i problemowych. Jedną z odpowiednich metod temu służących jest heurystyczna metoda G. Polya. Rolą nauczyciela nie jest bowiem przekazywanie wiedzy za pomocą metod podających. Powinien on towarzyszyć swoim uczniom w samodzielnym, opartym na własnych doświadczeniach eksplorowaniu rzeczywistości, budowaniu sądów i konstruowaniu

[537] G. Treliński: *Kształcenie matematyczne w…,* s. 22.
[538] E. Gruszczyk-Kolczyńska: *O kryzysie edukacji matematycznej dzieci. Rozpaczliwe wołanie o działania naprawcze*. „*Matematyczna edukacja dzieci*” 2016, nr 1, s. 5-40.

własnej wiedzy pozwalającej na rozumienie świata. Nauczyciel powinien jak najczęściej umożliwiać swoim uczniom rozwiązywanie problemów, poprzez stawianie ich wobec sytuacji nowych, niestandardowych, odrywających do schematycznych sposobów rozumowania i postępowania. Powinien on także potrafić stwarzać uczniom warunki sprzyjające ich samodzielności w zakresie poszukiwania najwłaściwszych sposobów rozwiązywania matematycznych problemów.

Niezwykle ważna jest także atmosfera panująca na zajęciach. Podczas rozwiązywania problemów niebagatelną rolę pełni osoba nauczyciela oraz jego postawa wobec uczniów. W codziennej pracy z uczniami preferowany powinien być styl demokratyczny, który zapewnia uczniom sporo swobody w czasie poszukiwania rozwiązania problemu.[539] Bezpieczna, zapewniająca komfort psychiczny pracy atmosfera na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej jest niezwykle istotna, szczególnie w kontekście pracy z uczniem wykazującym trudności w uczeniu się matematyki. Ów komfort wyrażać się może w szczególności w akceptowaniu uczniów takimi, jakimi są, w respektowaniu ich prawa do samodzielności oraz w stwarzaniu okazji do uczenia się poprzez ich własne doświadczenia. Jak wskazują wyniki badań J. Góźdź zachowania nauczyciela takie jak wyjaśnianie pojawiających się wątpliwości, udzielanie odpowiedzi na pytania uczniów, sygnały zachęty do zadawania przez nich pytań, docenianie uczniowskich starań i samodzielnych prób rozwiązywania problemów, a także dawanie poczucia zrozumienia w odniesieniu do pojawiających się trudności są odbierane przez uczniów jako zachęcające do nauki.[540] Istotne znaczenie ma umożliwienie uczniom popełniania błędów. Należy pamiętać, jak ważnym w procesie uczenia się jest uczenie się przez próby i błędy, kiedy liczy się na to, że w serii prób, nawet chaotycznych, któraś z nich przybliży nas do prawidłowego rozwiązania.[541] Szczególnie ważne jest to na zajęciach matematycznych. Wszystkie te elementy mogą być z powodzeniem realizowane poprzez wykorzystanie w pracy na zajęciach matematycznych heurystycznej metody G. Polya. Sprzyja ona bowiem demokratycznemu stylowi pracy oraz relacji opartej na dialogu pomiędzy nauczycielem i uczniami.

Codzienna praca nauczycieli powinna mieć na celu oswajanie uczniów z tak trudną dla nich dziedziną, jaką jest matematyka. Zaprezentowane w rozprawie

[539] M. Musioł: *Media w procesie…,* s. 180.
[540] J. Góźdź: *Postrzeganie zachowań nauczyciela a motywacja uczniów do nauki – wyniki badań*. W: *Współczesna edukacja. Wielopłaszczyznowość zadań*. Red. J. Skibska, J. Wojciechowska, Kraków: Wydawnictwo LIBRON – Filip Lohner, 2016, s. 58.
[541] A. Janowski: *Poznawanie uczniów…* s. 47.

wyniki badań pokazują, iż stosowanie heurystycznej metody G. Polya może przyczynić się do zwiększenia zaangażowania uczniów podczas pracy na zajęciach matematycznych, a także do przełamania ich bierności na zajęciach z edukacji matematycznej. Metody heurystyczne inspirują uczniów do samodzielnych poszukiwań oraz do podejmowania własnej aktywności. Stwarzają liczne okazje do pracy w grupie, do dzielenia się z innymi własnymi pomysłami. Istotnym elementem jest to, iż edukacja matematyczna realizowana z wykorzystaniem metod heurystycznych, takich jak metoda G. Polya sprawia uczniom wiele radości. Umożliwia im osiągane sukcesów, a także stwarza okazje do przeżywania satysfakcji z samodzielnego rozwiązywania problemu. Naturalny i zdroworozsądkowy charakter metody G. Polya sprawia, iż jest ona chętnie stosowana przez uczniów, nie blokuje ich samodzielności, a wręcz przyczynia się do jej rozwoju.

Powyższe wskazówki mogą okazać się być pomocne dla nauczycieli pierwszego etapu edukacyjnego. Uwzględniając je w swojej codziennej pracy nauczyciele powinni pamiętać, iż w dużej mierze to od nich samych zależy jakość realizowanej przez nich edukacji matematycznej. Ogromna odpowiedzialność, jaka spoczywa na nauczycielach powinna być czynnikiem mobilizującym ich do podnoszenia swoich kompetencji merytorycznych oraz praktycznych. Istotnym jest realizowanie kształcenia matematycznego w sposób świadomy i mądry.

Za podsumowanie podjętych w dysertacji rozważań teoretycznych i praktycznych wybrano cytat. Są to słowa autorstwa G. Polya, którego metoda, ale przede wszystkim sposób myślenia o matematyce i jej nauczaniu stały się inspiracją dla autorki niniejszej pracy.

„Nauczyciel, który chce być pożyteczny dla wszystkich uczniów, zarówno dla tych, którzy w przyszłości będą korzystać z matematyki, jak i dla tych, którzy nie będą korzystać, powinien nauczać rozwiązywania zadań tak, jakby zadanie oparte było w jednej trzeciej na matematyce i w dwóch trzecich na zdrowym rozsądku…”[542]

/George Polya/

[542] G. Polya: *Odkrycie matematyczne...* , s. 315.

Bibliografia

Monografie i artykuły

1. Adamek I.: *Podstawy edukacji wczesnoszkolnej*. Kraków: Wydawnictwo „Impuls”, 2000.

2. Adamek I.: *Rozwiązywanie problemów przez dzieci*. Kraków: Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Komisji Edukacji Narodowej, 1996.

3. Babbie E.: *Badania społeczne w praktyce*. Przeł. W. Betkiewicz. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004.

4. Bakiera L., Stelter Ż.: *Leksykon psychologii rozwoju człowieka*. Tom 2. Warszawa: Difin SA, 2011.

5. Barber T. X.: *Pułapki w badaniach: dziewięć rodzajów wpływów, związanych z osobami badacza i eksperymentatora*. W: *Społeczne konteksty badań psychologicznych i pedagogicznych. Wybór tekstów*. Red. J. Brzeziński, J. Siuta. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, 1991.

6. Bee H.: *Psychologia rozwoju człowieka*. Przekł. A. Wojciechowski. Poznań: Wydawnictwo Zysk i S-ka, 2004.

7. Bielenica K., Bura M., Kwil M., Lankiewicz B.: *Nowe już w szkole. Matematyka*. Cz. 4. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era Sp. z o.o., 2013.

8. Bilewicz-Kuźnia B.: *Kształtowanie pojęć matematycznych na etapie wczesnej edukacji*. W: *Psychopedagogiczne aspekty rozwoju i edukacji małego dziecka*. Red. T. Parczewska. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie Skłodowskiej, 2010.

9. Birch A.: *Psychologia rozwojowa w zarysie*. Przeł. J. Łuczyński, M. Olejnik. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2005.

10. Bobrowska-Nowak W., Drynda D.: *Słownik pedagogów polskich*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, 1998.

11. Bonar J.: *Ewaluacja procesu myślenia dywergencyjnego uczniów wczesnej edukacji*. W: *Ewaluacja a jakość edukacji. Koncepcje – doświadczenia – kierunki praktycznych rozwiązań*. Red. G. Michalski. Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 2011.

12. Bonar J.: *O potrzebie rozwijania myślenia twórczego w edukacji matematycznej uczniów*. W: *Wczesnoszkolna edukacja matematyczna – ograniczenia* *i ich przełamywanie*. Red. A. Kalinowska. Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, 2013.

13. Bondecka-Krzykowska I.: *Przewodnik po historii matematyki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, 2006.

14. Bradford A. D., Carifio J.: *Mathematical Sophistication and Differentiated Emotions during Mathematical Problem Solving*. „*Journal of Mathematics and Statistics”* 2007, nr 3 (4).

15. Bruner J. S.: *Procesy reprezentacji w dzieciństwie*. W: *Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznawania*. Red. J. S. Bruner. Przeł. B. Mroziak. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1978.

16. Brzeziński J.: *Badania eksperymentalne w psychologii i pedagogice*. Warszawa: Wydawnictwo Scholar, 2000.

17. Brzeziński J.: *Metody badań psychologicznych w zarysie*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, 1975.

18. Cackowska M.: *Rozwiązywanie zadań tekstowych w klasach I-III*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1993.

19. Cheba A.: *Utrwalamy i sprawdzamy. Pomiar dydaktyczny w nauczaniu początkowym matematyki*. Łódź: Wydawnictwo Res Polona, 2000.

20. Ciechanowska D.: *Efektywność stymulowania myślenia twórczego uczniów poprzez stosowanie dramy*. W: *Dydaktyka w dobie przemian edukacyjnych*. Red. K. Denek, F. Bereźnicki. Szczecin 1999.

21. Ciosek M.: *O działalności Profesora Stefana Turnaua jako dydaktyka matematyki*. W: „*Dydaktyka matematyki*”. T. 23. Kraków: Polskie Towarzystwo Matematyczne, 2001.

22. Clauss G., Ebner H.: *Podstawy statystyki dla psychologów, pedagogów i socjologów*. Przeł. J. Olesiak. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1972.

23. Courant R., Robbins H.: *Co to jest matematyka*. Przeł. R. Bittner. Warszawa: PWN, 1959.

24. Cydzik Z.: *Nauczanie matematyki w klasie pierwszej i drugiej szkoły podstawowej*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1990.

25. Cygan A.: *Metoda Georga Polya czyli jak zachęcić uczniów do rozwiązywania zadań*. „*Nauczanie początkowe: kształcenie zintegrowane*” 2012/2013, nr 1.

26. Czarnecki K. M.: *Psychologia zmian rozwojowych człowieka*. Sosnowiec: Oficyna Wydawnicza „Humantas", 2015.

27. Davis P. J. Hersh R.: *Erfahrung Mathematik*. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1985.

28. Dawid Ł.: *Uczenie się jako forma działalności ucznia*. W: *Dziecko w świecie szkoły. Szkice o wychowaniu*. Red. B. Dymara. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2010.

29. Dąbrowski M.: *Pozwólmy dzieciom myśleć: o umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna, 2007.

30. de Bono E.: *Naucz swoje dziecko myśleć.* Przeł. M. Madaliński. Warszawa: Wydawnictwo PRIMA, 1994.

31. de Bono E.: *Sześć kapeluszy, czyli sześć sposobów myślenia.* Przeł. M. Patterson. Warszawa: Wydawnictwo MEDIUM, 1996.

32. de Finetti B.: *Sztuka widzenia w matematyce*. Przeł. J. Panz. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1983.

33. Dianni J., Wachułka A.: *Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1963.

34. Doman G., Doman J.: *Subtelna rewolucja. Liczenie od pierwszego roku życia*. Przeł. P. Gancarczyk, K. Gancarczyk. Gliwice: Wydawnictwo HELION, 2013.

35. Domoradzki S.: *Intuicyjny i formalny sposób kształtowania pojęcia liczby naturalnej u dzieci*. W: *Dziecko i matematyka*. Red. E. Swoboda, J. Gunčaga. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2009.

36. Doulík P., Eisenmann P., Přibyl J., Škoda J.: *Unconventional Ways of Solving Problems in Mathematics Classes*. *„The New Educational Reviev"* 2016, vol. 43. No. 1.

37. Duda R.: *Matematycy XIX i XX wieku związani z Polską*. Wrocław: Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, 2012.

38. Dudel B., *Istota kompetencji kluczowych*. W: *Rozwijanie kompetencji kluczowych uczniów w procesie edukacji wczesnoszkolnej*. Red. J. Uszyńska-Jarmoc, B. Dudel, M. Głoskowska-Sołdatow. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2013.

39. Dudel B., Szada-Borzyszkowska J.: *Kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo-techniczne uczniów klas młodszych*. W: *Rozwijanie kompetencji kluczowych uczniów w procesie edukacji wczesnoszkolnej*.

Red. J. Uszyńska-Jarmoc, B. Dudel, M. Głoskowska-Sołdatow. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2013.

40. Dutkiewicz W.: *Podstawy metodologii badań*. Kielce: Wydawnictwo Stachurski, 2001.

41. Euklides: *Euklides Elementa*. Przeł. E. S. Stamatis. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1969-1977.

42. Filip J., Rams T.: *Dziecko w świecie matematyki*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2000.

43. Filip J.: *O współczesnych tendencjach w nauczaniu – uczeniu się matematyki*. W: *Sztuka bycia nauczycielem*. Red. B. Dymara, Cieszyn: Wydawnictwo Filii UŚ, 1993.

44. Filipiak E.: *Z Wygotskim i Brunerem w tle: słownik pojęć kluczowych*. Bydgoszcz: Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego, 2011.

45. Franke M.: *Rozwiązywanie zadań na lekcjach matematyki w klasach początkowych*. W: *Wybrane problemy pedagogiki wczesnoszkolnej*. Red. H. Moroz. Katowice: Uniwersytet Śląski w Katowicach, 1987.

46. Gajdzica Z.: *Sytuacje trudne w opinii nauczycieli klas integracyjnych*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2011.

47. Galant J.: *Dostrzeganie i rozwiązywanie problemów w klasach początkowych*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1987.

48. Ganczarska M.: *Nieklasyczne metody problemowe i szanse ich stosowania w edukacji wczesnoszkolnej. W: Kształcenie wczesnoszkolne na przełomie tysiącleci*. Red. W. Puślecki. Warszawa: Polska Akademia Nauk, 2000.

49. Gębuś D., Pierzchała A.: *Twórczy nauczyciele, pomysłowi uczniowie. Osobowościowe korelaty kreatywności nauczycieli w perspektywie analizy transakcyjnej*. Częstochowa: Wydawnictwo im. Stanisława Podobińskiego Akademii im. Jana Długosza, 2016.

50. Gleichgewicht B.: *Arytmetyczne zadania tekstowe dla nauczycieli klas 1-4*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1988.

51. Głodkowska J.: *Pomóżmy dziecku z upośledzeniem umysłowym doświadczać przestrzeni*, Warszawa: Wyższa Szkoła Pedagogiki Specjalnej, 2000.

52. Gomółka-Walaszek I., *Operacyjność myślenia konkretnego i jej uwarunkowania (w aspekcie osiągnięć z matematyki w klasie I)*, Częstochowa: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, 1996.

53. Góralski A.: *Być nowatorem. Poradnik twórczego myślenia*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1990.

54. Góralski A.: *George`a Polya, pedagogika mistrzostwa, czyli o relacji uczeń-mistrz i jej regułach*. Warszawa: Wydawnictwo Akademii Pedagogiki Specjalnej, 2013.

55. Góralski A.: *Reguły treningu twórczości*. Warszawa: Akademia Pedagogiki Specjalnej, 2010.

56. Góralski A.: *Twórcze rozwiązywanie zadań. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe*, 1980.

57. Góralski A.: *Wzorce twórczości: eseje filozoficzne i pedagogiczne.* Warszawa: Wydawnictwo „Scholar" : Polskie Towarzystwo Uniwersalizmu, 1998.

58. Góralski A.: *Zadanie, metoda, rozwiązanie*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1984.

59. Góźdź J.: *Postrzeganie zachowań nauczyciela a motywacja uczniów do nauki – wyniki badań*. W: *Współczesna edukacja. Wielopłaszczyznowość zadań*. Red. J. Skibska, J. Wojciechowska, Kraków: Wydawnictwo LIBRON – Filip Lohner, 2016.

60. Gruszczyk-Kolczyńska E. Zielińska E.: *Dziecięca matematyka: książka dla rodziców i nauczycieli*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1997.

61. Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E.: *Wspomaganie rozwoju umysłowego trzylatków i dzieci starszych wolniej się rozwijających*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2004.

62. Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E.: *Zajęcia dydaktyczno-wyrównawcze dla dzieci, które rozpoczną naukę w szkole*. Warszawa: Wydawnictwo Edukacja Polska, 2009.

63. Gruszczyk-Kolczyńska E.: *Ćwierć wieku modernizacji nauczania matematyki. Pedagogiczna analiza sposobów i konsekwencji wprowadzania idei nowej matematyki do edukacji matematycznej dzieci*. „*Matematyczna edukacja dzieci*". 2017, nr. 2.

64. Gruszczyk-Kolczyńska E.: *Diagnoza działalności matematycznej dzieci z klas początkowych*. Katowice: Uniwersytet Śląski, 1985.

65. Gruszczyk-Kolczyńska E.: *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1997.

66. Gruszczyk-Kolczyńska E.: *Edukacja matematyczna w klasie I. Książka dla nauczycieli i rodziców*. Kraków: Wydawnictwo Bliżej Przedszkola, 2014.

67. Gruszczyk-Kolczyńska E.: *O kryzysie edukacji matematycznej dzieci. Rozpaczliwe wołanie o działania naprawcze*. „*Matematyczna edukacja dzieci*" 2016, nr 1.
68. Gruszczyk-Kolczyńska E.: *Papierowa matematyka*. „*Matematyka*" 2013, nr. 1.
69. Gruszczyk-Kolczyńska E.: *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji*. Warszawa: Wydawnictwo Edukacja Polska, 2009.
70. Grzesiak J.: *Konstruowanie i dobór zadań matematycznych w klasach początkowych*. Koszalin: Instytut Kształcenia nauczycieli – ODN, 1984.
71. Grzesiak J.: *Podstawy nauczania początkowego matematyki w zadaniach.* Kalisz: Centrum Doskonalenia Nauczycieli, 1990.
72. Grzywniak C.: *Dojrzałość neuropsychologiczna do szkolnego uczenia się dzieci sześcio- i siedmioletnich*. Kraków: Wydawnictwo „Scriptum", 2013.
73. Guttmejer E.: *Rozumienie treści symbolicznych przez dzieci z klas III-V. Czytanie ze zrozumieniem*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1982.
74. Hawlicki J.*: Rozwijanie uzdolnień matematycznych: rozwiązywanie arytmetycznych zadań tekstowych przez uczniów klas I-IV,* Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1971.
75. Hoene-Wroński: J.M. : *Wstęp do wykładu mathematyki*. Paryż: Biblioteka Polska, 1880.
76. Janowski A.: *Poznawanie uczniów*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1975.
77. Jąder M.: *Efektywne i atrakcyjne metody pracy z dziećmi*. Kraków: Wydawnictwo „Impuls", 2009.
78. Jopkiewicz S., Suliga E.: *Biomedyczne podstawy rozwoju i wychowania*. Radom-Kielce: Instytut Technologii Eksploatacji – Państwowy Instytut Badawczy w Radomiu, 2005.
79. Jóźwiak J., Podgórski J.: *Statystyka od podstaw*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, 2009.
80. Juszczyk S.: *Badania ilościowe w naukach społecznych*. Katowice: Śląska Wyższa Szkoła Zarządzania, 2005.
81. Juszczyk S.: *Badania jakościowe w naukach społecznych. Szkice metodologiczne*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, 2013.
82. Juszczyk S.: *Statystyka dla pedagogów*. Toruń: Wydawnictwo Adam Marszałek, 2001.

83. Juszkiewicz A. P.: *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*. T. 1. Przekł. S. Dobrzycki. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1975.

84. Juszkiewicz: A. P.: *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*. T. 2. Przekł. S. Dobrzycki. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1976.

85. Juszkiewicz: A. P.: *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*. T. 3. Przekł. S. Dobrzycki. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1977.

86. Kandulski M.: *Zarys historii matematyki. Od czasów najdawniejszych do średniowiecza*. Poznań: Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, 1983.

87. Kapica G.: *Edukacyjne bariery kreatywności młodszych uczniów*. W: *Edukacja małego dziecka. Konteksty rozwojowe i wychowawcze*. T. 4. Red. E. Ogrodzka-Mazur, U. Szuścik, J. Oleksy. Cieszyn-Kraków: Oficyna Wydawnicza Impuls, 2013.

88. Kapuścik J.: *Współcześni uczeni polscy. Słownik bibliograficzny*. Tom V. Warszawa: Ośrodek Przetwarzania Informacji, 2006.

89. Kielar-Turska M.: *Średnie dzieciństwo. Wiek przedszkolny.* W: *Psychologia rozwoju człowieka.* T. 2. B. Harwas-Napierała, J. Trempała. Warszawa 2004.

90. Kierstein Z.: *Aktywne metody w kształceniu matematycznym*. Opole: Wydawnictwo Nowik Sp.j., 2004.

91. King B. M., Minium E. W.: *Statystyka dla psychologów i pedagogów*. Przeł. M. Zakrzewska. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2009.

92. Klus-Stańska D.: *W nauczaniu początkowym inaczej*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 1999.

93. Klus-Stańska D., Kalinowska A.: *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2004.

94. Klus-Stańska D., Nowicka M.: *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2005.

95. Klus-Stańska D.: *Konstruowanie wiedzy w szkole*. Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, 2012.

96. Kofler E.: *Z dziejów matematyki*. Warszawa: Wiedza Powszechna, 1956.

97. Kojs W., Różak-Frączek A: *Rola układu pytań w działalności poznawczej uczniów klas początkowych*. W: *Problemy działań dydaktycznych*. Red. W. Kojs. Katowice: Uniwersytet Śląski, 1988.

98. Kojs W.: *Prakseopedagogiczny wgląd w wybrane zagadnienia edukacji, gospodarki i globalizacji*. W: *Edukacja i gospodarka w kontekście procesów globalizacji*. Red. W. Kojs, E. Rostańska, K. Wójcik. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2014.

99. Kojs W.: *Uwarunkowania dydaktycznych funkcji podręcznika*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1975.

100. Kojs W.: *Zadania dydaktyczne w nauczaniu początkowym*. Katowice: Uniwersytet Śląski, 1988.

101. Kołodziejczyk A.: *Późne dzieciństwo – młodszy wiek szkolny*. W: *Psychologia rozwoju człowieka*. Red. J. Trempała. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011.

102. Komosińska K.: *Biomedyczne podstawy rozwoju i wychowania*. Olsztyn: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, 1995.

103. Konarzewski K.: *Jak uprawiać badania oświatowe*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2000.

104. Kopaliński W.: *Słownik mitów i tradycji kultury*. T. III. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Rytm, 2007.

105. Kordos M.: *Wykłady z historii matematyki*, Warszawa: Wydawnictwo Script, 2005.

106. Kotarbiński T.: *O pojęciu metody*. „*Zeszyty filozoficzne Uniwersytetu Warszawskiego*" Nr 1. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1957.

107. Kowalewska A.: *Wybrane układy i funkcje organizmu człowieka ważne dla procesów uczenia się*. W: *Biomedyczne podstawy kształcenia i wychowania*. Red. B. Woynarowska, A. Kowalewska, Z. Izdebski, K. Komosińska. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2010.

108. Kowalski M., Pawłowa E.: *Rozwój matematyki na przestrzeni wieków*. Warszawa, Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego, 2007.

109. Kozielecki J.: *Rozwiązywanie problemów*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1969.

110. Kruger H. H.: *Wprowadzenie w teorie i metody badawcze nauk o wychowaniu*. Przeł. D. Sztobryn. Gdańsk: Gdańskie Towarzystwo Psychologiczne, 2005.

111. Kruszewski K.: *Nauczanie i uczenie się rozwiązywania problemów*. W: *Sztuka nauczania. Czynności nauczyciela*. Red. K. Kruszewski. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993.

112. Krygowska A. Z.: *Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki*. W: „*Dydaktyka matematyki*". Nr 1. Warszawa PWN, Warszawa 1982.

113. Krygowska Z. : *Zarys dydaktyki matematyki*. Cz. 1. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1979.

114. Krygowska Z.: *Zarys dydaktyki matematyki*. Cz. 2. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1977.

115. Krzyżewska J.: *Aktywizujące metody i techniki w edukacji wczesnoszkolnej*. Suwałki: Wydawnictwo Omega, 1998.

116. Kubiczek B.: *Metody aktywizujące: jak nauczyć uczniów uczenia się*. Opole: Wydawnictwo NOWIK, 2005.

117. Kubielski W. W.: *Podstawy pomiaru, konstruowania i ewaluacji testu dydaktycznego*. Warszawa: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP, 2006.

118. Kupisiewicz Cz., Kupisiewicz M.: *Słownik pedagogiczny*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2009.

119. Kupisiewicz Cz.: *O efektywności nauczania problemowego. Z badań nad metodami nauczania przedmiotów matematyczno-przyrodniczych*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1960.

120. Kupisiewicz Cz.: *Podstawy dydaktyki ogólnej*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1974.

121. Legutko M.: *Sylwetka jubilata [Stanisław Turnau]*. „*Dydaktyka matematyki*". T. 23. Warszawa 2001.

122. Lesiak-Laska E. I.: *Z teorii i praktyki wczesnoszkolnej*. Rzeszów: Wydawnictwo WSP, 1993.

123. Ludwikowska E.: *Myślenie matematyczne uczniów szkół ponadgimnazjalnych na przykładzie uczniów województwa kujawsko-pomorskiego*. W: *Diagnozowanie umiejętności praktycznych w toku kształcenia i egzaminowania*. Red. B. Niemierko, M. K. Szmigiel. Kraków: Grupa Tomami, 2017.

124. Łobocki M.: *Metody i techniki badań pedagogicznych*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2000.

125. Marzec B.: *Indywidualizacja procesu nauczania w szkołach podstawowych*. W: *Współczesna edukacja. Wielopłaszczyznowość zadań*. Red. J. Skibska, J. Wojciechowska. Kraków: Wydawnictwo LIBRON – Filip Lohner, 2016.

126. Md Hassan N., Rahman S.: *Problem Solving Skills, Metacognitive Awareness, and Mathematics Achievement: A Mediation Model*. *„The New Educational Review”* 2017, Vol. 49. No. 3.

127. Meadows S.: *Rozwój poznawczy*. W: *Psychologia rozwojowa*. Red. P. E. Bryant, A. M. Colman. Przeł. A. Bezwińska-Walerjan. Poznań: Wydawnictwo Zysk i S-ka, 1997.

128. Mieleszkiewicz E.: *Rozwiązywanie zadań tekstowych*. *„Życie szkoły”* 2008, nr 4.

129. Milerski B., Śliwerski B.: *Leksykon PWN. Pedagogika*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2000.

130. Mioduszewski J.: *Continuity. Eleven sketches from the past of mathematics*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, 2016.

131. Morga M.: *Twórcza aktywność uczniów*. *„Życie szkoły”*, 1990, nr 10.

132. Moroz H.: *Kształcenie matematyczne a rozwój społeczno-zawodowy*. Katowice: Uniwersytet Śląski, 1991.

133. Moroz H.: *Nasza matematyka. Zabawy i gry dydaktyczne*. Warszawa: Polska Oficyna Wydawnicza „BGW”, 1991.

134. Moroz H.: *Rozwijanie pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1982.

135. Moroz H.: *Współczesne środki dydaktyczne w nauczaniu początkowym matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1986.

136. Murawski R.: *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1995.

137. Musioł M.: *Media w procesie wychowania*. Toruń: Wydawnictwo Adam Marszałek, 2006.

138. Muzyczka Z., Kordos M.: *Matematyka*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1996.

139. Neapolitański S.: *Zarys dydaktyki matematyki*. Warszawa: PZWS, 1958.

140. Nęcka E.: T*wórcze rozwiązywanie problemów*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls”, 1994.

141. Nęcka E.: *Z badań nad efektywnością technik twórczego myślenia*. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego” 1983.

142. Niemierko B.: *Kształcenie szkolne: podręcznik skutecznej dydaktyki*. Warszawa: Wydawnictwa Akademickie i Profesjonalne, 2007.

143. Niemierko B.: *Ocenianie szkolne bez tajemnic*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2002.

144. Niemierko B.: *Pomiar wyników kształcenia*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1999.Nowak J., *Matematyka – radość odkrywania czy reżim odtwarzania? W: Doświadczanie zmian w teorii i praktyce pedagogicznej*. Red. J. Skibska, J. Wojciechowska. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2015.

145. Nowak W.: *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1989.

146. Nowak-Łojewska A.: *Wybrane obszary edukacji matematycznej dzieci: poradnik dla nauczycieli klas I-III*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji, 2015.

147. Nowecki B. J.: *Krakowska szkoła dydaktyki matematyki*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe WSP, 1984.

148. Ochmańska B.: *Możliwości rozwojowe i potrzeby dziecka w młodszym wieku szkolnym w kontekście edukacji matematycznej*. W: *Rozwijanie zainteresowań i zdolności matematycznych uczniów klas I-III szkoły podstawowej. Poradnik dla nauczyciela*. Red. I. Fechner-Sędzicka, B. Ochmańska, W. Odrobina. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji, 2012.

149. Ochmańska B.: *Twórcze rozwiązywanie problemów*. W: *Rozwijanie zainteresowań i zdolności matematycznych uczniów klas I-III szkoły podstawowej: poradnik dla nauczyciela*. Red. I. Fechner-Sędzicka, B. Ochmańska, W. Odrobina. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji, 2012.

150. Okoń W.: *Nauczanie problemowe we współczesnej szkole*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1987.

151. Okoń W.: *Nowy słownik pedagogiczny*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2001.

152. Okoń W.: *Problem samodzielności myślenia i działania*. W: B. Suchodolski (red.): *Studia pedagogiczne. Kształcenie samodzielności myślenia w procesie nauczania*. Tom IV. Wrocław: Zakład Narodowy im. Ossolińskich Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, 1957.

153. Okoń W.: *U podstaw problemowego uczenia się*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1964.

154. Oszwa U.: *Psychologiczna analiza procesów operowania liczbami u dzieci z trudnościami w matematyce*. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, 2009.

155. Oszwa U.: *Rozwój i ocena umiejętności matematycznych dzieci sześcioletnich*. W: *Doradca nauczyciela sześciolatków*. Warszawa: Centrum Metodyczne Pomocy Psychologiczno-Pedagogicznej, 2006.

156. Oszwa U.: *Zaburzenia rozwoju umiejętności arytmetycznych: problemy diagnozy i terapii*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2006.

157. Palka, S.: *Życie aktywne i twórcze, czyli rzecz o działalności prof. dra hab. Henryka Moroza*. W: *Teoretyczne odniesienia i praktyczne rozwiązania w pedagogice wczesnoszkolnej*. Red. S. Palka. Katowice: Śląsk Sp z o.o., 1994.

158. Parzęcki R.: *Samokształcenie potrzebą uczącego się człowieka*. W: *Optymalizacja sytuacji szkolnej uczniów*. Red. J. Jakóbowski. Bydgoszcz: Wydawnictwo Uczelniane Akademii Bydgoskiej, 2000.

159. Pawlikowska-Brożek Z.: *Matematyka*. W: *Zarys dziejów nauk przyrodniczych w Polsce*. Red. B. Suchodolski. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo „Wiedza Powszechna", 1983.

160. Piaget J.: *Narodziny inteligencji dziecka*. Przeł. M. Przetacznikowa. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1966.

161. Piaget J.: *Studia z psychologii dziecka*. Przeł. T. Kołakowska. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1966.

162. Pilch T., Bauman T.: *Zasady badań pedagogicznych. Strategie ilościowe i jakościowe*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2010.

163. Pilch T.: *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku*. T. 1. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2005.

164. Pilch T.: *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku*. T. 2. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2005.

165. Pilch T.: *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku*. T. 3. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2003, s.168.

166. Pilch T.: *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku*, T. 4. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2005.

167. Pisarski M.: *Matematyka dla naszych dzieci*. Warszawa: Wydawnictwo NOWIK, 1992.

168. Podsiad A.: *Słownik terminów i pojęć filozoficznych*. Warszawa: Instytut Wydawniczy Pax, 2001.

169. Polya G.: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin: Springer, 1975.

170. Polya G.: *How to solve it?* Princeton: Princeton University Press, 1945.

171. Polya G.: *Jak to rozwiązać?* Przeł. L. Kubik. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2009.

172. Polya G.: *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. Vol. 1. New York - London: John Wiley & Sons, INC, 1962.

173. Polya G.: *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. Vol. 2. New York - London: John Wiley & Sons, INC, 1962.

174. Polya G.: *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vol. 1. *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton: Princeton University Press, 1954.

175. Polya G.: *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vol. 2. *Logic, Symbolic and mathematical*. Princeton: Princeton University Press, 1954.

176. Polya G.: *Odkrycie matematyczne: o rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań*. Przeł. A. Góralski. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1975.

177. Przetacznik-Gierowska M., Makiełło-Jarża G.: *Psychologia rozwojowa i wychowawcza wieku dziecięcego*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1985.

178. Purnomo Y. W.: *The complex Relationship between Teachers' Mathematics-related Beliefs and Their Practices in Mathematics Class*. *„The New Educational Review"*2017, Vol. 47, No. 1.

179. Putkiewicz E.: *Proces komunikowania się na lekcji*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1990.

180. Putkiewicz Z.: *Podstawowe zagadnienia psychologii*. W: *Podstawy psychologii, pedagogiki i socjologii*. Red. Z. Putkiewicz, B. Dobrowolska, T. Kokołowicz. Warszawa: Państwowy Zakład Wydawnictw Lekarskich, 1987.

181. Raszka R.: R*ozwijanie myślenia matematycznego dziecka w przekonaniach nauczycieli i kandydatów na nauczycieli*. W: *Edukacja małego dziecka. Nauczyciel-wychowawca w przedszkolu i szkole*. Tom 5. Red. E. Ogrodzka-Mazur, U. Szuścik, M. Zalewska-Bujak. Cieszyn-Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2013.

182. Reclik R.: *Wspieranie potencjału twórczego uczniów w wieku wczesnoszkolnym podczas rozwiązywania problemów matematycznych. W: Doświadczanie zmian w teorii i praktyce pedagogicznej*. Red. J. Skibska, J. Wojciechowska. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2015.

183. Rubacha K.: *Metodologia badań nad edukacją*. Warszawa: Wydawnictwa Akademickie i Profesjonalne, 2008.

184. Rura G., Klichowski M.: *Kompetencje matematyczne – założone sposoby kształtowania i dyskursy popkulturowe. W: Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Założony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej*. Red. H. Sowińska. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, 2011.

185. Sajdak A.*: Wprowadzenie dziecka w świat języka matematyki. W: Mój uczeń przekracza próg szkolny. Profilaktyka niepowodzeń szkolnych sześcio-, siedmio- i dziewięcio-, dziesięcio- latków.* Red. J. Kędzierska, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2005.

186. Sawicki T., Reclik R., Nowik J.: *Matematyka. To nauczyciel klas początkowych wiedzieć powinien*. Opole: Wydawnictwo NOWIK, 1997.

187. Semadeni Z.: *A comparison of Hejný levels of the development of student's geometric thinking with the van Hiele levels*. *„Journal of Modern Science"* 2018, T. 2.

188. Semadeni Z.: *Matematyka w edukacji początkowej – podejście konstruktywistyczne*. W: *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*. Red. Z. Semadeni, E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Treliński, B. Bugajska-Jaszczołt, M. Czajkowska. Kielce: Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP, 2015.

189. Semadeni Z.: *Matematyka współczesna w nauczaniu dzieci*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe: 1975.

190. Semadeni Z.: *Nauczanie początkowe matematyki*. T. 1. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1981.

191. Semadeni Z.: *Nauczanie początkowe matematyki*. T. 2. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1984.

192. Semadeni Z.: *Podejście konstruktywistyczne do matematycznej edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji, 2016.

193. Semerádová S.: *Didactical situations in building children`s ideas about matematical concepts in preschool education*. „*Didactica Mathematicae*" 2015, T. 3.

194. Sitarska-Niemierko W.: *Rozumienie matematyki przez przyszłe nauczycielki klas I-III*. W: *Diagnostyka edukacyjna. Teoria i praktyka*. Red. B. Niemierko. Kraków: Polskie Towarzystwo Diagnostyki Edukacyjnej, 2004.

195. Siwek H.: *Anna Zofia Krygowska – w stulecie urodzin*. „*Matematyka*" 6/2004.

196. Siwek H.: *Dydaktyka matematyki: teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2005.

197. Siwek H.: *Kształcenie zintegrowane na etapie wczesnoszkolnym: rola edukacji matematycznej*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, 2004.

198. Siwek H.: *Rola zabaw i zadań tekstowych w kształceniu matematycznym dzieci*. „*Matematyczna edukacja dzieci*", 2016, nr 1.

199. Skura M., Lisicki M.: *Gen liczby. Jak dzieci uczą się matematyki*. Warszawa: Wydawnictwo Mamania, 2018.

200. Sobczak P.: *Metoda badania eksperymentalnego w pedagogice*. W: *Metody badań pedagogicznych w zarysie*. Red. A. Góralski. Warszawa: Wydawnictwo Universitas Rediviva, 2009.

201. Sobol E.: *Słownik wyrazów obcych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1997.

202. Sokołowski S.: *Rozwiązywanie zadań tekstowych*. *„Życie szkoły"* 2004, nr. 1.

203. Stefańska-Klar: R. *Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny*. W: *Psychologia rozwoju człowieka*. Tom 2. Red. B. Harwas-Napierała, J. Trempała. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.

204. Strelau J., Jurkowski A., Putkiewicz Z.: *Podstawy psychologii dla nauczycieli*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1976.

205. Struik D. J.: *Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku*. Przeł. P. Szeptycki. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1963.

206. Strykowski W., Strykowska J., Pielachowski J.: *Kompetencje nauczyciela szkoły współczesnej*. Poznań: Wydawnictwo eMPi2, 2003.

207. Stucki E.: *Heurystyczna metoda Polya w początkowym nauczaniu matematyki*. „*Życie szkoły"*. Nr 10, 1992.

208. Stucki E.: *Metodyka nauczania matematyki w klasach niższych*. Cz. 2, Bydgoszcz: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, 1993.

209. Swoboda E.: *Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci*. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2006.

210. Szewczuk W.: *Podstawy psychologii*. Warszawa: Wyższa Szkoła Społeczno-Ekonomiczna Fundacja Innowacja, 2000.

211. Szewczuk W.: *Trudności myślenia i rozwijanie zdolności uczniów*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1983.

212. Szpiter M.: *Kształtowanie pojęć i umiejętności matematycznych u dzieci w młodszym wieku szkolnym*, Słupsk: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, 1995.

213. Szymczak W.: *Podstawy statystyki dla psychologów*. Warszawa: Wydawnictwo Difin SA, 2018.

214. Szymczyk L.: *Wspomaganie rozwoju uzdolnień matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym*. W: *Doświadczanie zmian w teorii i praktyce pedagogicznej*. Red. J. Skibska, J. Wojciechowska. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak", 2015.

215. Tatarkiewicz W.: *Historia filozofii*. T. 1. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.

216. Treliński G., Siwek H.: *Modernizacja kształcenia matematycznego i jej wpływ na rozwój dydaktyki: wybór artykułów Anny Zofii Krygowskiej z lat 1958 – 1972*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe WSP, 1985.

217. Treliński G.: *Aspekty dydaktyczne zadań matematycznych*. Kielce: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej im. J. Kochanowskiego w Kielcach, 1998.

218. Treliński G.: *Kształcenie matematyczne w klasach początkowych*. Kielce: WŚ, 1995.

219. Treliński G.: *Matematyzowanie jako składowa kompetencji matematycznej*. „*Matematyczna edukacja dzieci*" 2016, nr 1.

220. Treliński G.: *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna. 3 x M. Matematyka. Modelowanie. Metodyka*. Piotrków Trybunalski: Naukowe Wydawnictwo Piotrkowskie przy Filii Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy Jana Kochanowskiego w Kielcach, 2011.

221. Trempała J.: *Dwa przełomy w badaniach nad rozwojem psychicznym człowieka*. „*Przegląd psychologiczny*" 2001, Tom 44, Nr 1.

222. Trocki J.: *Struktura procesu kształcenia matematycznego*. Rzeszów: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, 2000.

223. Turnau S.: *Dokąd zmierza szkolne nauczanie matematyki*. „*Matematyka*", 1995, nr 3.

224. Turnau S.: *George Polya (1887 – 1985) – znany i nieznany*. *„Matematyka"* 2011, nr 6.

225. Turnau S.: *Zadania tekstowe i nauczanie stosowania pojęć matematycznych*. W: *Nauczanie początkowe matematyki*. Red. Z. Semadeni. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1985.

226. Tyl A.: *Między schematem a poszukiwaniem w matematycznej edukacji wczesnoszkolnej*. W: *Wczesna edukacja między schematem a poszukiwaniem nowych ujęć teoretyczno-badawczych*. Red. D. Klus-Stańska, E. Szatan, D. Bronik. Gdańsk: Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, 2006.

227. Tyl A.: *Trudności w rozwiązywaniu matematycznych zadań tekstowych u uczniów klas I-III szkoły podstawowej*. W: *Folia Paedagogica et Psychologica. 30, Pedagogika*. Red. R. Więckowski. Łódź: Uniwersytet Łódzki, 1993.

228. Urbańczyk F.: *Przegląd historyczny poglądów na zagadnienie rozwijania zdolności myślenia za pomocą matematyki*. W: *Studia pedagogiczne. Kształcenie samodzielności myślenia w procesie nauczania*. Tom IV. Red. B. Suchodolski. Wrocław: Zakład Narodowy im. Ossolińskich Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, 1957.

229. Vasta R., Haith M. M., Miller S. A.: *Psychologia dziecka*. Przekł. M. Babiuch. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1995.

230. Walerzak-Więckowska A.: *Profil Arytmetyczny – D. Program diagnostyczny dla dzieci w wieku wczesnoszkolnym*. Rotmanka: Wydawnictwo PROMATHEMATICA, 2011.

231. Waszkiewicz J.: Gyorgy Polya i sztuka rozwiązywania zadań. *„Matematyka"*, Nr 5, 1995.

232. Wiejak K.: *Prawidłowości rozwoju w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym*. W: *Psychopedagogiczne aspekty rozwoju i edukacji małego dziecka*. Red. T. Parczewska. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, 2010.

233. Więckowski R.: *Intensyfikacja pracy uczniów w nauczaniu początkowym*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1972, s. 26.

234. Więsław W.: *Matematyka, w: Wielka encyklopedia PWN*. T. 17. *Red. J. Wojnowski. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.*

235. Wojciechowska K.: *Zastosowanie taksonomii celów nauczania początkowego matematyki do interpretacji programu nauczania*. W: *Diagnostyka edukacyjna*. Red. B. Niemierko. Gdańsk: Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, 1994.

236. Wojnowska M.: M*iędzy przekazem a odkryciem: twórcze sposoby na rozwiązywanie zadań matematycznych przez dzieci*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls", 2007.

237. Wojnowski J.: *Wielka encyklopedia PWN*. Tom 22. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004.

238. Wójcicka M.: *Wybrane metody i techniki aktywizujące. Zastosowania w procesie nauczania i uczenia się matematyki*. Warszawa: Fraszka Edukacyjna, 2005.

239. Wygotski L. S.: *Problem nauczania i rozwoju umysłowego w wieku szkolnym*. W: L.S. Wygotski: *Wybrane prace psychologiczne*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1971.

240. Zaremba D.: *Podstawy nauczania matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006.

241. Zaręba L.: *Sylwetka jubilatki [prof. Helena Siwek]*. „*Didacta Mathematicae*". T. 33, 2010.

242. Żebrowska M.: *Teorie rozwoju psychicznego*. W: *Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży*. Red. M. Żebrowska. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1973.

Akty prawne

1. Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej. *Zalecenie Rady z dnia 22 maja 2018 r. w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie.* https://eur-lex.europa.eu/legal-content/PL/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=en.
2. Dziennik Ustaw Rzeczypospolitej Polskiej. *Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej z dnia 14.02.2017 r.* http://dziennikustaw.gov.pl/du/2017/356/1
3. Dziennik Ustaw Rzeczypospolitej Polskiej. *Podstawa programowa wychowania przedszkolnego dla przedszkoli, oddziałów przedszkolnych w szkołach podstawowych oraz innych form wychowania przedszkolnego z dnia 14.02.2017 r.* http://dziennikustaw.gov.pl/du/2017/356/1
4. Dziennik Ustaw Rzeczypospolitej Polskiej. *Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej*. http://www.dziennikustaw.gov.pl/DU/2017/356

Netografia

1. Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie. http://www.aps.edu.pl
2. American Mathematical Society. https://www.ams.org/home/page
3. Belmont University. http://www.belmont.edu/liberal-arts/
4. *Encyklopedia PWN*. https://encyklopedia.pwn.pl
5. European Mathematical Society. http://euro-math-soc.eu
6. http://www.absolwencilo-zakopane.pl/czlonkowie_html/krygowska/Zofia%20Krygowska.pdf
7. https://thescipub.com/pdf/10.3844/jmssp.2007.163.167
8. http://www.bg.up.krakow.pl/biografik/?p=954
9. https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/didactica-mathematicae/article/view/33/33.
10. Instytut Matematyczny Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie. http://matematyka.up.krakow.pl/50ZDM/siwek.htm
11. Instytut Matematyki Polskiej Akademii Nauk. https://www.impan.pl
12. International Mathematical Union. https://www.mathunion.org
13. Kuratorium Oświaty w Katowicach. http://www.kuratorium.katowice.pl/index.php?page=UserPage&menuItemId=345
14. Nauka Polska. http://nauka-polska.pl/#/profile/scientist?id=20268&_k=007v47
15. Nauka Polska. http://nauka-polska.pl/#/profile/scientist?id=25919&_k=u9h8gi
16. Nauka Polska. http://nauka-polska.pl/#/profile/scientist?id=56567&_k=hy7ilh
17. Nauka Polska. http://nauka-polska.pl/#/profile/scientist?id=66673&_k=ozc7j8
18. Nauka Polska. http://nauka-polska.pl/#/profile/scientist?id=72105&_k=fesusw
19. Polskie Towarzystwo Matematyczne. https://www.ptm.org.pl
20. The Mathematics Subject Classification 2010. https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/pdfs/classifications2010.pdf
21. Uniwersytet Jagielloński. https://www.uj.edu.pl
22. University of California. https://www.ucdavis.edu
23. University of Georgia. https://www.uga.edu
24. Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie. Instytut Matematyki. http://matematyka.up.krakow.pl/50ZDM/turnau.htm
25. Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie.

http://www.up.krakow.pl
26. Uniwersytet Rzeszowski. http://www.ur.edu.pl
27. Uniwersytet Śląski w Katowicach. https://www.us.edu.pl
28. Uniwersytet Warszawski. https://www.uw.edu.pl
29. Vilniaus Universitetas. https://www.vu.lt
30. Wyższa Szkoła Gospodarki Euroregionalnej im. Alcide De Gasperi w Józefowie. https://wsge.edu.pl/pl
31. Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Janusza Korczaka w Warszawie. https://www.wspkorczak.eu

Spis tabel

18. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat różnicy pomiędzy stopniem trudności matematycznych zadań problemowych i bezproblemowych a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)
19. Wartość testu Kruskala-Wallisa dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat różnicy pomiędzy stopniem trudności matematycznych zadań problemowych i bezproblemowych a stażem ich pracy w szkole (*N = 213*)
20. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat różnicy pomiędzy stopniem trudności matematycznych zadań problemowych i bezproblemowych a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)
21. Częstotliwość stosowania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych przez badanych nauczycieli (*N = 213*)
22. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między częstością stosowania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych przez badanych nauczycieli a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)
23. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między częstością stosowania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych przez badanych nauczycieli a stażem ich pracy w szkole (*N = 207)*
24. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między częstością stosowania matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych przez badanych nauczycieli a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)
25. Grupy uczniów, jakim badani nauczyciele proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych (*N = 213*)
26. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między grupami uczniów, jakim badani nauczyciele proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)
27. Wartość testu Kruskala-Wallisa dla zależności między grupami uczniów, jakim badani nauczyciele proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a stażem ich pracy w szkole (*N = 207*)
28. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między grupami uczniów, jakim badani nauczyciele proponują rozwiązywanie matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)

29. Opinie badanych nauczycieli na temat pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych (*N = 213*)

30. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)

31. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a stażem ich pracy w szkole (*N = 207*)

32. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat pozytywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)

33. Opinie badanych nauczycieli na temat negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych (*N = 213*)

34. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)

35. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a stażem ich pracy w szkole (*N = 207*)

36. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli na temat negatywnych skutków rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań problemowych podczas zajęć matematycznych a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)

37. Znajomość metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli (*N = 213*)

38. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między znajomością metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczyciel a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)

39. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między znajomością metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli a stażem ich pracy w szkole (*N = 207*)

40. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między znajomością metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)

41. Stosowane metod rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli (*N = 213*)

42. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między stosowanymi metodami rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 213*)

43. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między stosowanymi metodami rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli a lokalizacją stażem ich pracy w szkole (*N = 207*)

44. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między stosowanymi metodami rozwiązywania matematycznych zadań problemowych przez badanych nauczycieli a poziomem ich wykształcenia (*N = 207*)

45. Znajomość metody G. Polya przez badanych nauczycieli (*N* = 213)

46. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między znajomością metody G. Polya przez badanych nauczycieli a lokalizacją miejsca ich pracy (*N* = 213)

47. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między znajomością metody G. Polya przez badanych nauczycieli a stażem ich pracy w szkole (*N* = 207)

48. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między znajomością metody G. Polya przez badanych nauczycieli a poziomem ich wykształcenia (*N* = 207)

49. Stwierdzenia charakteryzujące metodę G. Polya wskazane przez badanych nauczycieli znających metodę G. Polya (*N* = 79)

50. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między stwierdzeniami charakteryzującymi metodę G. Polya zdaniem badanych nauczycieli znających metodę G. Polya a lokalizacją miejsca ich pracy (*N* = 79)

51. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między stwierdzeniami charakteryzującymi metodę G. Polya zdaniem badanych nauczycieli znających metodę G. Polya a stażem ich pracy w szkole (*N* = 79)
52. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między stwierdzeniami charakteryzującymi metodę G. Polya zdaniem badanych nauczycieli znających metodę G. Polya a poziomem ich wykształcenia (*N* = 79)
53. Częstotliwość stosowania metody G. Polya przez badanych nauczycieli znających metodę G. Polya (*N* = 79)
54. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między częstotliwością stosowania metody G. Polya przez badanych nauczycieli znających metodę G. Polya a lokalizacją miejsca ich pracy (*N* = 79)
55. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między częstotliwością stosowania metody G. Polya przez badanych nauczycieli znających metodę G. Polya a stażem ich pracy w szkole (*N* = 79)
56. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między częstotliwością stosowania metody G. Polya przez badanych nauczycieli znających metodę G. Polya a poziomem ich wykształcenia (*N* = 79)
57. Klasa, w której badani nauczyciele znający metodę G. Polya pracują z wykorzystaniem metody G. Polya (*N* = 79)
58. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między klasą, w której badani nauczyciele znający metodę G. Polya pracują z wykorzystaniem metody G. Polya a lokalizacją miejsca ich pracy (*N* = 79)
59. Wartość testu Kruskala-Wallisa dla zależności między klasą, w której badani nauczyciele znający metodę G. Polya pracują z wykorzystaniem metody G. Polya a stażem ich pracy w szkole (*N* = 79)
60. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między klasą, w której badani nauczyciele znający metodę G. Polya pracują z wykorzystaniem metody G. Polya a poziomem ich wykształcenia (*N* = 79)
61. Opinie badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat umiejętności, jakie mogą być kształtowane na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya (*N = 79*)
62. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat umiejętności, jakie mogą być kształtowane

na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 79*)

63. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat umiejętności, jakie mogą być kształtowane na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya a stażem ich pracy w szkole (*N = 79*)

64. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat umiejętności, jakie mogą być kształtowane na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya a poziomem ich wykształcenia (*N = 79*)

65. Opinie badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów (*N = 79*)

66. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 79*)

67. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów a stażem ich pracy w szkole (*N = 79*)

68. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów a poziomem ich wykształcenia (*N = 79*)

69. Opinie badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela (*N = 79*)

70. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 79*)

71. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela a stażem ich pracy w szkole (*N = 79*)

72. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat pozytywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela a poziomem ich wykształcenia (*N = 79*)
73. Opinie badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów (*N = 79*)
74. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 79)*
75. Wartość testu rho-Spearmana dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów a stażem ich pracy w szkole (*N = 79*)
76. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya, na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów a poziomem ich wykształcenia (*N = 79*)
77. Opinie badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela (*N = 79*)
78. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela a lokalizacją miejsca ich pracy (*N = 79*)
79. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela a stażem ich pracy w szkole (*N = 79*)
80. Wartość testu chi-kwadrat dla zależności między opiniami badanych nauczycieli znających metodę G. Polya na temat negatywnych skutków stosowania metody

G. Polya podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczyciela a poziomem ich wykształcenia (*N = 79*)

81. Średnie wyniki uzyskane w preteście z podziałem na zadania arytmetyczne i geometryczne przez uczniów z grupy eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

82. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w preteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

83. Wartość testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki pretestu

84. Średnie wyniki uzyskane w postteście z podziałem na zadania arytmetyczne i geometryczne przez uczniów z grup eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz kontrolnych GK1 i GK2

85. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

86. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki posttestu

87. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2

88. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2 – średnie wyniki posttestu

89. Wartości wskaźników D_1 i D_2 w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

90. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki postępów D_1 i D_2

91. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2

92. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2 – średnie wyniki posttestu

93. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście w grupach kontrolnych GK1 i GK2

94. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie kontrolnej GK1 i GK2 – średnie wyniki posttestu

95. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w preteście w grupie eksperymentalnej GE1 oraz średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście w grupie kontrolnej GK2

96. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK2 – średnie wyniki pretestu i posttestu

97. Średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w preteście w grupie kontrolnej GK1 oraz średnie wyniki uzyskane ze wszystkich zadań w postteście w grupie kontrolnej GK2

98. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie kontrolnej GK1 (średnie wyniki pretestu) i kontrolnej GK2 (średnie wyniki posttestu)

99. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w preteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

100. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki zadań arytmetycznych pretestu

101. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

102. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki zadań arytmetycznych posttestu

103. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2

104. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2 – średnie wyniki zadań arytmetycznych posttestu

105. Wartości wskaźników D_1 i D_2 dla zadań arytmetycznych w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

106. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki postępów D_1 i D_2 w zadaniach arytmetycznych

107. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2

108. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i GE2 – średnie wyniki zadań arytmetycznych posttestu

109. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście w grupie kontrolnej GK1 i GK2

110. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie kontrolnej GK1 i GK2 – średnie wyniki zadań arytmetycznych posttestu

111. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w preteście w grupie eksperymentalnej GE1 oraz średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście w grupie kontrolnej GK2

112. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 (średnie wyniki z zadań arytmetycznych pretestu) i kontrolnej GK2 (średnie wyniki z zadań arytmetycznych posttestu)

113. Średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w preteście w grupie kontrolnej GK1 oraz średnie wyniki uzyskane z zadań arytmetycznych w postteście w grupie kontrolnej GK2

114. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie kontrolnej GK1 (średnie wyniki z zadań arytmetycznych pretestu) i kontrolnej GK2 (średnie wyniki z zadań arytmetycznych posttestu)

115. Średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych w preteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

116. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki zadań geometrycznych pretestu

117. Średnie wyniki z zadań geometrycznych uzyskane w postteście przez uczniów w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2

118. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE2 i kontrolnej GK2 – średnie wyniki zadań geometrycznych posttestu

119. Wartości wskaźników D_1 i D_2 dla zadań geometrycznych w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1

120. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK1 – średnie wyniki postępów D_1 i D_2 w zadaniach geometrycznych

121. Średnie wyniki uzyskane z geometrycznych zadań w postteście w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2

122. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE2 i GE2 – średnie wyniki zadań geometrycznych posttestu

123. Średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych w postteście w grupie kontrolnej GK1 i GK2

124. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie kontrolnej GK1 i GK2 – średnie wyniki geometrycznych zadań posttestu

125. Średnie wyniki uzyskane z geometrycznych zadań w preteście w grupie eksperymentalnej GE1 oraz średnie wyniki uzyskane z geometrycznych zadań w postteście w grupie kontrolnej GK2

126. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie eksperymentalnej GE1 i kontrolnej GK2 – średnie wyniki z geometrycznych zadań pretestu i posttestu

127. Średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych w preteście w grupie kontrolne GK1 oraz średnie wyniki uzyskane z zadań geometrycznych w postteście w grupie kontrolnej GK2

128. Wynik testu U Manna-Whitneya w grupie kontrolnej GK1 (średnie wyniki z zadań geometrycznych pretestu) i kontrolnej GK2 (średnie wyniki z zadań geometrycznych posttestu)

129. Wyniki uzyskane w postteście w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz grupach kontrolnych GK1 i GK2 z podziałem na płeć badanych uczniów (N = 92)

130. Wyniki testu Levene'a równości wariancji wyników posttestu w grupach chłopców i dziewczynek (N = 92)

131. Wyniki testu t dla prób niezależnych równości średnich wyników zadań posttestu w grupach chłopców i dziewczynek (N = 92)

132. Wyniki uzyskane w postteście w grupach eksperymentalnych GE1 i GE2 oraz kontrolnych GK1 i GK2 z podziałem na płeć badanych uczniów

133. Wyniki testu U Manna-Whitneya w grupach eksperymentalnych i kontrolnych z podziałem na płeć badanych uczniów

Spis ilustracji

Spis aneksów

1. Kwestionariusz ankiety dla nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej
2. Pretest
3. Posttest
4. Przykładowy scenariusz zajęć – zadania arytmetyczne
5. Przykładowy scenariusz zajęć – zadania geometryczne
6. Arkusz obserwacji pracy uczniów klas trzecich podczas zajęć matematycznych
7. Kwestionariusz rozmowy z nauczycielem edukacji wczesnoszkolnej
8. Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy eksperymentalnej GE1 w preteście
9. Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy kontrolnej GK1 w preteście
10. Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy eksperymentalnej GE1 w postteście
11. Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy eksperymentalnej GE2 w postteście
12. Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy kontrolnej GK1 w postteście
13. Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy kontrolnej GK2 w postteście

Aneks 1

KWESTIONARIUSZ ANKIETY DLA NAUCZYCIELI EDUKACJI WCZESNOSZKOLNEJ

Szanowni Państwo,

Ankieta zawiera pytania dotyczące matematycznych zadań problemowych, oraz Państwa opinii na ich temat, a także na temat Państwa opinii na temat heurystycznej metody G. Polya. Bardzo proszę, by wybrali Państwo z gotowych odpowiedzi właściwą i zaznaczyli ją poprzez wpisanie w okienko znaku X. Jeśli nasuwa się Państwu inna niż podana odpowiedź, bardzo proszę o wpisanie jej w miejscu oznaczonym słowem „Inne”. W przypadku niektórych pytań można zaznaczyć więcej niż jedną odpowiedź.

Ankieta jest anonimowa. Została opracowana na potrzeby prowadzonych przeze mnie badań do pracy doktorskiej. Otrzymane za jej pomocą dane posłużą jedynie do celów naukowych.

Serdecznie dziękuję za poświęcony czas.
Prowadząca badania
mgr Ewelina Kawiak
Uniwersytet Śląski w Katowicach

1. **Z którym z poniższych zdań zgadza się Pani/Pan? Można zaznaczyć kilka odpowiedzi.**

- ☐ Każde zadanie matematyczne jest zadaniem problemowym
- ☐ Zadania problemowe to zadania niewymagające wysiłku umysłowego
- ☐ Zadania problemowe to zadania wymagające od uczniów wzmożonego wysiłku umysłowego
- ☐ Zadania problemowe to zadania zbyt trudne, by stosować je na etapie edukacji wczesnoszkolnej
- ☐ Zadania problemowe to zadania, które powinny być stosowane powszechnie na etapie wczesnoszkolnym
- ☐ Zadania problemowe to zadania odtwórcze
- ☐ Zadania problemowe to zadania twórcze
- ☐ Zadania problemowe to zadania rozwijające myślenie matematyczne
- ☐ Zadania problemowe to zadania rozwijające krytyczną postawę do rzeczywistości

- Zadania problemowe to zadania, które nie mają większych walorów poznawczych
- Zadania problemowe to zadania, w przypadku których uczeń nie zna algorytmu ich rozwiązania

2. Jaka jest Pani/Pana zdaniem różnica między zadaniami problemowymi, a typowymi zadaniami matematycznymi? Proszę uzasadnić swoją odpowiedź.

- Nie ma różnicy
- Zadania problemowe są łatwiejsze
- Zadania problemowe są trudniejsze

Proszę uzasadnić swoją odpowiedź:

3. Jak często w codziennej pracy z uczniami stosuje Pani/Pan zadania problemowe w ramach edukacji matematycznej?

- Co najmniej raz w tygodniu
- Kilka razy w miesiącu
- Kilka razy w semestrze
- 1-2 razy w roku szkolnym
- Nie stosuję (w przypadku udzielenia tej odpowiedzi proszę przejść do pytania numer 7)

4. Jakiej grupie uczniów proponuje Pani/Pan zadania problemowe podczas zajęć z zakresu edukacji matematycznej? Proszę uzasadnić swoją odpowiedź.

- Wszystkim uczniom w klasie
- Tylko uczniom uzdolnionym matematycznie
- Tylko przeciętnym uczniom
- Tylko uczniom wykazującym trudności w uczeniu się matematyki

5. Jakie są pozytywne skutki rozwiązywania przez Pani/Pana uczniów zadań problemowych na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej? Można zaznaczyć kilka odpowiedzi.

- Rozwijają myślenie

- Powodują wzrost zaangażowania uczniów
- Poprawiają wyniki pracy uczniów
- Mobilizują do twórczości na zajęciach
- Mobilizują uczniów do pracy
- Wprowadzają radosną atmosferę na zajęciach
- Inne, jakie?
- Nie przynoszą pozytywnych skutków

**6. Jakie są negatywne skutki rozwiązywania przez Pani/Pana uczniów zadań problemowych
na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej? Można zaznaczyć kilka odpowiedzi.**

- Ograniczają myślenie
- Wprowadzają stresującą atmosferę na zajęciach
- Powodują zniechęcenie do rozwiązywania zadań
- Szybko się nudzą
- Powodują dezorganizację pracy na lekcji
- Angażują do pracy tylko wybraną część klasy
- Inne, jakie?
- Nie przynoszą negatywnych skutków

7. Jakie zna Pani/Pan metody rozwiązywania matematycznych zadań problemowych?

- Burza mózgów
- Dialog sokratejski
- Metoda Kartezjusza
- Drama
- Metaplan
- Metoda G. Polya
- Inscenizacja
- Metoda kruszenia
- Metoda sześciu kapeluszy myślowych
- Klasyczna metoda problemowa

- Inne, jakie?

8. **Jakie metody rozwiązywania matematycznych zadań problemowych stosuje Pani/Pan podczas zajęć w swojej klasie i dlaczego? Można zaznaczyć kilka odpowiedzi.**

- Burza mózgów
- Dialog sokratejski
- Metoda Kartezjusza
- Drama
- Metaplan
- Metoda G. Polya
- Inscenizacja
- Metoda kruszenia
- Metoda sześciu kapeluszy myślowych
- Klasyczna metoda problemowa
- Inne, jakie?

9. **Czy posiada Pani/Pan wiedzę o metodzie G. Polya?**
    - Tak
    - Nie (w przypadku udzielenia tej odpowiedzi proszę przejść do Metryczki respondenta)

10. **Które z poniższych zdań dotyczą Pani/Pana zdaniem metody G. Polya? Można zaznaczyć kilka odpowiedzi.**

- Jest to metoda algorytmiczna
- Jest to metoda heurystyczna
- Metoda ta opisuje krok po kroku postępowanie w procesie rozwiązywania zadań
- Można ją stosować przy rozwiązywaniu każdego zadania matematycznego
- Metoda ta jest popularna w polskiej szkole
- Metoda ta nie jest popularna w polskiej szkole
- Metoda ta może być stosowana na etapie zintegrowanej edukacji wczesnoszkolnej

11. **Jak często stosuje Pani/Pan metodę G. Polya w pracy z uczniami w ramach zajęć z zakresu edukacji matematycznej?**
    - Co najmniej raz w tygodniu
    - Kilka razy w miesiącu
    - Kilka razy w semestrze
    - 1-2 razy w roku szkolnym
    - Nie stosuję

12. **W której klasie edukacji wczesnoszkolnej stosuje Pani/Pan metodę G. Polya w pracy z uczniami w ramach zajęć z zakresu edukacji matematycznej?**

- Tylko w klasie I
- Tylko w klasie II
- Tylko w klasie trzecich
- W klasach I-III
- W klasach II i III
- Nie stosuję

13. **Jakie są Pani /Pana zdaniem pozytywne skutki stosowania metody G. Polya na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów? Można zaznaczyć kilka odpowiedzi.**

- Powoduje rozwój myślenia
- Przyczynia się do wzrostu samodzielności uczniów podczas rozwiązywania zadań
- Kształtuje twórcze podejście do zadań matematycznych
- Kształtuje umiejętność samodzielnego radzenia sobie z problemem
- Motywuje do pracy
- Powoduje wzrost wiary we własne siły uczniów
- Powoduje wzrost zaangażowania uczniów
- Inne, jakie?
- Nie ma pozytywnych skutków

14. **Jakie są Pani/Pana zdaniem negatywne skutki stosowania metody G. Polya na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej w odniesieniu do uczniów? Można zaznaczyć kilka odpowiedzi.**

- Ogranicza samodzielność uczniów przy rozwiązywaniu zadań matematycznych
- Ogranicza myślenie uczniów
- Zniechęca uczniów do rozwiązywania zadań matematycznych
- Powoduje spadek motywacji uczniów
- Powoduje spadek zaangażowania uczniów
- Inne, jakie?.
- Nie ma negatywnych skutków

15. Jakie są Pani/Pana zdaniem pozytywne skutki stosowania metody G. Polya na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczycieli? Można zaznaczyć kilka odpowiedzi.

- możliwość obserwowania samodzielnej pracy uczniów
- możliwość poznania struktury grupy
- możliwość poznania preferowanych przez uczniów metod rozwiązywania zadań
- możliwość poznania preferowanych przez uczniów form pracy (samodzielnie, w parach, w grupach)
- możliwość dostrzeżenia uczniów wykazujących trudności w rozwiązywaniu zadań
- możliwość dostrzeżenia uczniów uzdolnionych matematycznie
- możliwość oceny zaangażowania uczniów w rozwiązanie zadania
- Inne, jakie?

16. Jakie są Pani/Pana zdaniem negatywne skutki stosowania metody G. Polya na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z punktu widzenia nauczycieli? Można zaznaczyć kilka odpowiedzi.

- brak całkowitej kontroli nad czasem pracy uczniów
- brak całkowitej kontroli nad sposobem pracy uczniów
- nieprzewidywalność zajęć
- chaos organizacyjny
- głośna praca uczniów
- nie można z góry założyć efektów końcowych
- nie ma gwarancji osiągnięcia poprawnego wyniku
- Inne, jakie?

17. Która umiejętność może być Pani/Pana zdaniem kształtowana na zajęciach z zakresu edukacji matematycznej z wykorzystaniem metody G. Polya? Można zaznaczyć kilka odpowiedzi.

- Umiejętność samodzielnego myślenia
- Umiejętność krytycznego myślenia
- Umiejętność twórczego myślenia
- Umiejętność pracy w grupach
- Umiejętność samodzielnego wyboru sposobu rozwiązania problemu
- Umiejętność przyjęcia porażki
- Wytrwałość w dążeniu do wyznaczonego celu
- Inne, jakie?

<u>Metryczka respondenta:</u>

1. **Miasto, w którym Pani/Pan pracuje**: ……………………………………….

2. **Płeć:**

☐ Kobieta

☐ Mężczyzna

3. **Poziom wykształcenia:**

☐ Wyższe magisterskie

☐ Wyższe licencjackie

☐ Inne, jakie? …………

4. **Aktualnie prowadzona klasa:**

☐ I

☐ II

☐ III

5. **Staż pracy w szkole:**

☐ 1 – 5 lat

☐ 5 – 10 lat

☐ 10 – 15 lat

☐ Powyżej 15 lat

6. **Ukończone formy doskonalenia zawodowego:**

☐ Studia podyplomowe, jakie? ………………………………………………………....

☐ Kursy, jakie? ………………………………………………………………………

☐ Szkolenia, jakie? ……………………………………………………………..

Aneks 2

PRETEST

Imię i nazwisko: ……………

Klasa: …………

1. Wstaw w okienka właściwy znak tak, by wynik był prawdziwy.
   - **a)** 53 □ 12 = 65
   - **b)** 94 □ 16 = 78
   - **c)** 9 □ 3 = 27
   - **d)** 24 □ 6 = 4
   - **e)** 27 □ 6 = 21
   - **f)** 21 □ 19 = 40
   - **g)** 30 □ 2 = 15
   - **h)** 24 □ 8 = 3

2. Ewa dostaje dużo listów. W poniedziałek dostała 3 listy. We wtorek dostała o 2 listy więcej niż pierwszego dnia. W środę listonosz przyniósł Ewie tyle listów ile wynosi suma listów z poniedziałku i wtorku. Ile listów będzie miała Ewa w czwartek, jeśli w ten dzień dostała jeszcze 2 listy? Zapisz obliczenia i wynik.

3. Jaka liczba:

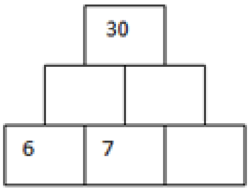
a) Jest większa o 5 od liczby 22?

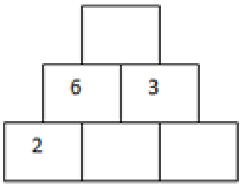
b) Jest mniejsza 4 razy od liczby 16?

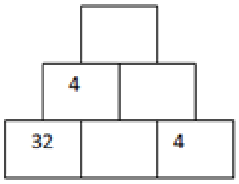
c) Jest mniejsza o 11 od liczby 30?

d) Jest większa 5 razy od liczby 4?

4. Poniżej znajdują się magiczne piramidki. Każde okienko znajdujące się powyżej dwóch innych okienek to wynik dodawania, odejmowania, mnożenia lub dzielenia liczb w nich zapisanych. Pamiętaj, że piramidkę uzupełniamy od dołu do góry!







5. Przeczytaj poniższe wskazówki i zapisz:

a) Wszystkie liczby dwucyfrowe, w których na miejscu dziesiątek znajdować się będzie cyfra 5,

b) Największą liczbą trzycyfrową taką, której wszystkie cyfry są różne.

c) Używając cyfr 3, 7 i 4 zapisz największą i najmniejszą liczbę trzycyfrową, każdej cyfry użyj tylko raz.

d) Liczbę trzycyfrową, która składa się z samych cyfr parzystych a każdy jej kolejny składnik jest większy od poprzedniego. Czy to zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?

6. Staś zapisał pewną liczbę dwucyfrową. Cyfra jej jedności jest największą z możliwych a cyfra dziesiątek jest od niej trzy razy mniejsza. Jaką liczbę zapisał Staś?

7. Wpisz brakujące cyfry w liczbach trzycyfrowych, wiedząc, że suma cyfr w każdej z nich wynosi 21.

a) 78_

b) 3_9

c) _68

d) 8_8

8. Pomóż Basi odgadnąć co to za liczby i zapisz je obok:

a) Moja cyfra jedności to 2, cyfra mojej dziesiątki to 7, a moja cyfra setek to 1.
Jestem liczbą …

b) Mam 3 dziesiątki, pięć setek a cyfra moich jedności to suma 2 i 4.
Jestem liczbą …

c) Moja cyfra jedności wynosi 3, cyfra setek jest o 5 większa od cyfry jedności a cyfra dziesiątek to połowa cyfry setek.

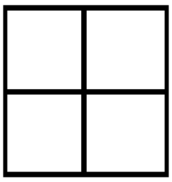
Jestem liczbą …

d) Jestem liczbą trzycyfrową, mam 0 jedności, 0 dziesiątek a cyfra moich setek to najmniejsza z możliwych nieparzystych cyfr.

Jestem liczbą …

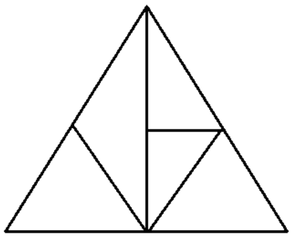
9. Spójrz na rysunki i policz. Obok wpisz swoją odpowiedź.

a) Ile widzisz tu kwadratów?



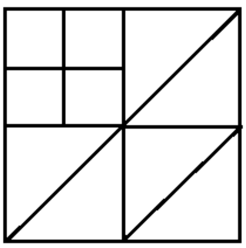
Na rysunku jest ………… kwadratów.

b) Ile widzisz tu trójkątów?



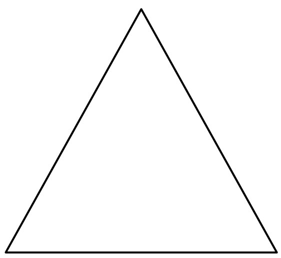
Na rysunku jest ………… trójkątów.

c) Ile widzisz tu kwadratów a ile trójkątów?



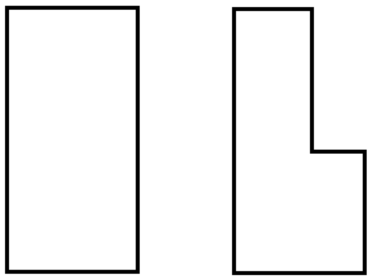
Na rysunku jest ………… kwadratów i ………… trójkątów.

10. Ile osi symetrii ma ten rysunek? Uzupełnij rysunek.



Ta figura ma …………... osie symetrii.

11. Spójrz na obie figury i powiedz która z nich ma większy obwód. Uzasadnij swoją odpowiedź.



12. Tadek narysował prostokąt. Długość pierwszego boku prostokąta wynosi 20 cm a jego szerokość stanowi połowę długości. Następnie zmienił wymiary swojego prostokąta. Do długości pierwszego boku dodał 2cm a szerokość boku drugiego zmniejszył o 3 cm. Ile wynosił obwód prostokąta przed i po zmianie?

Aneks 3

POSTTEST

Imię i nazwisko: ……………

Klasa: …………

1. Wstaw w okienka właściwy znak.

a) 89 □ 25 = 64

b) 34 □ 17 = 51

c) 7 □ 8 = 56

d) 53 □ 39 = 92

e) 72 □ 8 = 9

f) 67 □ 46 = 21

g) 6 □ 5 = 30

h) 63 □ 7 = 9

2. Do sklepu z zabawkami przez kilka dni dowożono towar. W poniedziałek przywieziono 80 piłek. We wtorek przywieziono o 50 piłek mniej niż w poniedziałek. W środę przywieziono trzy razy mniej piłek niż we wtorek. Ile piłek przywieziono do sklepu w sumie, jeśli w czwartek dowieziono jeszcze 12 piłek?

3. Zapisz, jaka to liczba:

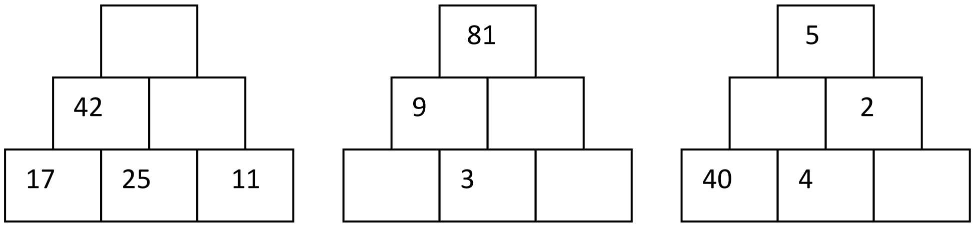
a) jest sumą liczb 23 i 45? …….

b) jest większa o połowę od liczby 20? ....

c) jest 4 razy większa od liczby 6? …….

d) jest podwojeniem liczby 9? …....

4. Każde okienko znajdujące się powyżej dwóch innych okienek to: suma, różnica, iloczyn albo iloraz liczb w nich zapisanych. Odgadnij jakie działanie trzeba wykonać w każdej piramidce i uzupełnij je.



5. Przeczytaj wskazówki i zapisz:

a) liczbę trzycyfrową, której każda kolejna cyfra jest o dwa większa od poprzedniej …

b) liczbę, w której na miejscu dziesiątek znajduje się największa cyfra, na miejscu jedności znajduje się największa cyfra parzysta …

c) liczbę trzycyfrową, która składa się z samych cyfr nieparzystych, a każda jej kolejna cyfra jest mniejsza od poprzedniej …

d) używając cyfr 1, 5, 3 zapisz największą i najmniejszą liczbę trzycyfrową, każdej cyfry użyj tylko raz …

6. Marek pomyślał pewną liczbę. Kiedy ją zapisał okazało się, że składa się ona z trzech cyfr. Pierwsza cyfra licząc od lewej strony to suma liczb 3 i 2. Druga cyfra w tej liczbie to najmniejsza z możliwych nieparzystych cyfr, natomiast trzecia cyfra to podwojenie liczby 3. Jaką liczbę zapisał Marek?

7. W podanych liczbach ktoś wymazał cyfry. Uzupełnij liczby tak, by suma cyfr w każdej z nich wynosiła 18.

a) 2 __ 9

b) __68

c) 39__

d) __7__

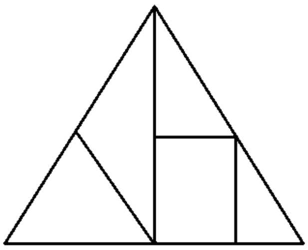
8. Z Warszawy do Poznania jest 298 km, a z Poznania do Szczecina jest o 68 km mniej. Ile km ma droga z Warszawy do Szczecina przez Poznań?

9. Popatrz na rysunki i zapisz swoją odpowiedź.

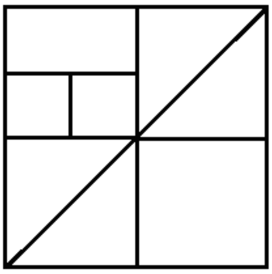
a) Ile widzisz tu kwadratów?

 Na rysunku jest ….. kwadratów.

b) ile widzisz tu trójkątów?

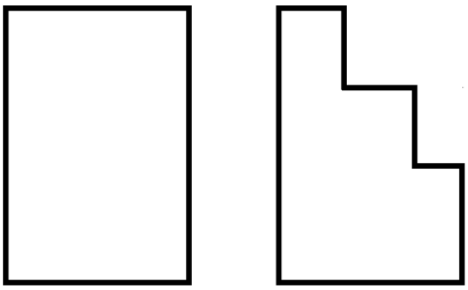
 Na rysunku jest … trójkątów.

c) ile widzisz kwadratów i trójkątów?

 Na rysunku jest …… kwadratów i …… trójkątów.

10. Ile osi symetrii ma kwadrat? Zrób rysunek pomocniczy i zapisz odpowiedź.

11. Spójrz na obie figury i powiedz która z nich ma większy obwód. Nie mierz figur linijką. Uzasadnij swoją odpowiedź.



12. Mamy kwadrat o boku długości 6 cm. Zmieniamy go w prostokąt, tak, aby jego dwa boki zwiększyły się o połowę. Jaki obwód ma powstały prostokąt? Wykonaj rysunek i zapisz obliczenia.

13. Kasia wymyśliła wymiary figury geometrycznej, która ma cztery boki, a długość każdego z nich to:

– bok pierwszy: suma liczb 15 i 3
– bok drugi: różnica liczb 30 i 12
– bok trzeci: iloczyn liczb 6 i 3
– bok czwarty: 16 cm.

Czy figura, którą wymyśliła Kasia to kwadrat? Dlaczego? Zapisz obliczenia i odpowiedź.

Aneks 4

PRZYKŁADOWY SCENARIUSZ ZAJĘĆ – ZADANIA ARYTMETYCZNE

Data:

Grupa:

Zakres tematyczny: Dziesiątkowy zapis pozycyjny liczb.

Cele ogólne:

- Kształtowanie umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych o charakterze arytmetycznym
- Utrwalenie zasad posługiwania się dziesiątkowym systemem pozycyjnym zapisu liczb

Cele szczegółowe:

- Uczeń potrafi rozwiązywać matematyczne zadania problemowe o charakterze arytmetycznym
- Uczeń zna zasady dziesiątkowego systemu pozycyjnego zapisywania liczb oraz potrafi z nich korzystać
- Uczeń wie jakie znaczenie w liczbie ma miejsce poszczególnych jej cyfr
- Uczeń wie jakie konsekwencje niesie ze sobą zmiana miejsca cyfr w liczbie.
- Uczeń tworzy liczby kilkucyfrowe

Metoda pracy: heurystyczna metoda G. Polya

Forma pracy: praca zbiorowa całą klasą, praca indywidualna, praca w małych grupach

Pomoce dydaktyczne:

- kartki z treścią zadań

Przebieg zajęć:

I. Rozgrzewka – zgadywanka.

- **Forma pracy uczniów – praca zbiorowa całą klasą**

<u>Zadanie 1.</u>

Co to za liczba jednocyfrowa?

a) Gdy dodam do niej 2 otrzymam liczbę 5, jest to: ………….
b) Gdy dodam do niej 7 otrzymam liczbę 9, jest to: …………
c) Gdy odejmę od niej 3, otrzymam liczbę 3, jest to: …………
d) Gdy dodam do niej 0, otrzymam liczbę 1, jest to: …………
e) Gdy odejmę od niej 9, otrzymam liczbę 0, jest to: …………

<u>Zadanie 2.</u>

Co to za liczba dwucyfrowa? Czy w każdym przykładzie jest tylko jedno rozwiązanie?

a) suma jej cyfr to dwa, jest to liczba …. / są to liczby ….
b) cyfra jej jedności to 5, cyfra dziesiątek to 4, jest to liczba ….
c) cyfra jej jedności to największa z wszystkich cyfr, cyfra dziesiątek to najmniejsza cyfra parzysta, jest to liczba ….
d) suma jej cyfr to 4, jest to liczba … / są to liczby ….

II. Zajęcia właściwe – rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem metody G. Polya.

- **Forma pracy uczniów – praca indywidualna**

<u>Zadanie 1.</u>

Napisz najmniejszą liczbę dwucyfrową, której:

a) Cyfry są takie same …………
b) Cyfry są różne …………
c) Cyfra dziesiątek jest o 1 większa od cyfry jedności …………
d) Cyfra jedności jest o 3 mniejsza od cyfry dziesiątek ……….

<u>Zadanie 2.</u>

Mamy daną liczbę 9. Stwórz liczbę, która:

a) Będzie o 2 większa od podanej liczby …………
b) Będzie 2 razy większa od podanej liczby …………
c) Będzie o 3 mniejsza od podanej liczby …………
d) Będzie o 3 razy mniejsza od podanej liczby ………..

- **Forma pracy uczniów – praca w małych grupach**

<u>Zadanie 3.</u>

a) Mamy do dyspozycji trzy cyfry: 1, 2 i 3. Ile różnych liczb trzycyfrowych można ułożyć z ich pomocą?

b) Wybierzcie 4 dowolne cyfry. Ile różnych liczb czterocyfrowych można ułożyć z ich pomocą?

<u>Zadanie 4:</u>

Interesują nas tylko liczby dwucyfrowe, których cyfra dziesiątek jest dwa razy mniejsza od cyfry jedności. Które z podanych liczb z brakującymi cyframi spełniają ten warunek? Jakie to liczby? Dlaczego pozostałe przykłady nie spełniają warunku?

…3 …4 …8 …5 …9 …2

III. Omówienie zajęć. Dyskusja z uczniami.

IV. Zakończenie zajęć.

Aneks 5

PRZYKŁADOWY SCENARIUSZ ZAJĘĆ – ZADANIA GEOMETRYCZNE

Data:

Grupa:

Zakres tematyczny: Obliczanie obwodów figur płaskich – kwadrat i prostokąt.

Cele ogólne:

- Kształtowanie umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań problemowych o charakterze geometrycznym
- Utrwalenie podstawowych informacji dotyczących własności figur geometrycznych (kwadrat i prostokąt)
- Utrwalanie umiejętności obliczania obwodów figur płaskich (kwadrat o prostokąt)

Cele szczegółowe:

- Uczeń potrafi rozwiązywać matematyczne zadania problemowe o charakterze geometrycznym
- Uczeń zna podstawowe własności figur geometrycznych (kwadrat i prostokąt)
- Uczeń potrafi obliczać obwody figur płaskich (kwadrat i prostokąt)
- Uczeń potrafi tworzyć figury manipulując patyczkami

Metoda pracy: heurystyczna metoda G. Polya

Forma pracy: praca w parach, praca indywidualna

Pomoce dydaktyczne:

- patyczki do liczenia
- kartki z wydrukowanymi figurami
- kartki z treścią zadań

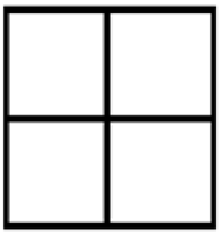
Przebieg zajęć:

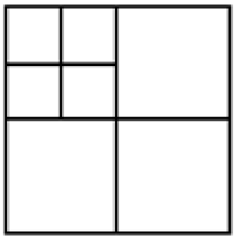
I. Rozgrzewka – manipulacje z patyczkami.

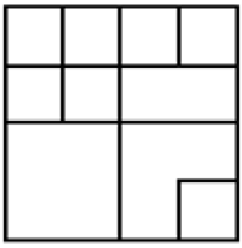
- **Forma pracy uczniów – praca w parach**

Zadanie 1.

Przyjrzyjcie się uważnie rysunkom i sprawdźcie ile potrzeba patyczków, by je wykonać. Ułóż figury na ławce. Czy każdą figurę da się ułożyć korzystając z patyczków w taki sam sposób?







Zadanie 2.

Macie do dyspozycji patyczki. Spróbujcie zbudować:

a) 2 kwadraty z 7 patyczków,
b) 2 kwadraty z 10 patyczków,
c) 3 kwadraty z 9 patyczków,
d) 6 kwadratów z 9 patyczków,
e) 5 kwadratów z 6 patyczków.

Wskazówka: kwadraty nie muszą być zawsze równe!

II. Zajęcia właściwe – rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem metody G. Polya.

- **Forma pracy uczniów – praca indywidualna**

Zadanie 1.

Julka narysowała kwadrat, którego bok miał długość 7 cm. Następnie do dwóch jego boków dodała po 4 cm, tak, że wyszedł jej prostokąt. Narysuj w zeszycie prostokąt Julki i oblicz jego obwód.

- **Forma pracy uczniów – praca w parach**

Zadanie 2.

Pan Karol i Pan Jan są sąsiadami. Ogród pana Karola jest w kształcie kwadratu, którego obwód wynosi 100 m. Ogród pana Jana jest w kształcie prostokąta. Jego jeden bok ma tyle samo metrów, co bok ogrodu pana Karola. Drugi bok ogrodu pana Jana jest o 5 m dłuższy od pierwszego boku. Ile metrów siatki będzie potrzebował pan Karol, a ile pan Jan do ogrodzenia swojego ogrodu? Który z sąsiadów będzie musiał kupić więcej siatki?

Zadanie 3.

Obwód pewnej figury wynosi 20 cm. Wiemy, że ta figura ma cztery boki. Jaka figura spełnia powyższe warunki? Jakiej długości są jej boki? Czy jest tylko jedno prawidłowe rozwiązanie?

III. Omówienie zajęć. Dyskusja z uczniami.

IV. Zakończenie zajęć.

Aneks 6

ARKUSZ OBSERWACJI PRACY UCZNIÓW KLAS TRZECICH PODCZAS ZAJĘĆ MATEMATYCZNYCH

Data obserwacji: …………

Grupa: ………..

Rodzaj zajęć:

- ☐ Zajęcia prowadzone przez nauczyciela-wychowawcę
- ☐ Zajęcia eksperymentalne

1. Występowanie zadań o charakterze problemowym

- ☐ Tak
- ☐ Nie

2. Sposób zapoznania się uczniów z treścią zadania:

- ☐ każdy uczeń czyta samodzielnie, po cichu treść zadania
- ☐ jeden uczeń czyta na głos treść zadania
- ☐ nauczyciel czyta na głos treść zadania

3. Sposób rozwiązywania zadań przez uczniów:

- ☐ każdy uczeń samodzielnie rozwiązuje zadanie
- ☐ zadanie rozwiązuje jeden uczeń na tablicy
- ☐ uczniowie rozwiązują zadanie w parach
- ☐ uczniowie rozwiązują zadanie w małych grupach

4. Dominująca forma pracy uczniów na zajęciach:

- ☐ praca indywidualna
- ☐ praca w parach
- ☐ praca w grupach

5. Wykonywanie poszczególnych etapów pracy nad zadaniem tekstowym:

  - ☐ zrozumienie zadania
  - ☐ układanie planu rozwiązania

- ☐ wykonanie planu
- ☐ rzut oka wstecz

6. Pomoce wykorzystane w trakcie trwania zajęć:

☐ książka

☐ zeszyt ćwiczeń

☐ zeszyt w kratkę

☐ dodatkowe karty pracy lub materiały drukowane

☐ inne

7. Czy uczniowie zgłaszają prowadzącemu napotykane trudności podczas rozwiązania zadania

☐ tak

☐ raczej tak

☐ raczej nie

☐ nie

8. Poziom hałasu na zajęciach:

☐ duży

☐ raczej duży

☐ raczej mały

☐ mały

9. Ilość rozwiązanych zadań w czasie zajęć: ……

Aneks 7

KWESTIONARIUSZ ROZMOWY Z NAUCZYCIELEM EDUKACJI WCZESNOSZKOLNEJ

1. Jakie metody rozwiązywania matematycznych zadań najczęściej stosuje Pan/Pani w pracy ze swoimi uczniami?
2. Jakie formy pracy na zajęciach matematycznych najczęściej stosuje Pan/Pani w pracy ze swoimi uczniami?
3. W jaki sposób Pana/Pani uczniowie zapoznają się z treścią matematycznych zadań?
4. W jaki sposób Pana/Pani uczniowie rozwiązują matematyczne zadania?
5. Jaka atmosfera panuje na Pana/Pani zajęciach matematycznych?
6. Jakie czynności wykonują Pana/Pani uczniowie podczas rozwiązywania matematycznych zadań problemowych?

Aneks 8

Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy eksperymentalnej GE1 w preteście

Imię i nazwisko	Suma	Zadania arytmetyczne	Zadania geometryczne
Emilia A.	26	19	7
Malwina F.	26	23	3
Aleksandra F.	30	24	6
Oliwia G.	19	14	5
Miłosz G.	28	21	7
Oliwier J.	22	16	6
Aleksander K.	25	20	5
Wiktoria K.	19	17	2
Barbara K.	23	16	7
Gabriel K.	23	19	4
Mateusz K.	16	11	5
Julia K.	26	20	6
Barbara K.	30	25	5
Martyna K.	30	23	7
Oliwia M.	37	29	8
Kacper P.	30	24	6
Michał P.	14	12	2
Oskar S.	36	26	10
Krystian S.	23	17	6
Natalia S.	22	18	4
Igor Ś.	11	9	2
Maja T.	19	13	6
Zuzanna W.	14	9	5

Aneks 9

Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy kontrolnej GK1 w preteście

Imię i nazwisko	Suma	Zadania arytmetyczne	Zadania geometryczne
Kamil A.	33	27	6
Alan B.	8	8	0
Jakub C.	24	22	2
Mikołaj G.	22	22	0
Oliwia G.	21	20	1
Oliwia J.	13	11	2
Jakub J.	20	20	0
Iga K.	23	21	2
Agnieszka K.	28	25	3
Diana L.	19	18	1
Kacper N.	20	15	5
Maja N.	17	17	0
Natalia P.	28	22	6
Igor P.	21	21	0
Filip P.	11	9	2
Karolina S.	23	19	4
Natalia S.	30	27	3
Sebastian S.	21	21	0
Mateusz S.	29	25	4
Julia Ś.	5	5	0
Jakub Ś.	21	19	2
Marek U.	22	21	1
Patrycja W.	10	10	0

Aneks 10

Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy eksperymentalnej GE1 w postteście

Imię i nazwisko	Suma	Zadania arytmetyczne	Zadania geometryczne
Emilia A.	36	28	8
Malwina F.	30	24	6
Aleksandra F.	34	28	6
Oliwia G.	34	24	10
Miłosz G.	34	26	8
Oliwier J.	31	23	8
Aleksander K.	29	20	9
Wiktoria K.	26	22	4
Barbara K.	33	24	9
Gabriel K.	29	23	6
Mateusz K.	30	24	6
Julia K.	30	23	7
Barbara K.	33	24	9
Martyna K.	36	26	10
Oliwia M.	37	27	10
Kacper P.	35	26	9
Michał P.	17	15	2
Oskar S.	40	28	12
Krystian S.	31	24	7
Natalia S.	24	19	5
Igor Ś.	20	18	2
Maja T.	29	21	8
Zuzanna W.	30	22	8

Aneks 11

Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy eksperymentalnej GE2 w postteście

Imię i nazwisko	Suma	Zadania arytmetyczne	Zadania geometryczne
Krystian B.	34	24	10
Oliwier B.	31	20	11
Maja B.	37	28	9
Dawid G.	36	27	9
Julia G.	39	28	11
Karol G.	33	24	9
Michał H.	37	27	10
Alicja K.	12	9	3
Dominika K.	24	20	4
Igor K.	34	26	8
Matylda M.	38	27	11
Wojciech M.	32	24	8
Wiktoria N.	31	26	5
Franciszek P.	31	25	6
Maksymilian P.	36	26	10
Oliwia P.	18	14	4
Zuzanna P.	26	19	7
Natalia P.	26	21	5
Kacper S.	38	28	10
Barbara S.	34	26	8
Dominik T.	31	23	8
Aleksandra W.	34	27	7
Maja W.	16	14	2

Aneks 12

Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy kontrolnej GK1 w postteście

Imię i nazwisko	Suma	Zadania arytmetyczne	Zadania geometryczne
Kamil A.	33	25	8
Alan B.	9	9	0
Jakub C.	24	20	4
Mikołaj G.	22	22	0
Oliwia G.	23	20	3
Oliwia J.	13	11	2
Jakub J.	15	14	1
Iga K.	25	23	2
Agnieszka K.	29	24	5
Diana L.	19	17	2
Kacper N.	21	16	5
Maja N.	18	17	1
Natalia P.	19	13	6
Igor P.	21	20	1
Filip P.	13	9	4
Karolina S.	26	19	7
Natalia S.	33	27	6
Sebastian S.	22	21	1
Mateusz S.	30	24	6
Julia Ś.	5	5	0
Jakub Ś.	22	17	5
Marek U.	23	23	0
Patrycja W.	12	12	0

Aneks 13

Liczba punktów uzyskanych przez uczniów grupy kontrolnej GK2 w postteście

Imię i nazwisko	Suma	Zadania arytmetyczne	Zadania geometryczne
Igor C.	31	24	7
Kamila D.	16	14	2
Zuzanna D.	14	12	2
Oskar D.	20	12	8
Szymon G.	31	27	4
Julia G.	20	15	5
Julia J.	16	14	2
Mateusz K.	20	18	2
Maksymilian M.	32	27	5
Natalia M.	16	12	4
Oliwia M.	16	14	2
Aleksander M.	15	13	2
Wiktoria N.	29	25	4
Karol N.	28	23	5
Wiktoria S.	17	8	9
Karolina S.	19	14	5
Estera S.	14	12	2
Sebastian S.	18	15	3
Teresa S.	13	12	1
Julia S.	34	27	7
Julia T.	34	28	6
Maciej T.	34	27	7
Jakub W.	10	10	0